Fisica 2 - Scritto gennaio 2025

Esercizio 1

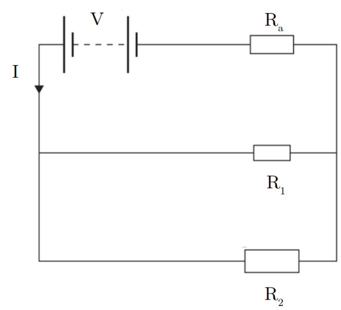
Una sfera di raggio $R = 3$ cm ha una densità di carica descritta dalla legge $\rho(r) = kr$ per $0 < r < R$. Sia $k = 10^{-3}$ C/m^4.

1. Calcolare la carica totale contenuta nella sfera. [**3 punti**]
2. Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio. [**4 punti**]
3. Calcolare il lavoro che è servito per assemblare la sfera. [**4 punti**]

Esercizio 2

Un'autoradio è descritta dal circuito in figura, dove $R_a = 10\Omega$ è la resistenza dell'antenna, mentre $R_1 = 80\Omega$ e $R_2 = 48\Omega$ sono le resistenze di due altoparlanti. La batteria fornisce una tensione V pari a 12 Volt.

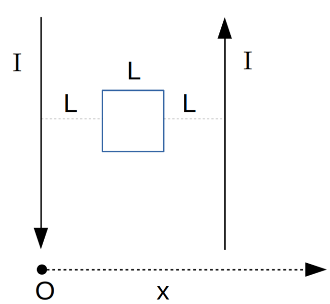
1. Calcolare la resistenza equivalente del circuito e la corrente totale I. [**3 punti**]
2. Determinare la differenza di potenziale ai capi dell'antenna e la corrente attraverso di essa. [**4 punti**]
3. Calcolare la corrente attraverso gli altoparlanti R_1 e R_2 e la potenza da essi dissipata per effetto Joule. [**4 punti**]



Esercizio 3

Due fili indefiniti paralleli e a distanza reciproca 3L sono percorsi in verso opposto dalla corrente $I = I_0 \exp(-t/\tau)$. Nel piano dei fili si pone una spira conduttrice quadrata di lato L come in figura. (τ=2 s, I_0= 6 A, L = 50 cm)

1. Determinare il campo magnetico lungo i lati della spira paralleli ai fili. [**4 punti**]
2. Scrivere il flusso del campo magnetico attraverso la spira in funzione del tempo. [**4 punti**]
3. Calcolare la fem indotta nella spira al tempo t' = 3 s e la corrente che circola in essa se la sua resistenza vale $R = 100\Omega$. [**3 punti**]



Soluzione del primo esercizio:

1. La carica nella sfera è

$$Q = \int_0^R \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr = \int_0^R kr\, 4\pi r^2\, dr = \pi k R^4 \tag{1}$$

quindi

$$Q = 2.5 \times 10^{-9}\mathrm{C}. \tag{2}$$

2. Notiamo che ρ è funzione solo di r, quindi per la simmetria sferica anche il campo elettrico sarà radiale e funzione solo di r: $\vec{E} = E(r)\hat{u}_r$. Possiamo quindi usare il teorema di Gauss prendendo una superficie sferica di raggio r:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\mathrm{int}}(r). \tag{3}$$

Per $r < R$:

$$4\pi r^2 E_1(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r kr'\, 4\pi\, r'^2\, dr' = \frac{4\pi k r^4}{4\epsilon_0} \tag{4}$$

quindi

$$E_1(r) = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \tag{5}$$

Per $r > R$:

$$4\pi r^2 E_2(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{6}$$

quindi

$$E_2(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \tag{7}$$

3. Il lavoro richiesto equivale all'energia elettrostatica del sistema, che si può calcolare in due modi: integrando la densità di energia $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ in tutto lo spazio opppure $\frac{1}{2}\rho V$ nel volume della sfera. Usando il primo metodo:

$$W = E = \int_0^\infty \frac{1}{2}\epsilon_0 E(r)^2\, 4\pi r^2\, dr = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_0^R E_1(r)^2\, 4\pi r^2\, dr + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_R^\infty E_2(r)^2\, 4\pi r^2\, dr \tag{8}$$

quindi

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_0^R \frac{k^2 r^4}{16\epsilon_0^2}\, 4\pi r^2\, dr + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_R^\infty \frac{k^2 R^8}{16\epsilon_0^2 r^4}\, 4\pi r^2\, dr \\
&= \frac{k^2\pi}{8\epsilon_0}\left(\int_0^R r^6\, dr + R^8 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}\right) \\
&= \frac{k^2\pi}{8\epsilon_0}\left(\frac{R^7}{7} + R^7\right) \\
&= \frac{k^2\pi R^7}{7\epsilon_0} = 1.1 \times 10^{-6}\mathrm{J}
\end{aligned} \tag{9}$$

Soluzione del secondo esercizio:

1. La resistenza equivalente è data dalla serie di R_a con il parallelo di R_1 e R_2, quindi

$$R_{eq} = R_a + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 40\ \Omega \tag{10}$$

La corrente nel circuito è quindi

$$I = \frac{V}{R} = 0.3\ \text{A} \tag{11}$$

2. Si può ad esempio ragionare sul circuito equivalente costituito dalla serie di R_a e R_{12} (=parallelo di R_1 e R_2). Si vede così che la corrente I_a attraverso R_a è semplicemente I e la tensione ai capi di R_a è quindi

$$V_a = I_a R_a = I R_a = 3\text{V} \tag{12}$$

Un'altra possibilità è applicare la legge di Kirchhoff per le maglie:

$$V = (I_1 - I_2)R_1 + I_1 R_a \tag{13}$$
$$0 = (I_2 - I_1)R_1 + I_2 R_2 \tag{14}$$

e svolgendo il sistema si ricava $I_1 \equiv I_a = V/R_{eq}$.

3. Sempre seguendo il ragionamento sul circuito equivalente, si può osservare che la differenza di potenziale ai capi del parallelo R_{12} è pari alla differenza $V - V_a = 9$ V. Allora

$$I_{R_1} = \frac{V - V_a}{R_1} = 112.5\ \text{mA} \tag{15}$$
$$I_{R_2} = \frac{V - V_a}{R_2} = 187.5\ \text{mA} \tag{16}$$

In alternativa, se si sceglie di sfruttare la legge di Kirchhoff delle maglie, si trova lo stesso risultato risolvendo il sistema dato da (13) e (14) e poi osservando che

$$I_{R_1} = I_1 - I_2 \tag{17}$$
$$I_{R_2} = I_2 \tag{18}$$

In ogni caso, la potenza dissipata risulta

$$P_{R_1} = R_1 I_{R_1}^2 = 1.01\ \text{W} \tag{19}$$
$$P_{R_2} = R_2 I_{R_2}^2 = 1.69\ \text{W} \tag{20}$$

Soluzione del terzo esercizio:

1. Definiamo positivo il verso uscente dal foglio. Il campo magnetico prodotto dai fili vale in generale

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \tag{21}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(3L - x)} \tag{22}$$

Allora sul lato sinistro della spira:

$$B(x = L) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\frac{1}{L} + \frac{1}{2L}) = \frac{3\mu_0 I_0}{4\pi L} \exp(-t/\tau) \tag{23}$$

e ugualmente sul lato destro:

$$B(x = 2L) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\frac{1}{2L} + \frac{1}{L}) = B(x = L) \tag{24}$$

2. Il flusso del campo magnetico attraverso la spira si trova integrando

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_L^{2L} [B_1(x) + B_2(x)]\, L\, dx = \int_L^{2L} \frac{\mu_0 I(t) L}{2\pi} \int_L^{2L} \frac{dx}{x} + \int_L^{2L} \frac{dx}{3L - x} \\ &= \frac{\mu_0 I(t) L}{2\pi}(\ln 2 - \ln \frac{1}{2}) = \frac{\mu_0 I(t) L}{2\pi} \cdot 2 \ln 2 = \frac{\mu_0 L}{\pi} \ln 2 I_0 \exp(-t/\tau) \end{aligned} \tag{25}$$

3. La fem indotta è

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 L \ln 2 I_0}{\pi\tau} \exp(-t/\tau) \tag{26}$$

e dopo $t' = 3$ s vale

$$\varepsilon(t') = 9.3 \times 10^{-5}\mathrm{V}. \tag{27}$$

La corrente è quindi

$$i(t') = \varepsilon(t')/R = 9.3 \times 10^{-7}\mathrm{A}. \tag{28}$$