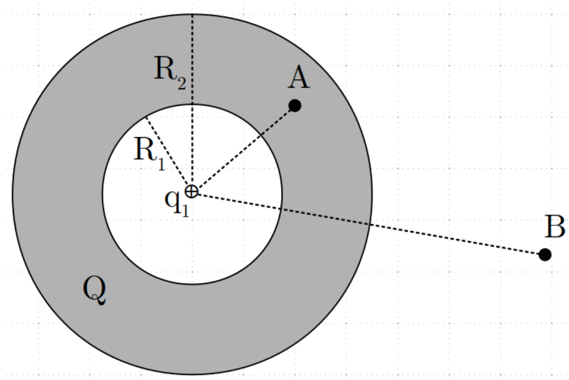
Fisica 2 - Primo esonero novembre 2024

Esercizio 1

Una carica positiva puntiforme $q_1 = 8 \times 10^{-11}$ C è circondata una carica positiva $Q = 4 \times 10^{-11}$ C distribuita uniformemente in un guscio sferico di raggi $R_1 = 4$ cm e $R_2 = 8$ cm. Le cariche si trovano immerse in aria.

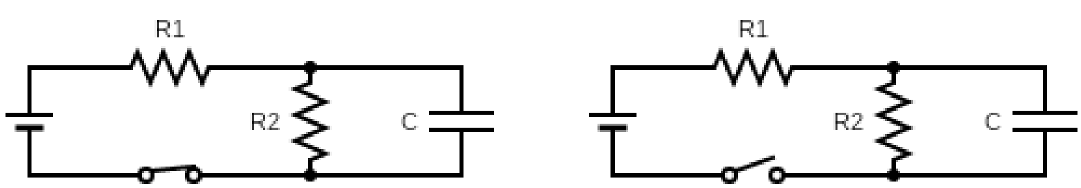
1. Calcolare il campo elettrico nei punti A e B, rispettivamente a distanza $r_A = 6$ cm e $r_B = 16$ cm da q_1. [**4 punti**]
2. Calcolare la differenza di potenziale tra la superficie esterna di raggio R_2 e il punto B. [**4 punti**]
3. Nel punto B si pone una carica negativa $q_2 = -5 \times 10^{-11}$ C. Calcolare (a) la forza di cui essa risente e (b) il lavoro del campo elettrico per portare q_2 da B alla superficie esterna R_2. [**4 punti**]
4. Supponiamo ora che la carica Q nel guscio sferico non sia in aria, bensì in un isolante con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4$. Gli altri dati (q_1, R_1 e R_2) rimangono uguali e la carica q_2 non è presente. Calcolare il campo elettrico nei punti A e B. [**3 punti**]



Esercizio 2

Il circuito in figura è composto da un generatore di tensione (con resistenza interna trascurabile) $\varepsilon = 20$ V, due resistori $R_1 = 300\,\Omega$ e $R_2 = 200\,\Omega$ e un condensatore di capacità $C = 5 \times 10^{-6}$ F. L'interruttore è chiuso da un tempo molto lungo e il circuito è in regime stazionario.

1. Calcolare la corrente nel cicuito, la carica sul condensatore e l'energia immagazzinata in quest'ultimo. [**4 punti**]
2. L'interruttore viene aperto e il condensatore inizia a scaricarsi. Determinare l'espressione della corrente in funzione del tempo. [**4 punti**]
3. Sempre a interruttore aperto, calcolare il tempo $\tilde{t}$ in cui si dimezza la carica sul condensatore e il valore della corrente in tale istante. [**4 punti**]
4. Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule nel tempo $\tilde{t}$. [**3 punti**]
5. Nello spazio vuoto tra le facce del condensatore si inserisce un elettrone (carica $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C). Sapendo che la separazione tra le facce è $d = 2$ cm, calcolare la forza di cui l'elettrone risente all'istante $\tilde{t}$. [**3 punti**]



Soluzione del primo esercizio:

1. Data la simmetria sferica, il campo elettrico è radiale e si può calcolare applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica. Iniziamo con il punto A.

$$\Phi(E) = E(r_A) \cdot 4\pi r_A^2 = \frac{q_{\rm int}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

dove $q_{\rm int}$ è la somma di q_1 e della carica del guscio contenuta tra R_1 e r_A. Per calcolare quest'ultima, conviene definire la densità di carica nel guscio (= rapporto tra carica e volume)

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)} \tag{2}$$

Chiamando q_G la carica nel guscio che dobbiamo considerare:

$$q_G = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi(r_A^3 - R_1^3) = \frac{Q(r_A^3 - R_1^3)}{R_2^3 - R_1^3} = 1.36 \times 10^{-11}\ \mathrm{C} \tag{3}$$

Quindi

$$E(r_A) = \frac{q_1 + q_G}{4\pi\epsilon_0 r_A^2} = 233.7\ \mathrm{V/m} \tag{4}$$

A distanza r_B, si deve considerare più semplicemente la carica interna $q_1 + Q$ e quindi:

$$E(r_B) = \frac{q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r_B^2} = 42.1\ \mathrm{V/m} \tag{5}$$

2. La differenza di potenziale è:

$$V(R_2) - V(r_B) = -\int_{r_B}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{6}$$

Il campo elettrico ha un'espressione analoga all'eq. (5)

$$E(R_2 < r < r_B) = \frac{q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{7}$$

pertanto:

$$V(R_2) - V(r_B) = -\int_{r_B}^{R_2} E\, dr = -\int_{r_B}^{R_2} \frac{q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, dr = \frac{q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r_B}\right) = 6.74\ \mathrm{V} \tag{8}$$

3. La forza è attrattiva e vale in modulo:

$$F = \frac{|q_2|(q_1 + Q)}{4\pi\epsilon_0 r_B^2} = 2.1 \times 10^{-9}\ \mathrm{N} \tag{9}$$

Il lavoro fatto dal campo elettrico nello spostamento di q_2 è:

$$W = q_2[V(r_B) - V(R_2)] = 3.37 \times 10^{-10}\ J \tag{10}$$

4. Il campo elettrico nel punto B è sempre dato dalla eq. (5), la presenza del dielettrico non altera il calcolo. Invece nel punto A si ottiene (v. eq. 4):

$$E(r_A) = \frac{q_1 + q_G}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r_A^2} = 58.4\ \mathrm{V/m} \tag{11}$$

Soluzione del secondo esercizio:

1. A regime la corrente è stazionaria e circola solo nella maglia sinistra.

$$i = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = 0.04 \text{ A} \tag{12}$$

La differenza di potenziale ai capi del condensatore è uguale a quella ai capi della resistenza R_2. Vale quindi l'uguaglianza:

$$V_C = V_{R_2} \Rightarrow \frac{q}{C} = R_2 i \tag{13}$$

dove q è la carica sul condensatore. Quindi

$$q = CR_2 i = 4 \times 10^{-5} \text{ C} \tag{14}$$

L'energia immagazzinata è

$$W = \frac{q^2}{2C} = 1.6 \times 10^{-4} \text{ J} \tag{15}$$

2. A interruttore aperto, il generatore è staccato e non circola più corrente attraverso R_1. Il condensatore si scarica quindi attraverso R_2. Vale ancora l'eq. (13) e in più occorre considerare che

$$i = -\frac{dq}{dt} \tag{16}$$

e quindi

$$q(t) = -R_2 C \frac{dq}{dt} \tag{17}$$

la cui soluzione dà

$$q(t) = q_0 e^{-t/R_2 C} \tag{18}$$

dove q_0 è la carica iniziale. La corrente in funzione del tempo è pertanto

$$i(t) = \frac{q_0}{R_2 C} e^{-t/R_2 C} \tag{19}$$

3. Si vuole $q(\tilde{t}) = \frac{1}{2} q_0$. Quindi

$$\tilde{t} = -R_2 C \ln\left(\frac{q(\tilde{t})}{q_0}\right) = R_2 C \ln 2 = 6.9 \times 10^{-4} \text{ s.} \tag{20}$$

A questo istante, la corrente si è anch'essa dimezzata:

$$i(\tilde{t}) = i(t=0) e^{-\tilde{t}/R_2 C} = \frac{q_0}{R_2 C} e^{-\tilde{t}/R_2 C} = 0.02 \text{ A.} \tag{21}$$

4. L'energia dissipata per effetto Joule è uguale alla differenza tra le energie iniziale e finale immagazzinate nel condensatore. Quella iniziale è data dalla (15), mentre quella finale si sarà ridotta di un fattore 4 (essendo proporzionale a q^2).

$$W(\tilde{t}) = \frac{q(\tilde{t})^2}{2C} = \frac{1}{4} W(t=0) \tag{22}$$

Quindi

$$\Delta W = \frac{3}{4} W(t=0) = 1.2 \times 10^{-4} \text{ J.} \tag{23}$$

5. Il campo elettrico nel condensatore è

$$E = \frac{V_C}{d} = \frac{q}{Cd} \tag{24}$$

quindi

$$E(\tilde{t}) = \frac{q(\tilde{t})}{Cd} = 200 \text{ V/m} \tag{25}$$

e la forza sull'elettrone vale in modulo

$$F(\tilde{t}) = |e| E(\tilde{t}) = 3.2 \times 10^{-17} \text{ N} \tag{26}$$