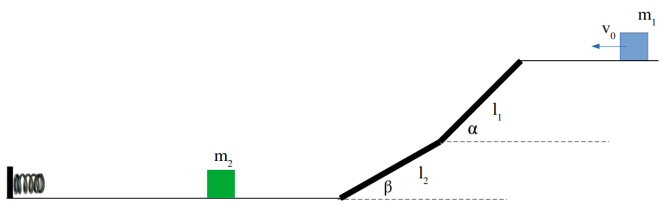
Fisica 1 - Esame scritto 7 luglio 2023

Esercizio 1

Un blocchetto di massa $m_1 = 1.4$ kg viene lanciato a velocità iniziale $v_0 = 2.1$ m/s su un piano orizzontale liscio, poi incontra due piani inclinati scabri (con $\mu = 0.1$) su cui percorre i tratti $l_1 = 0.9$ m e $l_2 = 0.7$ m (angoli di inclinazione: $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$). Poi il blocchetto arriva su un altro piano orizzontale liscio, sul quale urta anelasticamente un altro blocchetto di massa $m_2 = 1.8$ kg inizialmente in quiete. Alla fine si trova una molla di costante $k = 50$ N/m.

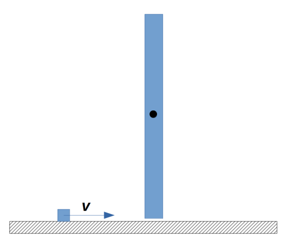
1. Calcolare il lavoro fatto dall'attrito e quello fatto dalla gravità lungo i tratti l_1 e l_2. [**4 punti**]
2. Calcolare la velocità del blocchetto quando arriva sul secondo tratto orizzontale, e quella dopo l'urto. [**4 punti**]
3. Calcolare la compressione della molla tale da arrestare i blocchetti. [**3 punti**]



Esercizio 2

Una sbarra di massa M e lunghezza $d = 0.7$ m è imperniata al proprio centro ed inizialmente in quiete in posizione verticale. La sbarra viene urtata elasticamente al suo estremo più in basso da un blocchetto di massa $m = 0.3$ kg in moto con velocità di modulo $v = 0.5$ m/s. Il blocchetto si ferma subito dopo l'urto.

1. Calcolare la massa della sbarra e la sua velocità angolare subito dopo l'urto. [**4 punti**]
2. La sbarra è soggetta ad attrito, che produce un momento di modulo $\mathcal{M} = 0.05$ N·m (rispetto al centro) e opposto alla rotazione. Calcolare dopo quanto tempo la sbarra si ferma. Dire se, in assenza di attrito, la velocità angolare della sbarra rimane costante. [**4 punti**]
3. In assenza di attrito, la sbarra fa un giro completo e urta nuovamente il blocchetto fermo. Con quale velocità questo inizia a muoversi? [**3 punti**]



Esercizio 3

Una mole di gas perfetto monoatomico subisce le seguenti trasformazioni:

i) adiabatica irreversibile dallo stato A ($V_A = 0.02$ m^3, $p_A = 10^5$ Pa) a un certo stato B;

ii) isobara reversibile dallo stato B allo stato C, con $V_C = 2V_B/3$ e lavoro fatto dal gas $\mathcal{L}_{BC} = -1.5 \times 10^3$ J;

iii) adiabatica reversibile da C a A.

1. Calcolare il lavoro fatto nella trasformazione AB. [**4 punti**]
2. Calcolare pressione, volume e temperatura negli stati B e C. [**4 punti**]
3. Calcolare la variazione di entropia nella trasformazione AB. [**3 punti**]

Soluzione del primo esercizio:

1. Il lavoro fatto dalla gravità è pari alla variazione di energia potenziale gravitazionale, e dipende solo dalla differenza di quota:

$$\mathcal{L}_{\text{grav}} = m_1 g h = m_1 g(l_1 \sin\alpha + l_2 \sin\beta) = 13.55 \text{ J}. \tag{1}$$

Per calcolare il lavoro fatto dall'attrito, occorre per prima cosa determinare la forza di attrito che si sviluppa sui piani 1 e 2:

$$F_{\text{att}}^{(1)} = \mu m_1 g \cos\alpha \tag{2}$$

$$F_{\text{att}}^{(2)} = \mu m_1 g \cos\beta \tag{3}$$

e il lavoro è dato dal prodotto di forza per spostamento:

$$\mathcal{L}_{\text{att}}^{(1)} = F_{\text{att}}^{(1)} \cdot l_1 = -\mu m_1 g \cos\alpha \cdot l_1 \tag{4}$$

$$\mathcal{L}_{\text{att}}^{(2)} = F_{\text{att}}^{(2)} \cdot l_2 = -\mu m_1 g \cos\beta \cdot l_2 \tag{5}$$

Il segno meno è dovuto al fatto che forza e spostamento hanno verso opposto. In totale:

$$\mathcal{L}_{\text{att}} = -\mu m_1 g(l_1 \cos\alpha + l_2 \cos\beta) = -1.71 \text{ J}. \tag{6}$$

2. Per trovare la velocità v del blocchetto quando arriva sul secondo tratto orizzontale, si può usare l'uguaglianza tra lavoro fatto dalle forze agenti (gravità e attrito) e variazione di energia cinetica:

$$\mathcal{L}_{\text{grav}} + \mathcal{L}_{\text{att}} = \Delta E_k = \frac{1}{2}m_1 v^2 - \frac{1}{2}m_1 v_0^2. \tag{7}$$

Quindi:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\frac{\mathcal{L}_{\text{att}} + \mathcal{L}_{\text{grav}}}{m_1}} = \sqrt{v_0^2 + 2g[l_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + l_2(\sin\beta - \mu\cos\beta)]} = 4.62 \text{ m/s}. \tag{8}$$

Nell'urto si conserva la quantità di moto, quindi:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)v' \Rightarrow v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v = 2.02 \text{ m/s}. \tag{9}$$

3. L'energia cinetica dei blocchetti dopo l'urto è

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 \tag{10}$$

La compressione della molla si ricava dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 \tag{11}$$

quindi:

$$\Delta x = v'\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 0.51 \text{ m}. \tag{12}$$

Soluzione del secondo esercizio:

1. L'urto è elastico, cioè si conserva l'energia, che inizialmente è quella cinetica del blocchetto. Dopo l'urto il blocchetto si ferma, quindi si ha solo l'energia cinetica della sbarra in rotazione:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{24}Md^2\omega^2. \tag{13}$$

(dove abbiamo usato $I = \frac{1}{12}Md^2$). Inoltre, durante l'urto si conserva il momento angolare, perché il momento delle forze rispetto al centro della sbarra è zero:

$$mv\frac{d}{2} = I\omega = \frac{1}{12}Md^2\omega. \tag{14}$$

La (10) e la (11) costituiscono un sistema di due equazioni in due incognite (M e ω). Risolvendo, si ottiene:

$$M = 3m = 0.9 \text{ kg} \tag{15}$$

$$\omega = \frac{6mv}{Md} = 1.43 \text{ rad/s} \tag{16}$$

2. Detta α l'accelerazione angolare della sbarra:

$$\mathcal{M} = I\alpha = \frac{1}{12}Md^2\alpha \tag{17}$$

Quindi

$$\alpha = \frac{12\mathcal{M}}{Md^2} = 1.36 \text{ rad/s}^2 \tag{18}$$

Il moto rotatorio della sbarra è descritto dalla legge:

$$\omega(t) = \omega - \alpha t \tag{19}$$

La sbarra si arresta quando $\omega(t) = 0$, ovvero al tempo

$$t = \frac{\omega}{\alpha} = 1.05 \text{ s}. \tag{20}$$

Osserviamo che la forza peso non influisce, perché ha momento nullo rispetto al centro della sbarra. Non vi sono altre forze in gioco, quindi in assenza di attrito si mantiene costante il momento angolare della sbarra, e di conseguenza la sua velocità angolare.

3. In assenza di attrito, la sbarra ruota con velocità angolare ω e dopo un giro urta il blocchetto. Dovendosi conservare nuovamente sia l'energia che il momento angolare, la sbarra si ferma e il blocchetto inizia a muoversi con velocità v, la stessa che aveva all'inizio. Più rigorosamente, se chiamiamo v' e ω' le velocità del blocchetto e della sbarra dopo l'urto, possiamo scrivere analogamente alle eq. (10) e (11):

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I\omega'^2 \tag{21}$$

$$I\omega = mv'\frac{d}{2} + I\omega' \tag{22}$$

Stavolta le incognite sono v' e ω'. Poiché valgono le identità (13) e (14), il sistema ha come soluzione $v' = v$ e $\omega' = 0$. (L'altra soluzione possibile è $v' = 0$ e $\omega' = \omega$, che fisicamente non è rilevante perché corrisponde al moto prima dell'urto.)

Soluzione del terzo esercizio:

1. Per la trasformazione adiabatica AB si ha:

$$\mathcal{L}_{AB} = -\Delta U_{AB} = nc_V(T_A - T_B) \tag{23}$$

Dobbiamo quindi calcolare T_A e T_B. Intanto,

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 241 \text{ K.} \tag{24}$$

Poi, per la trasformazione BC si ha:

$$\mathcal{L}_{BC} = p_B(V_C - V_B) = -\frac{1}{3}p_B V_B = -\frac{1}{3}nRT_B \tag{25}$$

quindi

$$T_B = -\frac{3\mathcal{L}_{BC}}{nR} = 542 \text{ K} \tag{26}$$

e infine

$$\mathcal{L}_{AB} = -3750 \text{ J} \tag{27}$$

2. Nello stato C, $p_C = p_B$ quindi

$$\frac{T_C}{V_C} = \frac{T_B}{V_B} \tag{28}$$

allora

$$T_C = T_B\frac{V_C}{V_B} = \frac{2}{3}T_B = 361 \text{ K} \tag{29}$$

inoltre CA è adiabatica reversibile, quindi

$$V_C = V_A\left(\frac{T_A}{T_C}\right)^{1/(\gamma-1)} = 0.01 \text{ m}^3 \tag{30}$$

$$p_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 2.76 \times 10^5 \text{ Pa} = p_B \tag{31}$$

Infine

$$V_B = \frac{3}{2}V_C = 0.015 \text{ m}^3 \tag{32}$$

3. Per calcolare ΔS_{AB} possiamo notare che la variazione di entropia per il ciclo è zero, quindi

$$\Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0 \tag{33}$$

inoltre $\Delta S_{CA} = 0$. Quindi

$$\Delta S_{AB} = -\Delta S_{BC} = -nc_p \log\left(\frac{T_C}{T_B}\right) = 8.42 \text{ J/K} \tag{34}$$