

Esercizio 1

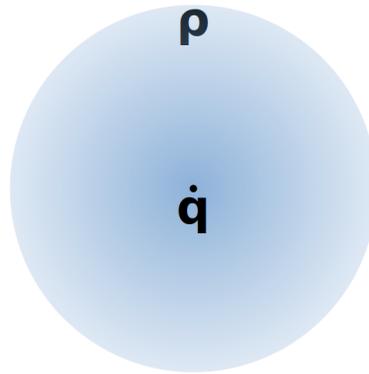
Una carica puntiforme $+q = 1.6 \times 10^{-19}$ C si trova nell'origine di una distribuzione di carica negativa che ha una certa densità $\rho(r)$. Il potenziale generato da tutto il sistema ha la seguente espressione:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/a}}{r}$$

dove $a = 10^{-10}$ m.

1. Determinare l'espressione del campo elettrico $\vec{E}(r)$ e calcolarne il valore numerico in $r = a$. [3 punti]
2. Determinare il flusso del campo elettrico attraverso una superficie sferica di raggio R e centro nell'origine, nei casi limite $R \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$. [4 punti]
3. Trovare quanto vale la carica negativa totale in tutto lo spazio. [4 punti]
4. Calcolare il lavoro necessario a portare la carica $+q$ a distanza infinita dall'origine. [4 punti]
5. Determinare l'espressione della densità $\rho(r)$ in funzione del raggio. [3 punti]

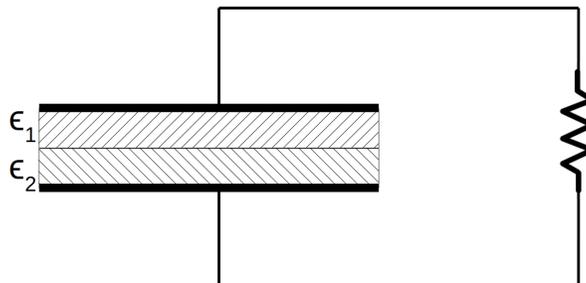
(Suggerimento: la divergenza di un campo radiale in coordinate sferiche vale $\nabla \cdot \vec{E}(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}[r^2 E(r)]$)



Esercizio 2

Un condensatore a facce piane e parallele di capacità $C = 2 \times 10^{-11}$ F viene inizialmente caricato a una differenza di potenziale di 100 V, poi viene staccato dal generatore e riempito con due dielettrici, ognuno di spessore pari alla metà della distanza tra le armature, con costanti dielettriche $\epsilon_1 = 1.5$ e $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$.

1. Calcolare la nuova capacità C' del sistema, e la differenza di potenziale V' tra le armature. [5 punti]
2. Il condensatore viene in seguito scaricato tramite una resistenza $R = 3 \times 10^6 \Omega$. Determinare dopo quanto tempo \tilde{t} la carica sulle armature diventa la metà del valore iniziale, e la corrente nel circuito al tempo \tilde{t} . [5 punti]
3. Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule sulla resistenza tra l'istante iniziale e il tempo \tilde{t} . [5 punti]



Soluzione del primo esercizio:

1. Il campo elettrico è radiale:

$$E(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ar} \right) e^{-r/a} \quad (1)$$

$$E(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a^2 e} = 1.06 \times 10^{11} \text{ V/m} \quad (2)$$

2. Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie sferica di raggio R è

$$\Phi = E(R) \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{R}{a} \right) e^{-R/a} \quad (3)$$

Si vede quindi che:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Phi = 0 \quad (5)$$

3. Dall'eq. 5, la carica totale in tutto lo spazio deve essere zero per il teorema di Gauss. Quindi, anche senza calcolare esplicitamente la densità di carica $\rho(r)$, sappiamo che la carica negativa totale è $-q$, ovvero:

$$\int_0^\infty \rho(r) dr = -q. \quad (6)$$

4. Per prima cosa, troviamo l'energia potenziale U della carica q . Se chiamiamo V_ρ il potenziale generato dalla sola distribuzione $\rho(r)$, senza il contributo della carica q :

$$U = qV_\rho(r=0) \quad (7)$$

Per il principio di sovrapposizione, possiamo scrivere

$$V(r) = V_\rho(r) + V_q(r) \Rightarrow V_\rho(r) = V(r) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/a} - 1}{r} \quad (8)$$

L'espressione deve essere valutata in $r = 0$. Poiché

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{-r/a} - 1}{r} = -\frac{1}{a} \quad (9)$$

si ottiene

$$U = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (10)$$

Il lavoro è quindi

$$W = -U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = 2.3 \times 10^{-18} \text{ J} \quad (11)$$

5. La densità di carica si può ricavare dalla I eq. di Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 E(r)] = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12)$$

Usando l'espressione di $E(r)$ dall'eq. 1, si ricava

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{e^{-r/a}}{r} \quad (13)$$

Soluzione del secondo esercizio:

1. Siano S la superficie della armature e d la loro distanza. La capacità C' dopo aver inserito i dielettrici è quella di due condensatori in serie, di uguale area e spessore $d/2$:

$$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (14)$$

dove

$$C_1 = \epsilon_1 \epsilon_0 \frac{S}{d/2} \quad (15)$$

$$C_2 = \epsilon_2 \epsilon_0 \frac{S}{d/2} \quad (16)$$

Quindi

$$C' = \epsilon_0 \frac{S}{d} \frac{2\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = C \frac{4}{3} \epsilon_1 = 2C = 4 \times 10^{-11} \text{ F}. \quad (17)$$

La carica q_0 del condensatore rimane la stessa dopo aver inserito i dielettrici. Inizialmente si aveva:

$$q_0 = CV = 2 \times 10^{-9} \text{ C} \quad (18)$$

quindi la nuova differenza di potenziale V' è

$$V' = \frac{q_0}{C'} = 50 \text{ V}. \quad (19)$$

2. Si ha un circuito RC in fase di scarica. La carica elettrica sul condensatore al tempo \tilde{t} vale

$$q(\tilde{t}) = q_0 e^{-\tilde{t}/RC'} \quad (20)$$

e si vuole $q(\tilde{t}) = \frac{1}{2} q_0$. Quindi

$$\tilde{t} = -RC' \ln \left(\frac{q(\tilde{t})}{q_0} \right) = RC' \ln 2 = 8.32 \times 10^{-5} \text{ s}. \quad (21)$$

A questo istante, la corrente vale

$$i(\tilde{t}) = i(t=0) e^{-\tilde{t}/RC'} = \frac{V'}{R} e^{-\tilde{t}/RC'} = \frac{q_0}{RC'} e^{-\tilde{t}/RC'} = 8.33 \times 10^{-6} \text{ A}. \quad (22)$$

3. L'energia dissipata per effetto Joule è uguale alla differenza tra le energie iniziale e finale immagazzinate nel condensatore.

$$U(t=0) = \frac{1}{2} C' V'^2 \quad (23)$$

$$U(\tilde{t}) = \frac{1}{2} C' V(\tilde{t})^2 = \frac{1}{2} C' V'^2 e^{-2\tilde{t}/RC'} \quad (24)$$

Quindi

$$\Delta U = \frac{1}{2} C' V'^2 (1 - e^{-2\tilde{t}/RC'}) = 3.75 \times 10^{-8} \text{ J}. \quad (25)$$

Si arriva allo stesso risultato applicando la formula della potenza, $P = Ri^2$:

$$\Delta U = \int_0^{\tilde{t}} P(t) dt = \int_0^{\tilde{t}} Ri(t)^2 dt = \frac{V'^2}{R} \int_0^{\tilde{t}} e^{-2t/RC'} dt \quad (26)$$