appunti del corso di
Istituzioni di Fisica Nucleare e Subnucleare

prof. Filippo Ceradini
anno accademico 2001-2002

January 3, 2003

Dipartimento di Fisica *"Edoardo Amaldi"*
via della Vasca Navale 84, I - 00146 Roma

Corso di Laurea in Fisica

Cari studenti,

questi sono gli appunti delle lezioni del corso di *Istituzioni di Fisica Nucleare e Subnucleare* tenute fino all'anno accademico 2001-02, l'ultimo anno del vecchio ordinamento del corso di Laurea in Fisica all'Università Roma Tre.

A partire dal 2003 questo corso è stato sostituito da due corsi, uno nel terzo anno della Laurea Triennale: *Elementi di Fisica Nucleare e Subnucleare*, e l'altro nel primo anno della Laurea Specialistica: *Complementi di Fisica Nucleare e Subnucleare*. Comunque gli argomenti trattati nei due corsi non sono sostanzialmente diversi da quelli del corso precedente, è cambiato un po' l'ordine di presentazione degli argomenti, e alcuni ora vengono trattati in altri corsi "a scelta".

Gli appunti sono divisi in **1-**Metodologie, **2-**Fisica Nucleare, **3-**Fisica Subnucleare, e sono corredati da appendici, alcune sono richiami di argomenti già trattati nei corsi della Laurea Triennale, altre sono approfondimenti di argomenti trattati nei corsi dell'indirizzo di Fisica Subnucleare della Laurea Specialistica. L'intendimento è quello di uniformare definizioni, simboli e formule a quelli usati in queste lezioni.

Questi appunti *non* possono sostituire un buon libro di testo perché gli argomenti sono trattati in modo piuttosto schematico senza curare le connessioni logiche, le figure non sono di buona qualità, mancano i riferimenti bibliografici, etc. . . , e soprattutto perché *non* vogliono sostituire i libri di testo, ma unificare più argomenti che sono trattati in testi diversi. Siete quindi caldamente invitati a studiare sui libri, e ce ne sono di ottimi. Buono studio,

`Filippo Ceradini`

Alcuni testi consigliati

- B.Povh, K.Rith, C.Scholtz and F.Zetsche: Particelle e Nuclei, Bollati - Boringhieri, 1998, ISBN 88-339-5559-8, buon libro introduttivo, tradotto in italiano.

- A.Das and T.Ferbel: Introduction to Nuclear and Particle Physics, 2nd edition, World Scientific Publishing, 2003, ISBN 981-238-744-7, buon libro a livello elementare, ben aggiornato.

- W.S.C.Williams, Nuclear and Particle Physics, Oxford Science Publications, 1997, ISBN 0-19-852046-8, buon libro introduttivo, corredato da un testo con soluzioni di esercizi − W.S.C.Williams, Solution Manual for Nuclear and Particle Physics, Oxford Science Publications, ISBN 0-19-851763-7.

- H.Fraunfelder and E.M.Henley: Subatomic Physics, 2nd edition, Prentice Hall, 1991, ISBN 0-13-859430-9, buon libro introduttivo.

- W.E.Burcham and M.Jobes: Nuclear and Particle Physics, Longam Scientific and Technical, 1995, ISBN 0-582-45088-8, molto esauriente per la fisica delle particelle, meno per la fisica nucleare.

- K.S.Crane: Introductory Nuclear Physics, John Wiley & Sons, 1988, ISBN 0-471-80553-X, ottimo testo di fisica nucleare, poco aggiornato per la fisica delle particelle.

- J.L.Basdevant, J.Rich and M.Spiro: Fundamentals in Nuclear Physics, Springer, 2004, ISBN 0-387-01672-4, ottimo testo di fisica nucleare e astrofisica nucleare, ben aggiornato.

- D.H.Perkins: Introduction to High Energy Physics, 4th edition, Addison-Wesley Publishing Company, 2000, ISBN 0-521-62196-8, ottimo e ben aggiornato per la fisica delle particelle.

- A.Bettini: Introduction to Elementary Particle Physics, Cambridge University Press, 2008, ISBN 978-0-521-88021-3, ottimo e e ben aggiornato per la fisica delle particelle.

- R.N.Cahn and G.Goldhaber: The experimental Foundations of Particle Physics, Cambridge University Press, 1989, ISBN 0-21-42425-9, ottimo testo di consultazione per la fisica delle particelle, riproduce alcune pubblicazioni originali dalla scoperta del neutrone a quella dei bosoni vettori $W^{\pm}$ e Z^0.

- E.Segré: Nuclei e Particelle, 2nd edition, Zanichelli, 1982, ISBN 88-08-05628-7, ottimo testo per la fisica nucleare, poco aggiornato per la fisica delle particelle, è un po' datato ma è scritto da un premio Nobel.

per un'introduzione a livello elementare

- D.Halliday, R.Resnick and J.Walker: Fondamenti di Fisica - Fisica Moderna, quinta edizione, Casa Editrice Ambrosiana, 2002, ISBN 88-408-1203-2

Contents

1 Metodologie della fisica nucleare e subnucleare **12**

1.1 Introduzione . . . 12
1.1.1 Il protone . . . 13
1.1.2 L'elettrone . . . 13
1.1.3 Il fotone . . . 17
1.1.4 Il modello atomico di Bohr . . . 24
1.1.5 Onde o particelle ? . . . 27
1.1.6 Lo spin dell'elettrone . . . 28
1.2 Sezione d'urto . . . 31
1.2.1 La sezione d'urto . . . 31
1.2.2 Sezione d'urto differenziale . . . 33
1.2.3 Sezione d'urto di Rutherford . . . 34
1.2.4 Sezione d'urto di Thomson . . . 37
1.3 Acceleratori . . . 38
1.3.1 Acceleratori a caduta di potenziale . . . 39
1.3.2 Acceleratori lineari . . . 41
1.3.3 Acceleratori circolari . . . 43
1.3.4 Cavità a radiofrequenza . . . 47
1.3.5 Accelerazione in cavità risonanti . . . 55
1.3.6 Oscillazioni di betatrone . . . 56
1.3.7 Trasporto dei fasci . . . 58
1.3.8 Emittanza . . . 62
1.3.9 Oscillazioni di sincrotrone . . . 64
1.3.10 Anelli di collisione . . . 66
1.3.11 Radiazione di sincrotrone . . . 67
1.3.12 Sorgenti di radiazione di sincrotrone . . . 70
1.3.13 Sorgenti di neutroni . . . 74
1.4 Interazioni tra particelle e materia . . . 77
1.4.1 Perdita di energia per ionizzazione . . . 78
1.4.2 Fluttuazioni della perdita di energia per ionizzazione . . . 81
1.4.3 Percorso residuo . . . 83
1.4.4 Radiazione Čerenkov . . . 84
1.4.5 Radiazione di transizione . . . 86
1.4.6 Diffusione coulombiana multipla . . . 87

1.4.7 Irraggiamento 89
1.4.8 Effetto fotoelettrico 92
1.4.9 Effetto Compton 93
1.4.10 Produzione di coppie 94
1.4.11 Sciami elettrofotonici 95
1.5 Metodi di rivelazione delle particelle 98
1.5.1 Rivelatori di tracce 99
1.5.2 Scintillatori 102
1.5.3 Rivelatori Čerenkov 102
1.5.4 Camere a ionizzazione 103
1.5.5 Metodi di misura delle variabili cinematiche 105
1.6 Leggi di conservazione e simmetrie 109
1.6.1 Statistica di un sistema di particelle 109
1.6.2 Grandezze fisiche conservate 110
1.6.3 Trasformazioni unitarie 111
1.6.4 Leggi di conservazione additive 115
1.6.5 Leggi di conservazione moltiplicative 116
1.6.6 Parità 116
1.6.7 Coniugazione di carica 118
1.6.8 Inversione temporale 118
1.6.9 Momento di dipolo elettrico 120
1.6.10 Il positronio 121
1.6.11 Il teorema CPT 123
1.7 Processi elettromagnetici 123
1.7.1 Emissione e assorbimento di fotoni 123
1.7.2 Transizione di dipolo elettrico 124
1.7.3 Transizione al secondo ordine 126
1.7.4 Diffusione di fotoni da una carica elettrica 127
1.7.5 Diffusione di Rutherford 129
1.7.6 Fattore di forma elettrico 130
1.7.7 Diffusione di una carica da un dipolo magnetico 133
1.7.8 Fattore di forma magnetico 134
1.7.9 Forma relativistica della sezione d'urto di Rutherford 134
1.7.10 Sezione d'urto di Dirac 136
1.7.11 Sezione d'urto di Rosenbluth 137
1.8 Diffusione da potenziale 140
1.8.1 Diffusione da potenziale radiale 140
1.8.2 Approssimazione di Born 142
1.8.3 Sviluppo in onde parziali 143
1.8.4 Sezione d'urto elastica e di reazione 144
1.8.5 Diffusione da un disco 146
1.8.6 Sezione d'urto protone-protone 149
1.8.7 Diffusione elastica risonante 151

2 Fisica nucleare **153**
2.1 Proprietà dei nuclei . . . 153
2.1.1 Carica elettrica dei nuclei . . . 154
2.1.2 Massa dei nuclei . . . 154
2.1.3 Energia di legame dei nuclei . . . 156
2.1.4 Raggio dei nuclei . . . 157
2.1.5 Statistica e spin dei nuclei . . . 159
2.1.6 Parità dei nuclei . . . 162
2.1.7 La scoperta del neutrone . . . 163
2.1.8 Proprietà elettromagnetiche dei nuclei . . . 164
2.1.9 Interazione di dipolo magnetico . . . 166
2.1.10 Interazione di quadrupolo elettrico . . . 170
2.1.11 Momento magnetico del nucleone . . . 172
2.2 Modelli del nucleo . . . 175
2.2.1 Modello a gas di Fermi . . . 175
2.2.2 Modello a goccia di liquido . . . 177
2.2.3 I nuclei speculari . . . 179
2.2.4 Il modello a strati . . . 180
2.2.5 Momenti magnetici dei nuclei . . . 186
2.3 Proprietà delle forze nucleari . . . 188
2.3.1 L'isospin . . . 188
2.3.2 Il deutone . . . 190
2.3.3 Diffusione neutrone-protone a bassa energia . . . 193
2.3.4 Proprietà dell'interazione nucleone-nucleone . . . 195
2.3.5 Il modello di Yukawa . . . 197
2.4 Decadimenti dei nuclei . . . 199
2.4.1 Legge di decadimento . . . 199
2.4.2 Larghezza di decadimento . . . 200
2.4.3 Decadimenti in cascata . . . 201
2.4.4 Produzione di nuclei radioattivi . . . 203
2.5 Decadimento γ . . . 204
2.5.1 Radiazione di multipolo . . . 204
2.5.2 Conversione interna . . . 206
2.5.3 Spettroscopia γ . . . 207
2.6 Decadimento α . . . 209
2.6.1 Soglia di instabilità . . . 211
2.6.2 Teoria elementare del decadimento α . . . 211
2.6.3 Dipendenza dal momento angolare . . . 215
2.7 Decadimento β . . . 216
2.7.1 L'ipotesi del neutrino . . . 216
2.7.2 Teoria elementare del decadimento β . . . 217
2.7.3 La vita media del decadimento β . . . 220
2.7.4 L'elemento di matrice del decadimento β . . . 222
2.7.5 Decadimenti proibiti . . . 224

2.7.6 Non conservazione della parità . . . 225
2.7.7 L'interazione V-A . . . 227
2.7.8 L'elicità dell'elettrone . . . 229
2.7.9 L'elicità del neutrino . . . 230
2.7.10 La scoperta del neutrino . . . 232
2.8 Reazioni nucleari . . . 233
2.8.1 Sezione d'urto di reazione . . . 233
2.8.2 Fissione . . . 234
2.8.3 Fissione indotta da neutroni . . . 236
2.8.4 Fissione dell'uranio . . . 237
2.8.5 Reattore nucleare . . . 238
2.8.6 Fusione . . . 239
2.8.7 Fusione nelle stelle . . . 241
2.8.8 Nucleosintesi nelle stelle . . . 242
2.8.9 Fusione in laboratorio . . . 245

3 Fisica subnucleare 247
3.1 Particelle e interazioni . . . 247
3.1.1 Raggi cosmici . . . 248
3.1.2 Raggi cosmici primari . . . 249
3.1.3 Raggi cosmici secondari . . . 250
3.1.4 I mesoni π . . . 252
3.1.5 Le particelle strane . . . 255
3.1.6 I mesoni K . . . 258
3.1.7 Il mesone η . . . 261
3.1.8 Simmetria dell'isospin . . . 262
3.1.9 Gli antibarioni . . . 264
3.1.10 Risonanze adroniche . . . 265
3.1.11 Risonanze barioniche . . . 267
3.1.12 Risonanze mesoniche . . . 269
3.2 Modello statico a quark . . . 271
3.2.1 Modello a quark . . . 272
3.2.2 Mesoni e barioni nel modello a quark . . . 274
3.2.3 Momenti magnetici dei barioni . . . 276
3.2.4 Le masse degli adroni . . . 278
3.2.5 Colore dei quark . . . 282
3.3 Interazioni deboli . . . 284
3.3.1 Decadimento del muone . . . 284
3.3.2 Il propagatore dell'interazione debole . . . 286
3.3.3 Decadimenti leptonici dei mesoni . . . 287
3.3.4 La Parità non si conserva . . . 290
3.3.5 Decadimenti semileptonici . . . 292
3.3.6 L'angolo di Cabibbo . . . 294
3.3.7 Decadimenti non leptonici . . . 295

3.3.8 Decadimenti dei mesoni K neutri . . . 296
3.3.9 Il quarto quark . . . 300
3.3.10 Violazione della simmetria CP . . . 303
3.3.11 Altri quark . . . 305
3.4 Modello dinamico a quark . . . 307
3.4.1 Diffusione inelastica . . . 309
3.4.2 Diffusione fortemente inelastica elettrone-nucleone . . . 311
3.4.3 Modello a partoni . . . 312
3.4.4 Carica elettrica dei partoni . . . 316
3.4.5 Diffusione fortemente inelastica neutrino-nucleone . . . 318
3.4.6 Densità di quark e antiquark . . . 320
3.5 Interazioni fermione-antifermione . . . 323
3.5.1 Annichilazione e^+e^- . . . 323
3.5.2 Il quarkonio . . . 325
3.5.3 Annichilazione $e^+e^- \rightarrow$ adroni . . . 327
3.5.4 Annichilazione quark-antiquark . . . 328
3.6 Interazioni adroniche . . . 330
3.6.1 Fenomenologia delle interazioni adroniche . . . 330
3.6.2 La cromodinamica quantistica . . . 335
3.6.3 La "costante" di accoppiamento della QCD . . . 339
3.6.4 Funzioni di struttura . . . 342
3.6.5 Annichilazione elettrone-positrone in adroni . . . 345
3.6.6 Produzione di jet adronici nell'annichilazione e^+e^- . . . 347
3.6.7 Collisioni tra adroni: processi Drell-Yan . . . 351
3.6.8 Collisioni tra adroni: produzione di jet . . . 353
3.6.9 Collisioni tra adroni: produzione di fotoni . . . 357
3.6.10 La misura di α_s . . . 358
3.7 Interazione elettrodebole . . . 359
3.7.1 Isospin e ipercarica debole . . . 360
3.7.2 Angolo di Weinberg . . . 363
3.7.3 Interazioni dei neutrini . . . 364
3.7.4 Scoperta dei bosoni $W^\pm$ e Z^0 . . . 366
3.7.5 Proprietà dei bosoni $W^\pm$ e Z^0 . . . 368
3.8 Il Modello Standard . . . 370
3.8.1 Invarianza di gauge . . . 371
3.8.2 Il campo di Higgs . . . 373
3.8.3 Il meccanisco di Higgs . . . 376
3.8.4 La simmetria del colore . . . 377
3.8.5 La massa dei fermioni . . . 378
3.8.6 I parametri del Modello Standard . . . 380
3.9 Oscillazioni di neutrini . . . 382
3.9.1 La massa dei neutrini . . . 382
3.9.2 Oscillazioni nel vuoto . . . 383
3.9.3 Oscillazioni nella materia . . . 387

3.9.4 Neutrini solari . . . 388
3.9.5 Neutrini da reattori . . . 391
3.9.6 Neutrini atmosferici . . . 392
3.9.7 Neutrini da acceleratori . . . 394
3.9.8 I parametri delle oscillazioni . . . 395
3.10 Universo e particelle . . . 397
3.10.1 L'Universo in espansione . . . 397
3.10.2 La radiazione cosmica di fondo . . . 400
3.10.3 L'energia del vuoto . . . 402
3.10.4 Il modello del Big-Bang . . . 403
3.10.5 La nucleosintesi primordiale . . . 404

4 Appendici **408**
4.1 Radiazione del corpo nero . . . 408
4.2 Richiami di relatività ristretta . . . 410
4.2.1 Il principio di relatività . . . 410
4.2.2 Le trasformazioni di Lorentz . . . 412
4.2.3 Quadrivettori . . . 414
4.2.4 Trasformazione della velocità . . . 415
4.2.5 Il quadrivettore velocità . . . 415
4.2.6 Il quadrivettore quantità di moto . . . 416
4.2.7 Il quadrivettore accelerazione . . . 417
4.2.8 Il quadrivettore forza . . . 417
4.2.9 Il tensore elettromagnetico . . . 420
4.3 L'esperimento di Michelson e Morley . . . 421
4.4 Il paradosso dei gemelli . . . 422
4.5 La precessione di Thomas . . . 424
4.6 Cinematica relativistica . . . 426
4.6.1 Trasformazioni delle variabili . . . 426
4.6.2 Energia di soglia di una reazione . . . 427
4.6.3 Urto elastico . . . 428
4.6.4 Energia trasferita in una collisione . . . 429
4.6.5 Decadimento . . . 430
4.7 Richiami di elettromagnetismo . . . 432
4.7.1 Energia irraggiata . . . 432
4.7.2 Il potenziale vettore . . . 434
4.8 Sviluppo in multipoli del campo elettromagnetico . . . 436
4.8.1 Potenziale di dipolo elettrico . . . 436
4.8.2 Potenziale di dipolo magnetico . . . 437
4.8.3 Potenziale di quadrupolo elettrico . . . 438
4.8.4 Sviluppo in autofunzioni del momento angolare . . . 438
4.8.5 Momenti di multipolo del campo di radiazione . . . 440
4.9 Equazione di Schrödinger in una dimensione . . . 441
4.9.1 Particella libera . . . 441

4.9.2 Gradino di potenziale . . . 442
4.9.3 Barriera di potenziale . . . 443
4.9.4 Buca di potenziale infinita . . . 444
4.9.5 Buca di potenziale finita . . . 445
4.9.6 Oscillatore armonico . . . 446
4.10 Il momento angolare . . . 449
4.10.1 Rotazioni . . . 449
4.10.2 Autovalori del momento angolare . . . 450
4.10.3 Rappresentazione dei generatori . . . 452
4.10.4 Somma dei momenti angolari . . . 453
4.10.5 I coefficienti di Clebsch-Gordan . . . 454
4.10.6 Matrici di rotazione . . . 456
4.10.7 Le armoniche sferiche . . . 458
4.11 Equazione di Schrödinger in tre dimensioni . . . 460
4.11.1 Potenziale centrale . . . 461
4.11.2 Particella libera . . . 462
4.11.3 Sviluppo di un'onda piana in autofunzioni sferiche . . . 463
4.11.4 Buca di potenziale infinita . . . 464
4.11.5 Buca di potenziale finita . . . 465
4.11.6 Potenziale armonico . . . 466
4.11.7 Potenziale coulombiano . . . 468
4.12 Simmetrie unitarie . . . 471
4.12.1 SU(2) . . . 473
4.12.2 SU(3) . . . 475
4.12.3 Stati coniugati . . . 475
4.13 L'interazione elettromagnetica . . . 476
4.13.1 Hamiltoniana di interazione . . . 476
4.13.2 Quantizzazione del campo . . . 477
4.14 Legge di decadimento . . . 479
4.15 Probabilità di transizione . . . 481
4.16 Densità dello spazio delle fasi . . . 483
4.17 Il modello atomico di Thomas-Fermi . . . 485
4.18 Equazioni quantistiche relativistiche . . . 488
4.18.1 Equazione di Klein-Gordon . . . 489
4.18.2 Equazione di Dirac . . . 490
4.18.3 Soluzioni di particella libera . . . 491
4.18.4 Limite non relativistico dell'equazione di Dirac . . . 495
4.18.5 Matrici gamma . . . 496
4.18.6 Trasformazioni degli autostati . . . 497
4.18.7 Autostati di elicità . . . 500
4.18.8 Soluzioni per massa nulla . . . 502
4.19 Teoria delle perturbazioni . . . 503
4.19.1 Il propagatore . . . 503
4.19.2 I grafici di Feynman . . . 505

4.20 Correzioni radiative . . . 508
4.20.1 La polarizzazione del vuoto . . . 510
4.20.2 La "costante" di accoppiamento . . . 511
4.21 Calcolo di alcuni processi elementari . . . 512
4.21.1 Spazio delle fasi invariante . . . 512
4.21.2 Processi $a\ b \to c\ d$ . . . 514
4.21.3 Il decadimento del muone . . . 524
4.22 Il fattore giromagnetico dei leptoni . . . 526
4.22.1 Il fattore giromagnetico . . . 526
4.22.2 La misura di $g-2$ dell'elettrone . . . 530
4.22.3 La misura di $g-2$ del muone . . . 532
4.23 La supersimmetria . . . 535
4.23.1 Le particelle supersimmetriche . . . 537
4.23.2 Il modello supersimmetrico minimale . . . 539
4.23.3 Fenomenologia del MSSM . . . 541
4.24 Premi Nobel citati nel testo . . . 544
4.25 Esercizi . . . 547
4.26 Risposte . . . 562
4.27 Tavole . . . 569

Chapter 1

Metodologie della fisica nucleare e subnucleare

1.1 Introduzione

La fisica è lo studio dei fenomeni della natura e della loro interpretazione in base a leggi il più semplici e generali possibile. Per questo si cerca di interpretare i fenomeni macroscopici come una composizione e successione di *interazioni* a livello microscopico tra *costituenti elementari*.

Ad esempio, la *legge delle proporzioni chimiche* di Dalton stabilì, all'inizio dell'800, che le reazioni chimiche avvengono rispettando semplici leggi di combinazione: due proporzioni di idrogeno combinate con una di ossigeno ne formano due di acqua, $2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$, che interpretato come fenomeno microscopico implica che le quantità in gioco dei singoli elementi sono proporzionali ad alcune quantità elementari, cioè che la massa di una *mole* è proporzionale alla masse di una *molecola*, ovvero

$$M(grammo\ molecola) = N \times M(molecola)$$

Un esempio tratto da fenomeni di conduzione elettrica è la *legge di Faraday*, della metà dell'800, per cui in elettrolisi la formazione su un elettrodo di una mole di un elemento monovalente corrisponde ad una quantità fissa, $F = 96500\ C$, di carica elettrica. Combinando questa osservazione con la precedente abbiamo per la *costante di Faraday*

$$F = 96500\ C/mole = N \times e$$

dove e è la *carica elettrica elementare*.

Un altro esempio è la legge di Boyle. Per una mole di un gas ideale $pV = RT$. Sulla base degli studi di termodinamica statistica di Maxwell, Boltzmann e Planck della seconda metà dell'800, sappiamo che la costante dei gas ideali R è

$$R = N \times k$$

dove k è la costante di Boltzmann.

La quantità N che interviene in questi tre esempi di leggi della chimica, elettricità e meccanica statitistica è la *Costante di Avogadro* il cui valore venne determinato sperimentalmente con precisione solo nel '900 studiando molti diversi fenomeni

$$N_\circ = 6.02\ 10^{23}\ mole^{-1}$$

e possiamo definire la carica elettrica elementare

$$e = F/N_\circ = 1.60\ 10^{-19}\ C$$

1.1.1 Il protone

Per il sistema atomico più semplice, l'idrogeno, una mole ha la massa di 1 grammo. La massa dell'atomo di idrogeno è quindi $m_H = 1\ grammo/N_\circ$

$$m_H = 1.66\ 10^{-27}\ kg$$

In queste lezioni useremo come unità di misura il *sistema MKSA* che è quello ufficiale dell'Unione Europea. Per i sistemi microscopici è però più conveniente usare come unità di misura di energia l'*elettronVolt*, $eV = 1.60\ 10^{-19}\ J$. Sfruttando l'equivalenza tra energia e massa espressa dalla relazione di Einstein, $E = mc^2$, useremo come unità di massa eV/c^2 (o i suoi multipli), dove c è la velocità della luce del vuoto

$$c = 3.00\ 10^8\ m\ s^{-1}$$

In queste unità la massa dell'atomo di idrogeno è

$$m_H c^2 = 1.66\ 10^{-27}\ kg \times 9\ 10^{16}\ m^2 s^{-2} = 1.5\ 10^{-10}\ J = \frac{1.5\ 10^{-10}\ J}{1.6\ 10^{-19}} = 0.94\ 10^9\ eV$$

Poiché, come vedremo, l'atomo di idrogeno è uno stato legato protone-elettrone e la massa dell'elettrone è molto minore di quella del protone e l'energia di legame è trascurabile, questa è con buona approssimazione la massa del protone

$$m_p = 938\ MeV/c^2$$

Il protone è il *primo* (dal greco $\pi\rho\omega\tau o\varsigma$) costituente elementare. È caratterizzato da carica elettrica $+e$ e massa m_p.

1.1.2 L'elettrone

Alla fine dell'800 lo studio di molti fenomeni ha indicato che le sostanze contengono particelle con carica elettrica negativa e che queste possono essere emesse come conseguenza di diverse sollecitazioni elettriche o termiche o per esposizione a radiazione elettromagnetica. Le osservazioni erano fatte con gas molto rarefatti ed erano rese possibili dal perfezionamento delle tecniche di vuoto.

Nei suoi studi sulla formazione e propagazione di onde elettromagnetiche, Heinrich Hertz osservò che le scariche elettriche inducevano il passaggio di corrente in un circuito aperto. William Crookes osservò che in un tubo contente un gas molto rarefatto dove si stabilisce una differenza di potenziale tra due elettrodi, si forma nei pressi del catodo una scarica a bagliore che si propaga verso l'anodo e che ha intensità che dipende dalla differenza di potenziale e dalla pressione del gas.

In entrambe i casi si osservò che il fenomeno non dipendeva né dal tipo di gas né dal materiale degli elettrodi. Inoltre il passaggio di corrente veniva fortemente influenzato dalla presenza di diaframmi nel tubo a vuoto o da campi magnetici. Ben presto si chiarì che questo fenomeno, chiamato emissione di *raggi catodici*, era dovuto all'emissione di cariche negative dal catodo e che queste non erano ioni negativi del catodo.

Nel 1897 Joseph Thomson [1] chiarì la natura di queste particelle e ne misurò il rapporto tra carica elettrica e massa. Il metodo sperimentale di Thomson è illustrato nella Fig.1.1. In un tubo a raggi catodici, per effetto di un forte campo elettrico, le particelle negative vengono emesse dal catodo C e accelerate verso l'anodo A in cui vi è un foro. Le particelle che attraversano il foro si muovono di moto rettilineo uniforme e il loro passaggio viene segnalato dalla fluorescenza prodotta sulla parte terminale del tubo. Questo permette di conoscere la traiettoria tra il foro e lo schermo. Lungo il percorso le particelle attraversano una regione in cui si può stabilire un campo elettrico uniforme normale alla direzione di propagazione e un campo magnetico normale sia a questa che al campo elettrico. Chiamiamo x la direzione di propagazione, y la direzione del campo elettrico, z quella del campo magnetico e ℓ la lunghezza della zona in cui è presente il campo elettrico.

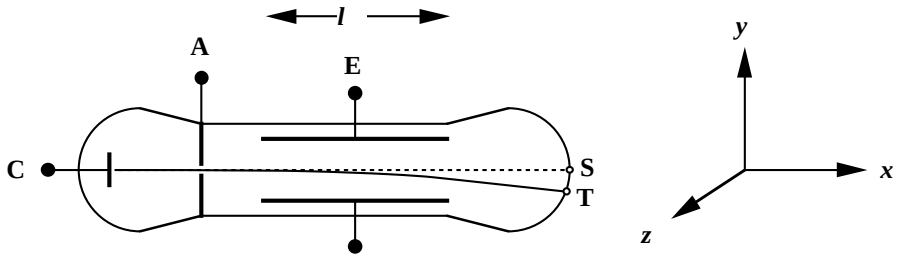


Figure 1.1: Esperimento di J.J.Thomson

- In assenza di campo elettrico e magnetico le particelle vanno di moto rettilineo con velocità v_x costante ma non nota perché vengono emessi dal catodo con velocità variabile

$$v_x = \frac{\ell}{\Delta t}$$

Le particelle cariche arrivano nel punto S dello schermo.

[1] premio Nobel per la fisica nel 1906

- In presenza di campo elettrico, E_y, le particelle di carica e acquistano una componente della velocità $v_y = (eE_y/m)\Delta t$, e quindi lo spostamento dalla traiettoria lineare nel tratto ℓ è

$$\Delta y = \frac{eE_y}{2m}\ (\Delta t)^2 = \frac{eE_y}{2m}\ \frac{\ell^2}{v_x^2}$$

  Le particelle cariche arrivano nel punto T dello schermo.

- Per valutare la velocità v_x Thomson applicò un campo magnetico B_z in modo che la forza risultante, $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, fosse nulla e le particelle cariche arrivassero nel punto S dello schermo

$$F_y = e(E_y - v_x\ B_z) = 0 \qquad\qquad v_x = \frac{E_y}{B_z}$$

- Il valore del rapporto tra la carica e la massa dell'elettrone si ottiene quindi dalla misura dello spostamento Δy relativo ai due punti S e T sullo schermo

$$\Delta y = \frac{1}{2}\ \frac{e}{m}\ \frac{\ell^2\ B_z^2}{E_y}$$

Thomson verificò che il valore e/m non dipende dal gas nel tubo a raggi catodici, né dal materiale del catodo. Quindi stabilì che questa è una particella elementare di carica negativa contenuta nelle varie sostanze che venne chiamata *elettrone* (dal nome greco dell'ambra, $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho o\nu$) come quantità elementare di carica negativa.

Il valore di e/m misurato da Thomson

$$\frac{e}{m} = 1.76\ 10^{11}\ C\ kg^{-1}$$

era straordinariamente simile ad un'altra quantità misurata pochi mesi prima da Pieter Zeeman [2] studiando gli spettri di emissione degli atomi in presenza di campo magnetico. Zeeman aveva osservato che, quando si acccendeva un intenso campo magnetico, le righe di emissione di una sostanza venivano suddivise in più righe e che la separazione in frequenza era proporzionale all'intensità del campo.

Facciamo l'ipotesi che le sostanze contengano elettroni. Quando queste sono sottoposte ad una sollecitazione termica, o a una scarica elettrica, gli elettroni sono sollecitati ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio. Al primo ordine dello sviluppo del potenziale che lega gli elettroni, questa sarà un'oscillazione armonica con frequenza propria $\omega_\circ$. Il sistema si comporta come un dipolo oscillante ed emette radiazione con la stessa frequenza. Possiamo rappresentare il moto oscillatorio come la sovrapposizione di due moti circolari con frequenza angolare $+\omega_\circ$ e $-\omega_\circ$. In presenza di campo magnetico, alla forza di richiamo $-k\vec{r}$ si sovrappone la forza di Lorentz $e\vec{v} \wedge \vec{B}$. L'equazione del moto nel piano $x - y$ normale alla direzione di $\vec{B}$ è

$$m\ \ddot{x} = -kx + eB\ \dot{y} \qquad\qquad m\ \ddot{y} = -ky - eB\ \dot{x}$$

[2] premio Nobel per la fisica nel 1902

che, per un moto oscillatorio, ha soluzione

$$\omega^2 + 2\,\omega^*\omega - \omega_\circ^2 = 0 \qquad\qquad \omega_\circ^2 = \frac{k}{m} \qquad\qquad \omega^* = \frac{eB}{2m}$$

e, per $\omega^* \ll \omega_\circ$,

$$\omega = \omega_\circ \pm \omega^*$$

Quindi l'oscillatore emette su due frequenze $\omega_\circ + \omega^*$ e $\omega_\circ - \omega^*$ e la differenza $\Delta\omega = eB/m$ è proporzionale al rapporto e/m.

Poiché il rapporto e/m misurato nell'esperimento di Thomson e nell'effetto Zeeman è molto maggiore del rapporto tra carica elettrica e massa depositata sugli elettrodi nel caso di elettrolisi di sostanze elettricamente neutre, si conclude che la massa dell'elettrone è molto minore di quella degli atomi

$$\frac{e}{m_e} \gg \frac{e}{m_a} \qquad \Rightarrow \qquad m_e \ll m_a$$

La carica dell'elettrone

La prima misura sufficientemente precisa della carica elementare fu fatta nel 1909 da Robert Millikan [3] raffinando un metodo utilizzato da Thomson per studiare il comportamento di gocce elettricamente cariche formate nel vapore di acqua. Millikan osservava col microscopio il moto di gocce di olio che si caricavano elettricamente per attrito con l'aria (Fig.1.2).

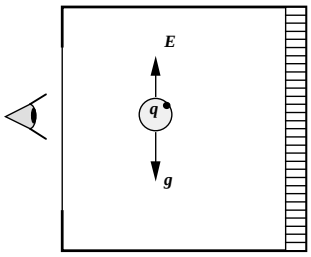


Figure 1.2: Esperimento di Millikan

- In assenza di campo elettrico le gocce si muovono di moto uniforme per effetto della gravità. Assumendo che siano sferette di raggio r e densità ρ e che η sia il coefficiente di viscosità, il moto avviene con velocità costante v_0

$$F = \frac{4\pi r^3}{3}\,\rho\,g - 6\pi\,\eta\,r\,v_0 = 0$$

  Misurando la velocità di caduta si ottiene il raggio r

$$r = 3\,\eta^{1/2}\left(\frac{v_0}{2\rho g}\right)^{1/2}$$

[3] premio Nobel per la fisica nel 1923

- Se durante la caduta si accende un campo elettrico diretto lungo la verticale, la velocità di caduta di una goccia con carica elettrica q cambia

$$F = \frac{4\pi r^3}{3}\ \rho\ g - 6\pi\ \eta\ r\ v_1 - qE = 0$$

- Da queste relazioni si ottiene

$$qE = 6\pi\ \eta\ r\ (v_1 - v_0) = 18\pi\ \eta^{3/2} \left(\frac{v_0}{2\rho g}\right)^{1/2} (v_1 - v_0)$$

Millikan osservò che tutte le cariche misurate erano *multipli interi di una carica elementare* "e" e ottenne per "e" un valore entro l'1% uguale a quello noto oggi.

Dalle misure di Thomson e di Millikan conosciamo quindi la massa dell'elettrone

$$m_e = 0.511\ MeV/c^2 \qquad \frac{m_e}{m_p} = \frac{1}{1836}$$

1.1.3 Il fotone

Alla fine dell'800 l'interpretazione di due fenomeni, l'emissione di radiazione del corpo nero e l'effetto fotoelettrico, richiesero una profonda revisione delle leggi dell'elettromagnetismo e della meccanica.

Spettro del corpo nero

Lo spettro di emissione del corpo nero è trattato nell'appendice 4.1. Consideriamo una cavità mantenuta a temperatura T in cui è praticato un piccolo foro, per questo sistema si ha:

- l'energia irraggiata per unità di superficie e per unità di frequenza, il *potere emissivo specifico*, è proporzionale alla *densità di energia per unità di frequenza* nella cavità
$$e(\nu, T) = \frac{c}{4}\ u(\nu, T)$$
- la radiazione all'interno è in equilibrio con le pareti della cavità;
- la densità di energia per unità di frequenza è espressa dalla *legge di Wien* [4]
$$u(\nu, T) = \nu^3\ F(\nu/T)$$
dove $F(\nu/T)$ è una funzione universale che dipende solo dal rapporto tra frequenza e temperatura.

La forma della funzione $u(\nu, T)$ è stata derivata sulla base della meccanica statistica classica con le ipotesi seguenti

[4] Wilhelm Wien, premio Nobel per la fisica nel 1911

- nella cavità, all'equilibrio termico, le *onde elettromagnetiche stazionarie* hanno vettore d'onda $k_i \ell_i = 2\pi n$ con n intero ($i = 1, 2, 3$; ℓ_i sono le dimensioni della cavità; $|\vec{k}| = 2\pi\nu/c$);

- per ciascuna proiezione il numero di modi di vibrazione per unità di frequenza è $dn_i = (\ell_i/c)\ d\nu$

- tenendo conto che ci sono due stati di polarizzazione della radiazione, il numero di modi di vibrazione per unità di volume è

$$dn = 2\ \frac{4\pi\nu^2}{c^3}\ d\nu$$

- per il principio di *equipartizione dell'energia* ciascun modo di vibrazione contribuisce con due gradi di libertà e quindi con un *valore medio di energia* $\langle E \rangle = kT$

Ne deriva che la densità di energia specifica è

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\ kT$$

Questa forma della densità di energia specifica del corpo nero, nota come *formula di Rayleigh* [5]*-Jeans*, non rappresenta i risultati sperimentali a frequenze elevate e diverge ad alta frequenza: la densità di energia, $U(T) = \int u(\nu, T) d\nu$, è infinita. Questo effetto è stato chiamato *catastrofe ultravioletta*.

Nel tentativo di impostare una forma della densità di energia specifica del corpo nero che riproducesse i risultati sperimentali e seguisse le leggi della termodinamica, Planck fu guidato dalle osservazioni di Hertz sulla emissione e assorbimento di radiazione elettromagnetica da parte di dipoli oscillanti. Le ipotesi di Planck sono

- le pareti della cavità in equilibrio termico con la radiazione sono rappresentate come un insieme di oscillatori armonici lineari con frequenze pari a quelle della radiazione elettromagnetica;

- in funzione delle variabili coniugate p e x l'energia meccanica di ciascun ocillatore di massa m è

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

- secondo le leggi della meccanica statistica il numero di oscillatori nell'intervallo $dpdx$ in equilibrio a temperatura T è

$$d^2n = C\ e^{-E/kT}\ dp\ dx \qquad\qquad C = costante$$

[5] John Strutt: Lord Rayleigh, premio Nobel per la fisica nel 1904

- se gli oscillatori sono indipendenti, di modo che si conserva l'energia di ciascuno, la relazione $E = costante$ definisce un ellisse nel piano $p - x$ di area

$$A = \int dp\ dx = \pi\ p_{max}\ x_{max} = \pi\ (2mE)^{1/2}\ (2E/m\omega^2)^{1/2} = \frac{E}{\nu}$$

- se si suddivide il piano $p-x$ in anelli concentrici della stessa area h (Fig.1.3), il $j-$esimo anello contiene $N_j = D\ e^{-jh\nu/kT}$ oscillatori di energia $E_j = jh\nu$, $(j = 0, 1, 2, \ldots;\ D = costante)$;

- l'*energia media* per oscillatore, $\langle E\rangle = \sum_j E_j\ N_j / \sum_j N_j$, è uguale all'energia media per modo di vibrazione della radiazione in equilibrio termico nella cavità.

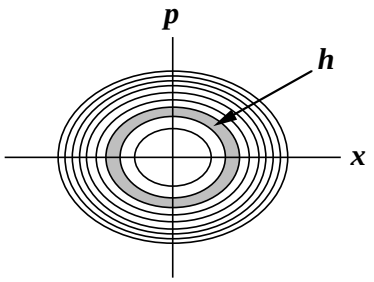


Figure 1.3: Quantizzazione dell'oscillatore armonico

Ponendo $z = h\nu/kT$ si ha

$$\sum_0^\infty jh\nu\ e^{-jz} = h\nu\ e^{-z}\ (1 + 2e^{-z} + 3e^{-2z} + \ldots) = h\nu\ e^{-z}\ (1 - e^{-z})^{-2}$$

$$\sum_0^\infty e^{-jz} = (1 + e^{-z} + e^{-2z} + \ldots) = (1 - e^{-z})^{-1}$$

$$\langle E\rangle = \frac{h\nu\ e^{-h\nu/kT}}{1 - e^{-h\nu/kT}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

La formula di Planck per la densità di energia specifica è

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3}\ \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

La forma della funzione soddisfa la legge di Wien. Inoltre la formula ottenuta da Planck [6] riproduceva bene i dati sperimentali: dal confronto con questi ottenne il valore della *costante di Planck*, $h = 6.55\ 10^{-34}\ J\ s$, che è in buon accordo con il valore noto oggi

$$h = 6.626076 \pm 0.000004\ 10^{-34}\ J\ s$$

[6] premio Nobel per la fisica nel 1918

Nel limite in cui la costante di Planck è *piccola*, $h \to 0$, si ottiene la formula classica di Rayleigh-Jeans

$$\lim_{h\to 0} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1} = \frac{h\nu}{1+h\nu/kT+\ldots-1} = kT$$

Il risultato presentato da Planck nel 1900 era assolutamente sorprendente: gli oscillatori armonici in equilibrio termico con la radiazione elettromagnetica scambiano energia solo sotto forma di multipli interi di un *quanto di energia* pari a $h\nu$. Ne risulta che l'energia di un oscillatore armonico lineare non può variare in modo continuo, ma può solo avere valori *quantizzati* multipli della frequenza propria ν moltiplicata per la costante di Planck. Le variazioni discrete di energia tra due stati corrispondono all'emissione o all'assorbimento di *quanti di radiazione elettromagnetica* di energia $h\nu$ che sono chiamati *fotoni*.

Effetto fotoelettrico

L'emissione di cariche elettriche negative da materiali esposti a radiazione ultravioletta fu osservata da Hertz nel 1887. Ulteriori misure chiarirono che in un sistema costituito da due elettrodi con differenza di potenziale ΔV

- l'esposizione alla luce di un elettrodo induce il passaggio di corrente;
- questo avviene solo per una polarità, quando l'elettrodo esposto ha carica negativa;
- le cariche raccolte all'anodo non sono ioni negativi del catodo.

A seguito della scoperta dell'elettrone ci si convinse che il passaggio di corrente era dovuto all'estrazione di elettroni provocata dall'interazione della luce sul catodo.

Una serie di misure più raffinate fu eseguita da Philipp von Lenard [7] nel 1900 utilizzando un tubo a raggi catodici. L'elettrodo C è esposto a radiazione elettromagnetica e le cariche emesse possono essere accelerate dal potenziale variabile V_C tra C e l'elettrodo A. Nella zona a valle di A sono opportunamente posizionati alcuni elettrodi raccoglitori di carica, R, e in questa zona si può produrre un campo magnetico $\vec{B}$ normale alla linea di volo e quindi si può misurare l'impulso delle particelle. Con questo strumento (Fig.1.4) Lenard misurò il rapporto tra carica elettrica e massa dei portatori di carica negativa e lo trovò in accordo con il valore misurato da Thomson: sono elettroni. Inoltre osservò che

- si ha passaggio di corrente solo per tensioni V_C minori di $1 \div 2\ V$;
- per intensità di luce costante, la corrente aumenta da questo valore fino a $V_C \simeq 0$ e si mantiene costante per valori negativi;
- l'intensità di corrente dipende dall'intensità della luce, ma *non* dipende dalla frequenza;

[7] premio Nobel per la fisica nel 1905

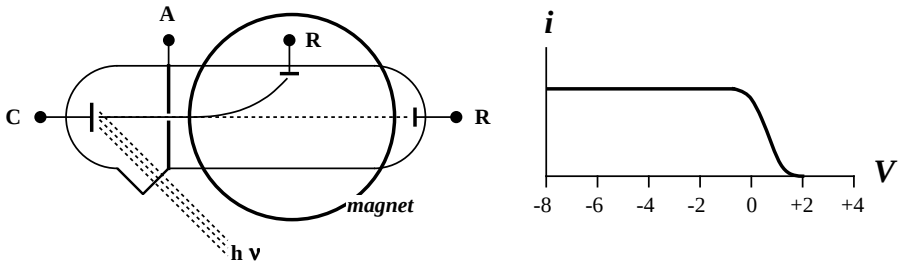


Figure 1.4: Esperimento di Lenard sull'effetto fotoelettrico

- l'energia cinetica degli elettroni emessi dal catodo *non* dipende dalla intensità della luce, ma solo dalla frequenza;
- la relazione tra energia cinetica e frequenza è

$$E_c = h(\nu - \nu_o)$$

Questi risultati vennero raffinati da misure più precise effettuate alcuni anni dopo da Richardson e Compton, e da Millikan. Ma già nel 1905 Albert Einstein [8] diede una spiegazione semplice dell'effetto fotoelettrico basata sui quanti di radiazione di Planck considerando il fotone non come un modo di vibrazione del campo elettromagnetico, ma come una particella

- la radiazione elettromagnetica di frequenza ν è formata da fotoni di energia $E = h\nu$;
- nell'interazione i fotoni cedono tutta l'energia agli elettroni legati nei materiali;
- parte dell'energia, eV_o, è spesa per il lavoro di estrazione degli elettroni dal materiale;
- il resto è ceduta come energia cinetica agli elettroni liberi;
- la conservazione dell'energia è $h\nu = eV_o + E_c$.

Pochi anni dopo Millikan misurò il coefficiente h della legge dell'effetto fotoelettrico, $h = 6.56\ 10^{-34}\ J\ s$, in ottimo accordo con la determinazione fatta da Planck.

I raggi X

Lavorando con un tubo a raggi catodici, nel 1895 Wilhelm Röngten [9] fece un'importante scoperta: le pareti del tubo investite dai raggi catodici producevano una radiazione molto penetrante di natura allora sconosciuta che, per questo, chiamò *raggi X*. Osservò inoltre che i raggi X non venivano deflessi da campi magnetici, né rifratti da

[8] premio Nobel per la fisica nel 1921
[9] premio Nobel per la fisica nel 1901

lenti, che producevano ionizzazione e che l'intesità dipendeva dalla densità del materiale posto sul cammino dei raggi catodici. L'osservazione più interessante è che se frapponeva un ostacolo, ad esempio la sua mano, tra la sorgente di raggi X e uno schermo fluorescente, si produceva sullo schermo la *radiografia* dell'ostacolo.

A seguito di molti altri esperimenti si chiarì la natura del fenomeno: gli elettroni attraversando un materiale vengono decelerati dalle interazioni con i nuclei atomici e producono radiazione per frenamento, *brems-strahlung* (capitolo ???). La radiazione ha uno spettro di frequenza continuo e il valore massimo è proporzionale all'energia cinetica degli elettroni, $h\nu_{max} = K_e$.

Nei primi anni del '900 non era chiaro se i raggi X fossero di natura cospuscolare o ondulatoria. Comunque era noto che avevano energia (lunghezza d'onda) molto maggiore (minore) della luce visibile e che, se erano onde, la lunghezza d'onda era confrontabile con le distanze interatomiche nella materia condensata.

Nel 1912 Max von Laue [10], sostenitore dell'interpretazione ondulatoria, dimostrò la possibilità di osservare l'interferenza di raggi X diffusi da materiali. Ulteriori conferme sperimentali furono ottenute da William e Lawrence Bragg [11] che osservarono la diffusione coerente di raggi X da cristalli. In un solido cristallino gli atomi occupano posizioni ad intervalli regolari che formano un reticolo di centri diffusori allineati. La radiazione viene diffusa dagli atomi in tutte le direzioni ma si ha interferenza costruttiva solo nelle direzioni che soddisfano la *condizione di Bragg* come illustrato in Fig.1.5

$$\theta' = \theta \qquad\qquad n\lambda = 2d\sin\theta$$

dove θ è l'angolo tra la direzione dei raggi X e il piano del reticolo, d è la distanza tra i piani e λ è la lunghezza d'onda: la differenza del cammino ottico deve essere pari a due volte un numero intero n di lunghezze d'onda.

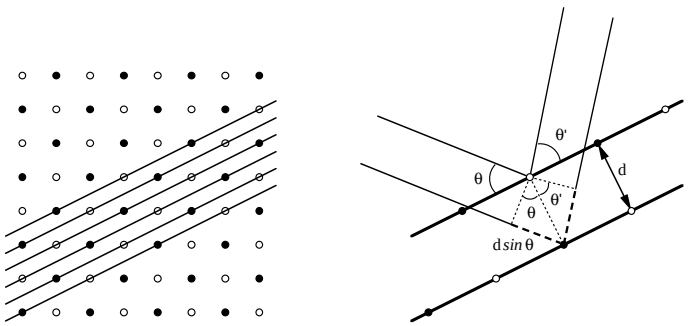


Figure 1.5: Diffrazione di raggi X da un reticolo cristallino

I raggi X di bremsstrahlung hanno uno spettro di frequenza continuo. Nel 1914 Charles Barkla [12] osservò un altro tipo di raggi X che chiamò *characteristic X radiation*. Se un elemento è esposto a raggi X di frequenza ν, oltre alla diffusione dei raggi X della stessa frequenza si osserva anche l'emissione di raggi X di frequenza $\nu_c < \nu$

[10] premio Nobel per la fisica nel 1914
[11] premi Nobel per la fisica nel 1915
[12] premio Nobel per la fisica nel 1917

con valori *discreti* caratteristici del particolare elemento. Barkla e Manne Siegbahn [13] misurarono queste frequenze caratteristiche e osservarono che sono raggruppate in bande, chiamate $K, L, M, \ldots$ con frequenze $\nu_K > \nu_L > \nu_M \ldots$. Studiando l'emissione dei raggi X della banda K di vari elementi, Henry Moseley osservò che la frequenza è una funzione lineare del numero atomico Z, che rappresenta la carica elettrica del nucleo atomico (capitolo ???). Questo permise di riordinare e completare la tabella periodica degli elementi di Mendeleev.

L'effetto Compton

Studiando la diffusione di raggi X a diversi angoli, nel 1922 Arthur Compton [14] osservò oltre alla fluorescenza, cioè emissione di radiazione della stessa lunghezza d'onda λ, l'emissione di raggi X di lunghezza d'onda maggiore, λ', e che la differenza dipendeva solo dall'angolo

$$\lambda' - \lambda = \lambda_e(1 - \cos\theta)$$

osservò inoltre che λ_e è una costante indipendente dalla particolare sostanza investita dai raggi X e che, diminuendo la lunghezza d'onda λ l'intensità della radiazione diffusa aumenta rispetto a quella di fluorescenza (Fig.4.28).

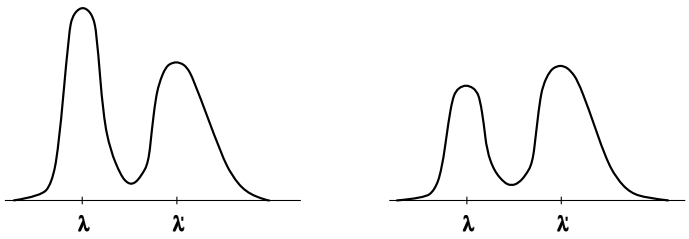


Figure 1.6: Spettro dell'effetto Compton, lo spettro a destra si riferisce a raggi X di lunghezza d'onda minore (energia maggiore)

Al tempo della scoperta di Compton era ancora vivo il dibattito tra sostenitori dell'interpretazione corpuscolare o ondulatoria dei raggi X anche se le evidenze sperimentali sulla interferenza, diffrazione e polarizzazione dei raggi X erano chiaramente a favore della seconda. Ma Compton dimostrò che questo fenomeno si poteva spiegare solo con la prima come un *urto elastico* tra raggi X di energia $E = h\nu = hc/\lambda$ e quantità di moto $p = h\nu/c = h/\lambda$ e un elettrone atomico. Applicando le leggi della meccanica relativistica si ottiene la legge di diffusione di Compton (capitolo ???) e il valore della costante λ_e in accordo con i risultati delle misure. $\lambda_e = h/m_e c = 2.4\ 10^{-12}\ m$ è una costante universale detta *lunghezza d'onda Compton dell'elettrone.*

[13] premio Nobel per la fisica nel 1924
[14] premio Nobel per la fisica nel 1927

1.1.4 Il modello atomico di Bohr

I materiali a temperatura T irraggiano energia termica con uno spettro continuo. Invece si è osservato che la maggior parte degli elementi sotto forma di gas una volta eccitati emettono radiazione sotto forma di righe discrete. Inoltre, a partire dalla scoperta di Johann Balmer del 1885 sulla regolarità delle righe di emissione dell'idrogeno, si è accumulata una enorme quantità di informazioni che dimostrano che le frequenze delle righe spettrali degli elementi implicano l'esistenza di una *struttura semplice*.

Queste evidenze intrigarono a lungo i fisici e un passo importante fu fatto nel 1911 da Ernest Rutherford che dimostrò sperimentalmente (capitolo ???) che un sistema atomico è costituito da uno stato legato di un nucleo di carica positiva circondato da una distribuzione di carica negativa, gli elettroni, e che inoltre le dimensioni spaziali del nucleo sono molto più piccole dell'estensione della distribuzione di carica negativa, cioè che il campo elettrico del nucleo si può trattare con buona approssimazione come il campo coulombiano generato da una carica puntiforme.

Sulla base di questa evidenza e nell'intento di spiegare le regolarità degli spettri degli elementi, Niels Bohr [15] nel 1913 propose un modello atomico che introdusse profonde innovazioni nel modo di interpretare la struttura atomica. Trattiamo in modo semplificato il modello dell'atomo di idrogeno per introdurre alcune quantità e grandezze fisiche importanti per il seguito. Le ipotesi di base sono

- l'atomo di idrogeno è costituito da un protone e un elettrone *puntiformi* legati dal potenziale coulombiano;
- la massa del protone è molto maggiore di quella dell'elettrone per cui il baricentro del sistema è essenzialmente il protone;
- l'atomo è in uno *stato stazionario*, cioè, contrariamente a quanto avverrebbe per un sistema planetario in meccanica classica, le cariche in moto accelerato non irraggiano energia;
- quindi l'energia meccanica è conservata.

Consideriamo la massa ridotta del sistema $m = (m_e m_p)/(m_e + m_p) \simeq m_e$. La traiettoria dell'elettrone (la particella leggera) è un ellisse. Semplifichiamo il problema considerando una circonferenza di raggio r percorsa con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante. La forza coulombiana è il prodotto massa $\times$ accelerazione centripeta

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o\, r^2} = m\ \omega^2\ r$$

La conservazione di energia e momento angolare ammette un continuo di soluzioni

$$E = \frac{1}{2}\ m\ \omega^2\ r^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o\, r} = -\frac{1}{2}\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o\, r} = costante$$

[15] premio Nobel per la fisica nel 1922

$$L = m\ \omega\ r^2 = costante$$

Per ottenere soluzioni discrete, seguendo la via di Planck di quantizzazione del momento lineare dell'oscillatore armonico, Bohr introdusse la *quantizzazione del momento angolare*

$$\oint L\ d\phi = n\ h \qquad \Rightarrow \qquad L = n\ h/2\pi = n\ \hbar$$

($n = 1, 2, \ldots$) da cui si ottengono i valori dell'energia e del raggio degli stati stazionari

$$E_n = -\frac{m\ (e^2/4\pi\epsilon_o)^2}{2\ n^2\ \hbar^2} \qquad\qquad r_n = \frac{n^2\ \hbar^2}{m\ e^2/4\pi\epsilon_o}$$

Gli spettri di righe osservati corrispondono alle transizioni tra stati stazionari con emissione (o assorbimento) di radiazione di frequenza $h\nu_{mn} = E_m - E_n$. Introduciamo due quantità costanti che ci saranno utili nel seguito ($\epsilon_o = 8.85\ 10^{-12}\ F/m$, $\hbar c = 1.97\ 10^{-7}\ eV\ m$)

$$costante\ di\ struttura\ fine \qquad\qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o\ \hbar c} = \frac{1}{137}$$

$$raggio\ classico\ dell'elettrone \qquad\qquad r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o\ m_e c^2} = 2.82\ 10^{-15}\ m$$

- La costante di struttura fine è il parametro adimensionale che compare nello sviluppo in serie quando si risolvono i problemi di elettromagnetismo con il metodo delle perturbazioni. Quindi $\alpha \ll 1$ garantisce che i calcoli approssimati sono di solito piuttosto precisi.

- Il raggio classico dell'elettrone è quello di una sfera carica che ha energia elettrostatica pari alla massa dell'elettrone, $m_e c^2$. In effetti sappiamo che questo *non* è il raggio dell'elettrone perché nessun esperimento ha rivelato che l'elettrone abbia dimensioni finite ad un livello di sensibilità molto più piccolo di r_e.

Usando queste grandezze

$$E_n = -\frac{1}{2n^2}\ \alpha^2\ mc^2 \qquad\qquad r_n = n^2\ \frac{r_e}{\alpha^2}$$

Dalla prima relazione si osserva che la velocità dell'elettrone è $v = \alpha c/n \ll c$: questo giustifica l'uso della meccanica non relativistica.

Per l'atomo di idrogeno nello stato fondamentale, quello col minimo valore del momento angolare ($n = 1$ nel modello di Bohr), si ha

$$raggio\ atomico\ di\ Bohr \qquad\qquad a = 0.53\ 10^{-10}\ m$$

$$energia\ di\ Rydberg \qquad\qquad R = 13.6\ eV$$

in ottimo accordo con il valore sperimentale dell'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno.

Le regole di quantizzazione di Bohr spiegano le regolarità osservate negli spettri di emissione degli atomi. Una importante verifica sperimentale fu fatta nel 1914 da James Franck e Gustav Hertz [16]; l'esperimento è illustrato in Fig.1.7. Elettroni emessi da un filamento alla tensione del catodo sono accelerati verso la griglia dalla differenza di potenziale $\Delta V = V_G - V_C$ e raccolti all'anodo. L'energia cinetica degli elettroni viene variata cambiando ΔV e la differenza di potenziale $V_G - V_A$ è mantenuta costante. Nel tubo vi sono vapori di mercurio ed era noto che il mercurio ha una intensa riga di emissione $\lambda = 2.53\ 10^{-7}\ m$. L'andamento della corrente anodica è mostrato in Fig.1.7: all'inizio aumenta con ΔV perché aumenta il numero di elettroni raccolti, ma poi inizia a diminuire per $\Delta V \simeq 4.9\ V$, aumenta di nuovo fino a $\Delta V \simeq 2 \times 4.9\ V$, poi diminuisce e così via.

Questo vuol dire che gli atomi di mercurio sono trasparenti per elettroni di energia cinetica $< 4.9\ eV$, mentre gli elettroni che raggiungono questo valore perdono energia in collisioni anelastiche con gli atomi e non contribuiscono alla corrente anodica. Se $\Delta V > 4.9\ V$ vengono accelerati di nuovo dopo una prima collisione e la corrente torna ad aumentare, ma possono di nuovo cedere l'energia acquistata quando raggiungono $4.9\ eV$, e così via. Franck e Hertz osservarono che quando ΔV è maggiore di $4.9\ V$, il tubo inizia ad emettere radiazione di lunghezza d'onda $\lambda = \frac{hc}{4.9\ eV} = 2.53\ 10^{-7}\ m$ e intensità che aumenta con la differenza di potenziale. Infatti ora il tubo è pieno di atomi di mercurio eccitati che si diseccitano tornando allo stato iniziale.

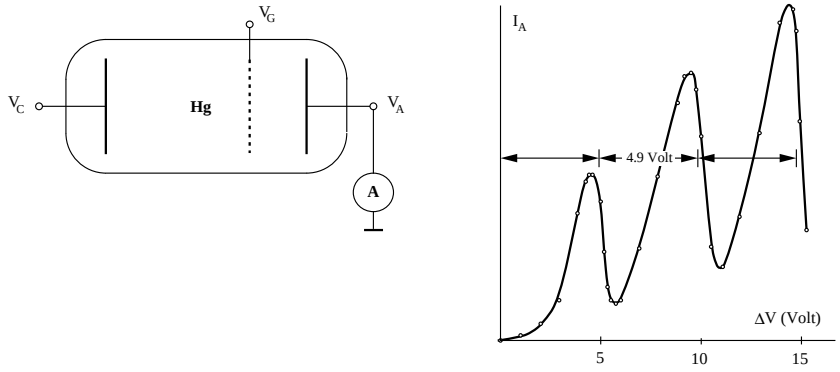


Figure 1.7: Esperimento di Franck e Hertz

Il magnetone di Bohr

L'atomo di idrogeno ha un momento magnetico prodotto dal moto dell'elettrone attorno al baricentro. Consideriamo l'orbita come una spira di raggio r percorsa dalla corrente $i = e/T = e\omega/2\pi$. Il momento magnetico è pari al prodotto della

[16] premi Nobel per la fisica nel 1925

corrente per la superficie della spira (legge di Ampère) e ha direzione opposta ($e < 0$) al momento angolare $\vec{L}$

$$\vec{\mu} = \pi r^2 \frac{e\vec{\omega}}{2\pi} = \frac{e\vec{L}}{2m}$$

Nello stato fondamentale in cui $L = \hbar$ il momento magnetico è pari ad un

$$\textit{magnetone di Bohr} \qquad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 5.8\ 10^{-5}\ eV/T$$

1.1.5 Onde o particelle ?

Nelle interazioni con la materia, i raggi X si comportano sia come onde che danno luogo a fenomeni di interferenza, sia come particelle che fanno urti elastici. D'altra parte, Einstein aveva dimostrato che le leggi dell'elettromagnetismo e quelle della meccanica sono soggette allo stesso principio di relatività e che energia, quantità di moto e massa sono legate dalla relazione $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$. Per la radiazione di lunghezza d'onda λ questa è soddisfatta: $E = hc/\lambda$, $p = h/\lambda$, $m = 0$.

Nel 1922 Louis de Broglie [17] suggerì che anche ad una particella con massa, ad esempio l'elettrone, potesse essere associata una lunghezza d'onda $\lambda = h/p$ detta *lunghezza d'onda di de Broglie*. Questa nuova idea ha importanti conseguenze perché comporta che una particella, come un'onda, non occupa una posizione ben definita nello spazio. Ad esempio, secondo il modello atomico di Bohr la relazione tra quantità di moto dell'elettrone e la sua distanza dal nucleo è $L = pr = n\hbar$. Per l'atomo di idrogeno risulta che la lunghezza d'onda di de Broglie dell'elettrone nello stato di energia più bassa, $n = 1$, è pari alla circonferenza dell'orbita di Bohr $\lambda = \frac{h}{p} = 2\pi a$. In altre parole, il valore della quantità di moto, $p = m_e \alpha c$, definisce la dimensione dell'atomo.

Se l'ipotesi di de Broglie è corretta, si devono poter osservare fenomeni di interferenza con fasci di elettroni come nel caso dei raggi X. La verifica fu fatta nel 1927 con due esperimenti. Il principio dell'esperimento di Clinton Davisson [18] e Lester Germer è illustrato in Fig.1.8. Un filamento emette elettroni che vengono accelerati con una differenza di potenziale ΔV e inviati su un cristallo i cui piani di simmetria possono essere orientati rispetto alla direzione del fascio, e veniva misurato il flusso di elettroni diffuso ad un angolo θ rispetto ai piani del cristallo. La quantità di moto è $p = (2m_e e\Delta V)^{1/2}$ e la lunghezza d'onda corrispondente è $\lambda = \lambda_e(\frac{m_e c^2}{2e\Delta V})^{1/2}$

- se si tiene fisso l'angolo di ossservazione θ e si varia ΔV, cioè si varia la lunghezza d'onda di de Broglie, si osserva che l'intensità degli elettroni diffusi ha massimi e minimi regolari: gli elettroni sono diffusi secondo la legge di Bragg e i massimi corrispondono a $n = \frac{2d\sin\theta}{\lambda}$;
- se poi si fissano i valori dell'angolo che producono i massimi di intensità e si determina λ usando la legge di Bragg, $\lambda = \frac{2d\sin\theta}{n}$, si osserva una relazione lineare tra la lunghezza d'onda e $(\Delta V)^{-1/2}$.

[17] premio Nobel per la fisica nel 1929
[18] premio Nobel per la fisica nel 1937

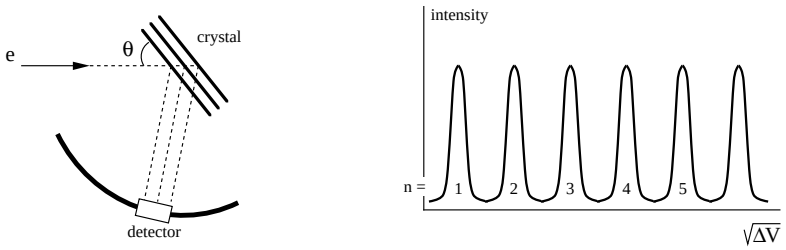


Figure 1.8: Esperimento di Davisson e Germer

L'altro esperimento fu fatto da George Thomson [19] e Reid inviando un fascio di elettroni su un cristallo i cui piani di simmetria possono essere orientati rispetto alla direzione del fascio e osservando l'intensità degli elettroni diffusi su una lastra fotografica posta dietro il cristallo. Le immagini che ottennero sono quelle tipiche del fenomeno di diffrazione in ottica (Fig.1.9).

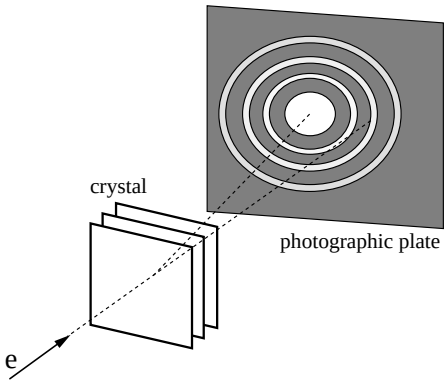


Figure 1.9: Esperimento di Thomson e Reid

I fenomeni brevemente trattati, dalla radiazione di corpo nero al modello atomico di Bohr alla dualità onda-particella, sono alla base della teoria della meccanica quantistica sviluppata da Werner Heisenberg [20], Erwin Schrödinger e Paul Dirac [21], Max Born [22] nella seconda metà degli anni '20.

1.1.6 Lo spin dell'elettrone

Gli stati stazionari dell'atomo di idrogeno si ottengono risolvendo l'equazione di Schrödinger del moto dell'elettrone nel campo coulombiano del protone. Le soluzioni

[19] premio Nobel per la fisica nel 1937
[20] premio Nobel per la fisica nel 1932
[21] premi Nobel per la fisica nel 1933
[22] premio Nobel per la fisica nel 1954

sono ricavate nell'appendice 4.11. Le autofunzioni sono fattorizzate in una funzione radiale $R_{nl}(r)$ e una angolare $Y_{lm}(\theta, \phi)$. Gli autostati dipendono da tre *numeri quantici* interi, $|n, l, m\rangle$: n è il numero quantico principale ($n = 1, 2, \ldots$); l è l'autovalore del momento angolare orbitale $\vec{L}$ in unità $\hbar$ ($l = 0, \ldots, n-1$); m è l'autovalore della sua proiezione lungo un asse. Questa può avere $2l+1$ valori, $m = -l, -l+1, \ldots, +l$.

Le regole di quantizzazione del momento angolare sono trattate nell'appendice 4.10. In generale l'*operatore* momento angolare $\vec{J}$ è caratterizzato dall'avere autovalori $\hbar j$ con $2j + 1 =$ *intero positivo*, quindi j può essere un numero intero o semi-intero. Nel caso del momento angolare orbitale $\vec{L}$ gli autovalori sono interi.

Gli atomi emettono (o assorbono) radiazione elettromagnetica di frequenza ν_{ij} passando da uno stato $|n_i, l_i, m_i\rangle$ ad un altro $|n_j, l_j, m_j\rangle$

$$h\nu_{ij} = |E_i - E_j|$$

Poiché gli autostati di energia sono discreti, gli spettri atomici sono costituiti da *righe*. L'intensità delle righe dipende dalla *probabilità di transizione* tra i due stati. Nel caso di sistemi atomici, in generale sono più probabili le *transizioni di dipolo elettrico* in cui l'intensità è proporzionale alla quarta potenza della frequenza (appendice 4.8). In queste transizioni cambia la *parità* dello stato che è caratterizzata dall'autovalore, pari o dispari, del momento angolare orbitale e quindi l cambia di una unità, $\Delta l = \pm 1$.

L'intensità diminuisce passando dall'ultravioletto al visibile all'infrarosso. Le *serie* di righe osservate nell'emissione degli elementi alcalini sono state chiamate *Sharp*, *Principal*, *Diffuse*, *Fundamental*, caratterizzate da frequenze (e intensità) via via più piccole. In spettroscopia si usa una notazione di origine storica che associa lo stato di momento angolare alle iniziali delle serie di righe

$$\begin{array}{rcccccccc} l & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ & & S & P & D & F & G & H & \ldots \end{array}$$

Ad esempio la serie *Principal* è costituita da transizioni $P \to S$ e la serie *Diffuse* da $D \to P$. Studiando le righe di emissione si è però osservato che queste non sono righe singole ma hanno una *struttura fine*, nel primo caso sono righe doppie e nel secondo caso sono righe triple. Questo fenomeno si spiega assumendo che gli stati con $l \neq 0$ siano sdoppiati.

La chiave per interpretare questo fenomeno è stata fornita da Samuel Goudsmit e George Uhlenbeck nel 1925 con una proposta bizzarra:

- se l'elettrone non fosse puntiforme si comporterebbe come una trottola (*spin*) con un momento angolare intrinseco $\vec{S}$;
- questo avrebbe autovalore $s\hbar$ e $2s + 1$ possibili proiezioni;
- per $s = 1/2$ l'elettrone potrebbe stare in due stati con proiezioni $s = \pm 1/2$.

Nonostante partissero dal presupposto errato che l'elettrone non sia puntiforme, queste ipotesi si rivelarono corrette e in grado di spiegare la struttura fine e una serie di altri fenomeni osservati.

Assumiamo quindi che l'elettrone abbia un momento angolare di spin $S = \hbar/2$ e un momento magnetico associato

$$\vec{\mu} = g \, \frac{e}{2m} \, \vec{S}$$

dove g è chiamato *fattore giromagnetico*. Lo stato del sistema è ora caratterizzato dal momento angolare totale $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ che ha autovalori $j = l \pm 1/2$ e molteplicità $2j + 1$. Nella notazione spettroscopica questi stati sono rappresentati dal simbolo X_j dove $X = S, P, D, F, \ldots$ indica il momento angolare orbitale. Ad esempio, uno stato con $l = 0$ ha solo $j = 1/2$ ($S_{1/2}$), uno stato con $l = 1$ si divide in due stati con $j = 1/2$ ($P_{1/2}$) e $j = 3/2$ ($P_{3/2}$), uno stato con $l = 2$ si divide in due stati con $j = 3/2$ ($D_{3/2}$) e $j = 5/2$ ($D_{5/2}$).

Gli stati con valori di j diversi hanno energie diverse. Questo è dovuto all'energia di interazione, $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, tra il momento magnetico di spin dell'elettrone e il campo magnetico prodotto dal moto orbitale. Il moto relativo tra elettrone e nucleo è rappresentato dal momento angolare $\vec{L}$ cui è associata una corrente $i = e\omega/2\pi = eL/2\pi mr^2$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o i}{2r} \, \hat{n} = \frac{\mu_o}{4\pi} \, \frac{e\vec{L}}{mr^3} = \frac{e}{4\pi\epsilon_o} \, \frac{\vec{L}}{mc^2 r^3}$$

L'energia di interazione è

$$E_{ls} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{g}{2} \, \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o} \, \frac{\vec{L} \cdot \vec{S}}{m^2 c^2 r^3} = \frac{g}{2} \, \alpha \, \frac{(\hbar c)^3}{(mc^2)^2} \, \frac{\vec{l} \cdot \vec{s}}{r^3}$$

in questa formula compare un fattore $\frac{1}{2}$ dovuto al moto di precessione dello spin lungo l'orbita, la precessione di Thomas (appendice ???);

- l'interazione responsabile della struttura fine dipende dal prodotto scalare $\vec{l} \cdot \vec{s}$ ed è chiamata *interazione spin-orbita*;

- dipende da $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_o\hbar c$, chiamata per questo costante di struttura fine.

Le transizioni $P \to S$ sono divise in due righe $P_{3/2} \to S_{1/2}$, $P_{1/2} \to S_{1/2}$, e le transizioni $D \to P$ sono divise in tre righe $D_{5/2} \to P_{3/2}$, $D_{3/2} \to P_{3/2}$, $D_{3/2} \to P_{1/2}$ ($D_{5/2} \to P_{1/2}$ non avviene perché nelle transizioni di dipolo non può essere $\Delta j \geq 2$). Dal confronto tra i valori calcolati per E_{ls} e i valori sperimentali si ottiene il fattore giromagnetico dell'elettrone: $g = 2$. Quindi l'elettrone ha un momento magnetico intrinseco pari a un magnetone di Bohr.

Un'altra evidenza sperimentale che gli stati degli atomi siano la sovrapposizione di due possibili orientazioni del momento magnetico associato allo spin era stata ottenuta alcuni anni prima dell'ipotesi di Goudsmit e Uhlenbeck, nel 1922 da Otto Stern [23] e da Walter Gerlach con l'esperimento mostrato in Fig.1.10. Un fascio di atomi di Argento è diretto lungo l'asse x e attraversa la regioni tra i poli di un

[23] premio Nobel per la fisica nel 1943

magnete che ha il campo magnetico diretto lungo l'asse z e che ha un forte gradiente di campo $\frac{\partial B}{\partial z}$. Gli atomi di argento sono raccolti su una lastra di vetro e la posizione del fascio viene misurata con metodi fotografici. L'atomo di argento nello stato fondamentale ha momento angolare orbitale nullo. Se l'elettrone ha spin 1/2, lo stato è ${}^2S_{1/2}$ e il momento magnetico atomico ha due possibili orientazioni lungo l'asse z. L'energia di interazione dell'atomo con il campo magnetico è $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ e la forza $\vec{F} = -\vec{\nabla} E$ è diretta lungo l'asse z. Quindi, nell'attraversare il magnete gli atomi sono soggetti ad una forza $F_z = \pm\mu \frac{\partial B}{\partial z}$ che dipende dall'orientazione dello spin lungo l'asse z e il fascio si divide in due ciascuno con intensità pari a metà di quella del fascio originario.

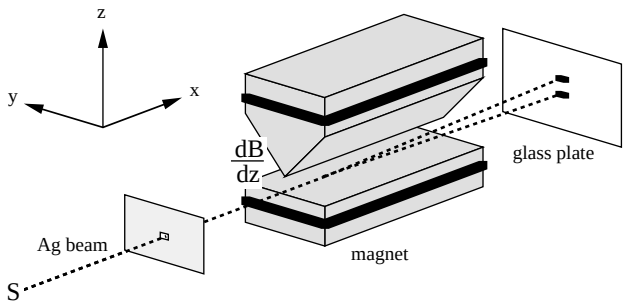


Figure 1.10: Esperimento di Stern e Gerlach

Lo spin dell'elettrone ha un ruolo fondamentale nella struttura degli atomi ed è necessario per spiegare la tavola periodica degli elementi. È stato introdotto con un'ipotesi *ad hoc* per spiegare i fenomeni osservati, ma la sua origine non trova spiegazione nell'ambito della meccanica quantistica non relativistica. Inoltre il valore $g = 2$ per il fattore giromagnetico dell'elettrone viene dedotto *a posteriori* per riprodurre i dati sperimentali. Pochi anni dopo l'introduzione dello spin dell'elettrone, nel 1928 Paul Dirac sviluppò una *teoria quantistica relativistica* (appendice 4.18) che *prevede* l'esistenza dello spin dell'elettrone e il valore corretto per il suo momento magnetico.

1.2 Sezione d'urto

1.2.1 La sezione d'urto

Consideriamo un esperimento in cui un fascio di N_i particelle incide su un bersaglio costituito da N_b particelle e sia $\vec{v}$ la velocità relativa tra le particelle del fascio e del bersaglio. Il flusso di particelle incidenti, il numero di particelle che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo, è

$$\Phi = \frac{N_i}{\Delta S\ \Delta t} = \frac{N_i\ \Delta x}{\Delta S\ \Delta x\ \Delta t} = \frac{N_i\ v}{V} = n_i\ v$$

Il numero di particelle bersaglio per unità di superficie investite dal fascio è

$$\frac{N_b}{\Delta S} = \frac{N_b\ \Delta x}{V} = n_b\ \Delta x$$

n_i e n_b sono il numero di particelle del fascio e del bersaglio per unità di volume. Il flusso incidente viene attenuato dall'interazione col bersaglio e l'attenuazione è proporzionale alla densità di particelle, n_b, e allo spessore del bersaglio, Δx,

$$\Delta\Phi = -\Phi\ \sigma n_b\ \Delta x$$

di modo che la frazione di flusso rimosso dal fascio per l'interazione con il bersaglio è pari al numero di particelle bersaglio contenute in un volume $\sigma\Delta x$ (Fig.1.11)

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = n_b\ \sigma\ \Delta x$$

σ è la *sezione d'urto* del processo di diffusione che si sta analizzando e ha le di-

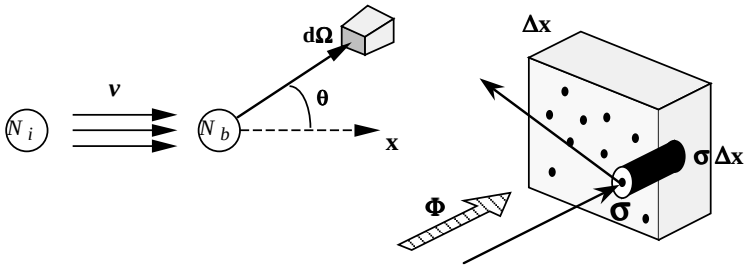


Figure 1.11: Sezione d'urto

mensioni di una superficie $[cm^2]$. Nell'attraversare il bersaglio il flusso incidente è attenuato secondo la legge

$$\Phi(x) = \Phi_o e^{-n_b\sigma x}$$

Per un processo di sezione d'urto σ e un bersaglio di densità n_b, si definiscono

$$\textit{coefficiente di assorbimento} \qquad \mu = n_b\sigma \qquad [cm^{-1}]$$

$$\textit{lunghezza di attenuazione} \qquad \lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{n_b\sigma} \qquad [cm]$$

Il numero di atomi (o nuclei) per unità di volume in un materiale di peso atomico A e densità ρ è

$$\frac{atomi}{volume} = \frac{atomi}{grammo\ atomo}\ \frac{grammi\ atomo}{grammo}\ \frac{grammi}{volume} = \frac{N_o\rho}{A} \qquad [cm^{-3}]$$

1.2.2 Sezione d'urto differenziale

Parte del flusso delle particelle incidenti viene diffuso dalle particelle bersaglio. Supponiamo che vengano rivelate le particelle diffuse in un andolo solido $d\Omega$ definito dagli angoli polare θ e azimutale ϕ, $d\Omega = d\cos\theta d\phi$. Il numero di particelle che sono diffuse nell'unità di tempo nell'angolo solido $d\Omega$ è proporzionale al flusso, al numero di particelle bersaglio e all'elemento di superficie efficace $d\sigma$

$$d\dot{N}_f = \dot{N}_f \; d\Omega = \Phi \; N_b \; d\sigma$$

La *sezione d'urto differenziale*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\dot{N}_f}{\Phi N_b} \qquad\qquad [cm^2 \; sterad^{-1}]$$

è misurata dal rapporto tra il numero di particelle diffuse nell'unità di tempo nello stato finale f e la *luminosità*

$$L = \Phi N_b \qquad\qquad [cm^{-2} \; s^{-1}]$$

La sezione d'urto del processo che fa passare dallo stato iniziale i allo stato finale f si può calcolare dalla *probabilità di transizione nell'unità di tempo* $\dot{P}_{i\to f}$ per ogni particella bersaglio ($N_b = 1$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\dot{N}_f}{N_i} \; \frac{V}{v} = \dot{P}_{i\to f} \; \frac{V}{v}$$

Lo stato finale f può essere in generale caratterizzato da diverse variabili della particella diffusa. Se, ad esempio, $\vec{p}'$ è l'impulso della particella nello stato finale, la sezione d'urto si ottiene integrando la

$$\textit{sezione d'urto differenziale} \qquad\qquad \frac{d\sigma}{d\vec{p}'} \qquad [cm^2 \; (eV/c)^{-3}]$$

nell'intervallo delle variabili nello stato finale

$$\sigma = \int_f \frac{d\sigma}{d\vec{p}'} \; d\vec{p}'$$

esplicitando $d\vec{p}'$ in opportune coordinate

$$d\vec{p}' \equiv dp'_x \; dp'_y \; dp'_z \equiv p'^2 \; dp' \; d\cos\theta' \; d\phi' \equiv p'_T \; dp'_T \; dp'_L \; d\phi'$$

Sezione d'urto invariante

Il sistema di riferimento *naturale* è il sistema del centro di massa delle particelle che interagiscono che, di solito, non coincide con il sistema di riferimento in cui si effettua la misura. Poichè le caratteristiche di un processo non devono dipendere dal particolare sistema di riferimento in cui si effettua la misura (la sezione d'urto σ

è definita come una superficie normale alla direzione del moto e quindi invariante), è opportuno conoscere le leggi di trasformazione delle variabili dal sistema del laboratorio al sistema del centro di massa e esprimere la sezione d'urto differenziale in funzione di variabili invarianti.

Le componenti dell'impulso si trasformano ($c = 1$)

$$p'_L = \gamma p_L - \beta\gamma E \qquad p'_T = p_T \qquad E' = -\beta\gamma p_L + \gamma E$$

quindi $d\vec{p}$ non è invariante ($d\sigma$, dp_T, $d\phi$ sono invarianti, mentre dp_L non è invariante). D'altra parte il rapporto dp_L/E è invariante $\left(E = [p_T^2 + p_L^2 + m^2]^{1/2}\right)$

$$dp'_L = \gamma dp_L - \beta\gamma dE = \gamma dp_L - \beta\gamma \frac{p_L}{E} dp_L = \frac{\gamma E - \beta\gamma p_L}{E} dp_L = \frac{E'}{E} dp_L$$

e quindi la

$$\textit{sezione d'urto invariante} \qquad E\frac{d\sigma}{d\vec{p}} \qquad [cm^2\ eV\ (eV/c)^{-3}]$$

non dipende dal riferimento in cui si effettua la misura.

1.2.3 Sezione d'urto di Rutherford

Come primo esempio di sezione d'urto consideriamo la diffusione di una particella carica nel campo coulombiano di un'altra carica (*diffusione di Rutherford*). L'esperimento di Rutherford sulla diffusione di particelle α da nuclei di oro ha avuto grande importanza nello sviluppo della conoscenza in fisica per una serie di motivi:

- ha introdotto il concetto di *scattering* nello studio della struttura della materia e delle proprietà dei suoi costituenti fondamentali;
- ha fornito risultati di importanza fondamentale per impostare il modello atomico;
- ha dimostrato la validità di tecniche strumentali innovative per la rivelazione delle particelle ionizzanti.

L'esperimento, ideato da E.Rutherford e condotto nel 1911 da due giovani ricercatori, Hans Geiger e Ernest Marsden, è basato su semplici considerazioni sulla diffusione di una particella dotata di carica elettrica nel campo coulombiano prodotto dalla carica di un'altra particella.

Consideriamo l'interazione tra una particella puntiforme di massa m e carica elettrica ze e un'altra particella puntiforme di massa M e carica elettrica Ze. Sia $\vec{v}$ la velocità relativa tra le due particelle. Facciamo l'ipotesi che $v \ll c$, in modo da poter utilizzare le leggi della meccanica classica, e che sia $m \ll M$, in modo da poter trascurare l'effetto del rinculo della particella M (nessuna di queste ipotesi è restrittiva e sono approssimativamente valide nel caso specifico dell'esperimento di

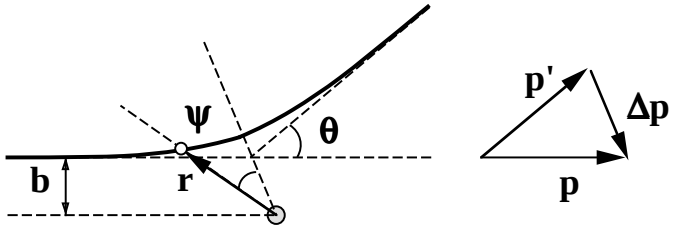


Figure 1.12: Diffusione di Rutherford

Rutherford). Trattiamo il problema in un sistema di riferimento che ha origine nella posizione della particella M, e definiamo il *parametro d'urto*, b, come la distanza tra la linea di volo della particella m e la posizione della particella M (Fig. 1.12). La forza che agisce tra le due particelle è

$$\vec{F} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o}\ \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Il campo elettrico è conservativo e la diffusione della particella m nel campo della particella M è elastica. Se $\vec{p}$ e $\vec{p}'$ sono gli impulsi iniziale e finale, si ha

$$|\vec{p}'| = |\vec{p}| \qquad\qquad \Delta p = |\vec{p}' - \vec{p}| = 2p\ \sin\theta/2$$

dove θ è l'angolo di diffusione della particella m. Poiché l'energia totale è positiva, la traiettoria è aperta: la particella m descrive un'iperbole con asintoti definiti dalle direzioni $\vec{p}$ e $\vec{p}'$. L'impulso trasferito, Δp, è per simmetria dovuto alla componente trasversa della forza coulombiana lungo la traiettoria della particella m

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F_T\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o}\ \frac{\cos\psi}{r^2}\ dt$$

dove ψ è l'angolo tra l'asse di simmetria del moto e il raggio vettore $\vec{r}$, $\psi(t = -\infty) = -(\pi/2 - \theta/2)$, $\psi(t = +\infty) = +(\pi/2 - \theta/2)$. La velocità della particella m è $\vec{v} = (d\vec{r}/dt) = (dr/dt)\ \hat{r} + r\ (d\psi/dt)\ \hat{n}$ e il momento angolare è

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\ \frac{dr}{dt}\ \vec{r} \wedge \hat{r} + mr\ \frac{d\psi}{dt}\ \vec{r} \wedge \hat{n} = mr^2\ \frac{d\psi}{dt}\ \hat{r} \wedge \hat{n}$$

$$L = mr^2\ \frac{d\psi}{dt} = costante = pb$$

e, cambiando variabile di integrazione, $dt/r^2 = (m/pb)\ d\psi$

$$\Delta p = \int \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o}\ m\ \frac{\cos\psi}{pb}\ d\psi = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o}\ \frac{m}{pb}\ 2\cos\theta/2 = 2p\sin\theta/2$$

Da cui si deriva la relazione tra l'angolo di diffusione e il parametro d'urto

$$\tan\theta/2 = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o b}\frac{m}{p^2} = \frac{energia\ potenziale\ a\ distanza\ 2b}{energia\ cinetica\ iniziale}$$

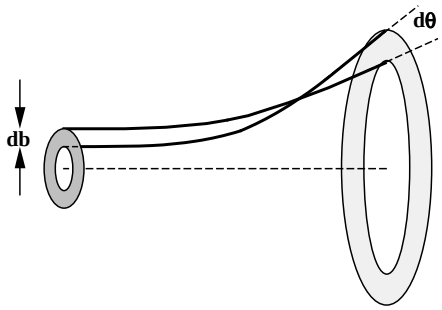


Figure 1.13: Relazione tra angolo e parametro d'urto

Per calcolare la sezione d'urto differenziale osserviamo (Fig.1.13) che l'elemento di *superficie bersaglio* che corrisponde ad una angolo di diffusione θ è definito dalla corona circolare compresa tra parametri d'urto b e $b + db$

$$d\sigma = 2\pi b db = 2\pi \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o}\right)^2 \frac{m^2}{p^4} \frac{1}{\tan\theta/2} \frac{d\theta/2}{\sin^2\theta/2} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o}\right)^2 \frac{m^2}{p^4} \frac{2\pi \sin\theta/2 \cos\theta/2 \; d\theta/2}{\sin^4\theta/2}$$

Per cui concludiamo che la sezione d'urto differenziale per diffusione coulombiana è

sezione d'urto di Rutherford

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o}\right)^2 \frac{m^2}{4p^4 \sin^4\theta/2}$$

cioè inversamente proporzionale alla quarta potenza dell'impulso trasferito, Δp, nell'interazione. Introducendo il raggio classico dell'elettrone, $r_e = e^2/4\pi\epsilon_o m_e c^2$, si riconosce facilmente che la sezione d'urto ha le dimensioni di una superficie

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \; (zZ)^2 \; \frac{(m_e c^2)^2}{4p^2 v^2 \sin^4\theta/2}$$

La sezione d'urto differenziale diverge per $\theta \to 0$, quindi non è definita su tutto l'angolo solido. Questo è dovuto al fatto che l'azione del potenziale coulombiano non si annulla per qualunque valore grande della distanza $\vec{r}$. Nella realtà non esistono cariche elettriche isolate: qualunque carica è in qualche modo schermata da cariche di segno opposto. Se consideriamo, ad esempio, un sistema atomico in cui il raggio medio degli orbitali elettronici è $\langle r \rangle$, il valore minimo dell'angolo di diffusione di una particella di energia cinetica K è

$$\tan\theta/2 = \frac{zZ}{2} \frac{r_e}{\langle r \rangle} \frac{m_e c^2}{K}$$

Esempio: distanza minima di avvicinamento

Esperimenti di diffusione Rutherford vengono effettuati per studiare la struttura elettromagnetica del bersaglio. Il potere risolutivo è legato alla distanza minima di avvicinamento del proiettile al bersaglio. La minima distanza, $r_{min} = \rho$, si ha

quando $\vec{r}$ è normale a $\vec{p}$. Per la conservazione del momento angolare e dell'energia si ha

$$L = |\vec{r} \wedge \vec{p}| = \rho\ p = b\ p_o \qquad\qquad E = \frac{p^2}{2m} + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o\rho} = \frac{p_o^2}{2m}$$

dove p_o è la quantità di moto iniziale, b è il parametro d'urto e l'angolo di diffusione è $\tan\theta/2 = (zZe^2/4\pi\epsilon_o b)(m/p_o^2)$. Dalle relazioni precedenti si ha

$$\rho^2 - 2b\tan\theta/2\ \rho - b^2 = 0$$

$$\rho = b\ \tan\theta/2 + b\ (1+\tan^2\theta/2)^{1/2} = b\ \frac{1+\sin\theta/2}{\cos\theta/2}$$

Nell'urto con $b = 0$ si ha diffusione all'indietro, $\theta = \pi$, e la distanza è minima quando si annulla l'energia cinetica: $\rho_o = 2mzZe^2/4\pi\epsilon_o p_o^2 = 2b\tan\theta/2$. Quindi la distanza minima di avvicinamento in funzione dell'angolo di diffusione e dell'energia cinetica iniziale, K_o, è

$$\rho = \rho_o\ \frac{1+\sin\theta/2}{2\sin\theta/2} = zZ\ r_e\ \frac{m_e c^2}{K_o}\ \frac{1+\sin\theta/2}{2\sin\theta/2}$$

1.2.4 Sezione d'urto di Thomson

Come secondo esempio di calcolo della sezione d'urto di un processo elementare trattiamo la diffusione della radiazione elettromagnetica da una carica elettrica, *diffusione di Thomson*. Consideriamo un'onda elettromagnetica che si propaga nella direzione z con il campo elettrico parallelo all'asse x e il campo magnetico parallelo all'asse y. Nel vuoto il flusso di energia incidente è

$$\Phi_i = c\epsilon_o E_x^2$$

Per azione della radiazione incidente, una particella di massa m e carica elettrica q è sottoposta ad una accelerazione $a_x = qE_x/m$ ed emette radiazione elettromagnetica della stessa frequenza dell'onda incidente. Il flusso di energia emessa dalla carica accelerata (appendice 4.7) è

$$\Phi_\Omega = \frac{1}{4\pi}\ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o}\ \frac{a_x^2}{c^3 r^2}\ \sin^2\theta_x \qquad [eV\ cm^{-2}\ s^{-1}]$$

θ e ϕ sono gli angoli polare e azimutale, r è la distanza dalla carica e θ_x è l'angolo tra la direzione di diffusione $\vec{r}$ e la direzione dell'accelerazione (Fig.1.14)

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad\qquad \sin^2\theta_x = 1 - \cos^2\theta_x = 1 - \sin^2\theta\cos^2\phi$$

Se la radiazione incidente non è polarizzata, cioè il campo elettrico può avere qualunque orientazione nel piano $x - y$, occorre mediare sull'angolo azimutale ϕ e si ottiene

$$\sin^2\theta_x = 1 - \sin^2\theta\ \langle\cos^2\phi\rangle = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$$

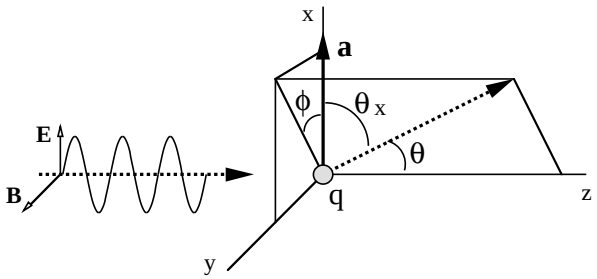


Figure 1.14: Diffusione di Thomson

Quindi il flusso di energia della radiazione diffusa è

$$\Phi_\Omega = \frac{1}{4\pi}\ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o}\ \frac{a_x^2}{c^3 r^2}\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_o}\right)^2\ \frac{1}{(mc^2)^2}\ \frac{\Phi_i}{r^2}\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$$

Il caso di interesse è quello di un elettrone debolmente legato, quando cioè l'energia di legame non è grande rispetto all'energia della radiazione incidente $\hbar\omega$. Per un elettrone ($q = e$, $m = m_e$, $e^2/4\pi\epsilon_o = r_e m_e c^2$) si ha

$$\Phi_\Omega = \Phi_i\ \left(\frac{r_e}{r}\right)^2 \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$$

La sezione d'urto, cioè l'area efficace del bersaglio che sottrae parte del flusso incidente e lo diffonde nell'angolo solido $d\Omega$, è

$$\Phi_i\ d\sigma = \Phi_\Omega\ r^2\ d\Omega$$

da cui si deriva la

$$\textit{sezione d'urto di Thomson} \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}(1+\cos^2\theta)$$

la sezione d'urto totale è

$$\sigma_T = \frac{r_e^2}{2}\int_o^{2\pi}\int_{-1}^{+1}(1+\cos^2\theta)\ d\cos\theta d\phi = \frac{8\pi}{3}\ r_e^2$$

L'unità di misura della sezione d'urto è il *barn*, ($1\ b \equiv 10^{-24}\ cm^2$). Poiché $r_e^2 = (2.82\ 10^{-13}\ cm)^2 \approx 0.08\ b$, il valore della sezione d'urto di Thomson è $\sigma_T = 0.67\ b$.

1.3 Acceleratori

Gran parte della fenomenologia dei nuclei e delle particelle è basata su risultati ottenuti in esperimenti con acceleratori. In questo capitolo trattiamo brevemente i metodi di accelerazione di elettroni, protoni e nuclei, con qualche accenno ai metodi per produrre fasci secondari di altre particelle sia cariche che neutre. I metodi per

accelerare particelle cariche sono basati sull'azione di campi elettrici e magnetici. L'equazione del moto è

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\ (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Il campo magnetico non compie lavoro e l'energia acquistata per unità di tempo, $W = q\vec{v} \cdot \vec{E}$, è fornita dal campo elettrico. Gli acceleratori lineari utilizzano esclusivamente campi elettrici. Campi magnetici vengono utilizzati negli acceleratori circolari e, in generale, per deflettere e per focalizzare i fasci di particelle.

Sorgenti di ioni

Una sorgente di elettroni è essenzialmente un filamento caldo, che emette elettroni per effetto termoionico, immerso in un campo elettrico che estrae gli elettroni e^- dalla sorgente (Fig.1.15). Allo stesso modo si realizza una sorgente di ioni positivi.

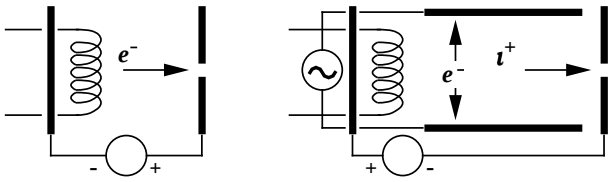


Figure 1.15: Sorgenti di elettroni e di ioni

Gli atomi sono immersi in una regione in cui vi è un campo elettrico alternato per accelerare gli elettroni prodotti dal filamento e un campo magnetico per farli spiralizzare. Gli elettroni cedono energia agli atomi ionizzandoli. Un campo elettrico estrae gli ioni i^+ dalla sorgente.

Il progresso degli acceleratori è fortemente legato al progresso delle tecniche di vuoto. Nelle regioni dell'acceleratore in cui viene trasportato il fascio di particelle occorre mantenere pressioni molto basse in modo da limitare l'assorbimento e la dispersione sia angolare che in energia del fascio. I fenomeni di interazione delle particelle cariche sono descritti nel capitolo ???.

1.3.1 Acceleratori a caduta di potenziale

I primi acceleratori sono stati realizzati con campi elettrici statici: una particella di carica q viene accelerata con una differenza di potenziale ΔV. L'energia massima raggiungibile con questa tecnica è limitata dalla differenza di potenziale che si può stabilire in laboratorio tra due elettrodi.

Acceleratore Van de Graaff

Il primo esempio di acceleratore elettrostatico è stato realizzato da Van de Graaff nel 1929 (Fig.1.16). La differenza di potenziale si ottiene caricando un elettrodo di capacità C per induzione elettrostatica. Una cinghia di materiale isolante passa

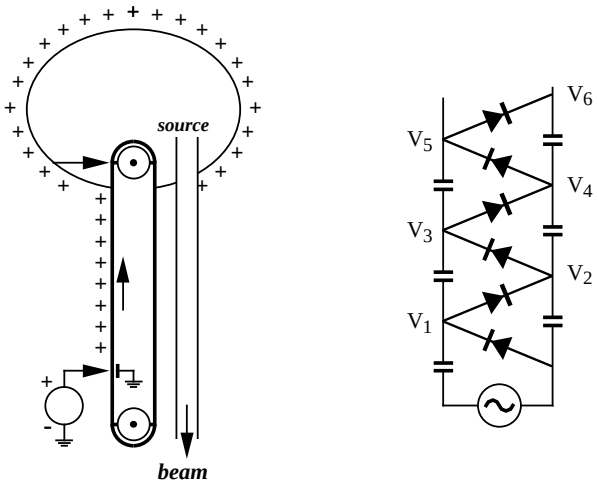


Figure 1.16: Principio di funzionamento degli acceleratori elettrostatici

vicino ad una punta dove vi è un intenso campo elettrico e si carica. La cinghia trasporta le cariche verso un elettrodo cavo che ha una forma il più regolare possibile per limitare le scariche. Poiché il campo elettrico all'interno dell'elettrodo conduttore è nullo, la carica trasportata si distribuisce sulla superficie. Il lavoro per caricare l'elettrodo è fornito dal moto della cinghia. Se $i(t)$ è la corrente trasportata dalla cinghia, la differenza di potenziale è $\Delta V = \int i(t)\ dt/C$ ed è limitata dalle perdite del dielettrico che avvolge l'elettrodo. Gli acceleratori elettrostatici sono di solito immersi in gas inerte ad alta pressione per evitare scariche. La sorgente di ioni è posta all'interno dell'elettrodo cavo e la differenza di potenziale viene ripartita, con una serie di capacità o resistenze, lungo il tubo a vuoto in cui è accelerato il fascio. Acceleratori di Van de Graaff possono produrre differenze di potenziale $\Delta V \approx 10\ MV$ e produrre fasci di ioni con correnti di fascio $\approx 100\ \mu A$ e sono comunemente utilizzati in ricerche di fisica nucleare.

Acceleratore Cockroft-Walton

Il secondo esempio di acceleratore elettrostatico è quello realizzato da Cockroft e Walton [24] nel 1930 per studiare le prime reazioni nucleari in laboratorio. L'energia è fornita da un generatore alternato, $\Delta V = V_o \sin \omega t$ e la differenza di potenziale è generata da una cascata di rettificatori. Questi sono alternativamente in conduzione o in interdizione e caricano una serie di condensatori a tensioni via via crescenti. Con riferimento alla Fig.1.16, le tensioni sono $V_{2k-1} = V_o(k + \sin \omega t)$, $V_{2k} = 2kV_o$. L'ultimo stadio è connesso a un elettrodo cavo sferico che contiene la sorgente di ioni. Le tensioni V_{2k} vengono distribuite lungo il tubo a vuoto in cui è accelerato il fascio. Acceleratori Cockroft-Walton possono produrre differenze di potenziale $\Delta V \approx 5\ MV$ con correnti $\approx 20\ \mu A$. Gli acceleratori a caduta di potenziale sono comunemente usati come stadi iniziali di accelerazione e come iniettori di particelle

[24] premi Nobel per la fisica nel 1951

in acceleratori più potenti.

Acceleratore Tandem

L'energia massima di uno ione può essere raddoppiata con acceleratori elettrostatitici a due stadi: acceleratori Tandem. Il primo stadio è, ad esempio, realizzato con un acceleratore Van de Graaff con tensione $+V$ e le tensioni $V_k = V/k$ sono distribuite in modo crescente dalla sorgente di ioni a tensione $V = 0$ all'elettrodo carico a tensione $+V$ e in modo decrescente da questo al punto di estrazione del fascio, di nuovo a tensione $V = 0$. Consideriamo una sorgente di ioni i^- (ad esempio uno ione idrogeno H^-): gli ioni vengono accelerati all'energia eV nel primo stadio e vengono fatti passare attraverso una sottile lamina che cambia lo stato di carica dello ione sottraendo i due elettroni. Gli ioni i^+ (i protoni) hanno ora una energia potenziale eV e nel secondo stadio vengono accelerati all'energia cinetica $2eV$. Acceleratori Tandem possono accelerare protoni fino ad energia cinetica $\approx 20\ MeV$.

1.3.2 Acceleratori lineari

Gli acceleratori a caduta di potenziale sono limitati dalla necessità di produre tensioni costanti molto elevate. Negli acceleratori lineari le particelle guadagnano energia con accelerazioni multiple prodotte da campi elettrici alternati. Il primo esempio di acceleratore lineare, *LINAC*, è stato sviluppato da Wideroe nel 1928. Il principio di funzionamento dell'acceleratore a *tubi a deriva* di Lawrence e Sloan (1930) è illustrato nella Fig.1.17.

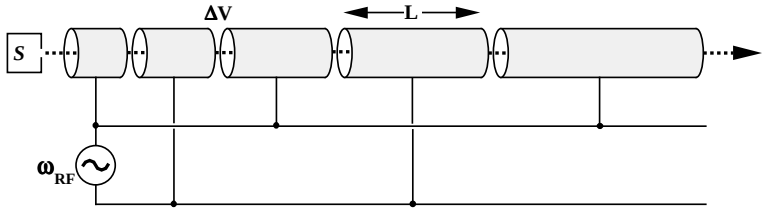


Figure 1.17: Principio di funzionamento del LINAC a tubi a deriva

Consideriamo una serie di tubi di materiale conduttore coassiali di lunghezza L_n connessi alternativamente ai capi di un generatore di tensione alternata. All'interno dei tubi il campo elettrico è nullo mentre tra un tubo e il successivo vi è una differenza di potenziale $\Delta V(t) = V_o \cos \omega t$. Una particella di carica q e massa m che procede lungo l'asse dei tubi viene accelerata nell'interspazio tra tubi consecutivi se giunge in fase con la differenza di potenziale. L'aumento di energia cinetica è $q\Delta V$. Per mantenere la relazione di fase occorre scegliere opportunamente la lunghezza dei tubi $L_n = v_n T/2$, dove T è il periodo e v_n è la velocità della particella nel tubo n.

Linac per ioni

Per velocità $v_n \ll c$ l'energia cinetica dopo il tubo n è $K_n = mv_n^2/2 = nq\Delta V$ e si ottiene

$$v_n = \left(\frac{2nq\Delta V}{m}\right)^{1/2} = cn^{1/2}\ \left(\frac{2q\Delta V}{mc^2}\right)^{1/2} \qquad L_n = \frac{cT}{2}\ n^{1/2}\ \left(\frac{2q\Delta V}{mc^2}\right)^{1/2}$$

Poiché vengono accelerati solo gli ioni che sono in fase con ΔV, il fascio non è continuo ma si divide in *pacchetti*. $LINAC$ di questo tipo vengono utilizzati per accelerare protoni e ioni con carica elevata fino a qualche decina di MeV per nucleone.

Linac per elettroni

Per elettroni si arriva rapidamente alla condizione in cui l'approssimazione non relativistica non è valida e le relazioni di sopra vanno sostituite con $K_n = mc^2(\gamma_n - 1)$, $1 - \beta_n^2 = (1 + nq\Delta V/mc^2)^{-2}$, da cui

$$v_n = c\ (2nx)^{1/2}\ \frac{(1 + nx/2)^{1/2}}{1 + nx} \qquad x = \frac{q\Delta V}{mc^2}$$

Per $n \to \infty$, $v_n \to c$, $L_n \to cT/2$. Per accelerare elettroni all'energia E occorre un acceleratore di lunghezza $L = (2q\Delta V/cT)E$, quindi è necessario avere un elevato gradiente di energia, $\Delta E/\Delta\ell = 2q\Delta V/cT$, aumentando la differenza di potenziale e la frequenza.

Linac RF

Nei moderni $LINAC$ per elettroni la camera a vuoto è costituita da una *guida d'onda* (Fig.1.22). La cavità è realizzata in modo che risuoni alla frequenza ω_{RF} e che il

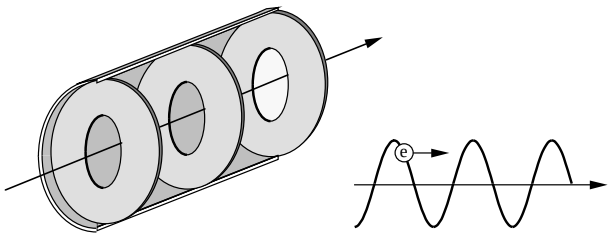


Figure 1.18: Guida d'onda del LINAC a radiofrequenza

campo elettrico sull'asse sia longitudinale. Il campo elettrico si può scomporre in due onde progressive che si propagano nelle due direzioni lungo l'asse della cavità. Poiché gli elettroni si muovono a velocità costante, $v_e \approx c$, ricevono continuamente energia dal campo elettrico se la velocità di fase dell'onda progressiva, v_f, è pari alla velocità v_e. Un'altra condizione necessaria è che i pacchetti di elettroni si mantengano in fase con l'onda progressiva; su questo torneremo più avanti.

1.3.3 Acceleratori circolari

Il moto di una particella di massa m e carica elettrica q in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ è descritto dalla legge

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\, m\gamma\vec{v} = q\ \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Poiché la forza di Lorentz non compie lavoro, si ha $\gamma = costante, |\vec{p}| = costante$. La componente della quantità di moto parallela alla direzione di $\vec{B}$ è invariata e la variazione della componente normale si esprime in funzione della velocità angolare

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{p} = \vec{\omega} \wedge m\gamma\vec{v} \qquad\qquad \vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{m\gamma}$$

La particella descrive un'elica. Nel piano normale a $\vec{B}$ descrive una traiettoria circolare con raggio di curvatura R con frequenza di rivoluzione ω

$$\vec{p} = m\gamma\ \vec{\omega} \wedge \vec{R} = q\vec{R} \wedge \vec{B} \qquad\qquad R = \frac{p}{qB}$$

Per una carica unitaria, $q = e$, la relazione tra quantità di moto, raggio di curvatura e campo magnetico è

$$p\ c\ [Joule] = e\ c\ B\ R = 1.6\ 10^{-19}\ [Coulomb]\ 3\ 10^{8}\ [ms^{-1}]\ B\ [Tesla]\ R\ [metro]$$

ovvero, in unità più pratiche, $ec = 0.3\ GeV/T\ m$,

$$pc\ [GeV] = 0.3\ B\ [Tesla]\ R\ [metro]$$

Il fatto che una particella carica in un campo magnetico uniforme percorre una circonferenza viene sfruttato negli acceleratori circolari per far passare ripetutamente la particella in una zona in cui è presente un campo elettrico accelerante. In questo modo la particella guadagna progressivamente energia con accelerazioni multiple con frequenza legata alla frequenza di rivoluzione.

Il ciclotrone

Il primo acceleratore circolare, il ciclotrone, è stato realizzato da Lawrence [25] nel 1930. Lo schema di funzionamento è illustrato nella Fig.1.19. Un dipolo produce un campo magnetico uniforme e costante in un cerchio di raggio R. All'interno del dipolo la camera a vuoto è compresa tra due elettrodi cavi a forma di $''D''$ e agli elettrodi è applicata una differenza di potenziale alternata a frequenza ω_{RF}, $\Delta V(t) = V_o \cos\omega_{RF}t$. La distanza tra gli elettrodi è molto minore del raggio R del magnete. Il campo elettrico è nel piano normale al campo magnetico. La sorgente di ioni è posta al centro della camera a vuoto.

[25] premio Nobel per la fisica nel 1939

Gli ioni emessi dalla sorgente vengono accelerati dal campo elettrico ed entrano nel cavo di uno degli elettrodi dove il campo elettrico è nullo. Per effetto del campo magnetico, gli ioni percorrono una semicirconferenza di raggio $\rho = p/qB$ e frequenza di rivoluzione $\omega = qB/m\gamma$. Se è soddisfatta la *condizione di risonanza*, $\omega = \omega_{RF}$, gli ioni attraversano di nuovo la zona tra i due elettrodi in fase con la differenza di potenziale e vengono di nuovo accelerati. Quindi gli ioni percorrono una traiettoria a spirale con raggio via via crescente e l'aumento di energia per giro è $\Delta E = 2q\Delta V$. Quando il raggio di curvatura è uguale a R gli ioni non sono più soggetti all'azione del campo magnetico ed escono tangenti alla traiettoria.

La massima energia raggiungibile è limitata dal valore del campo, B, e dal raggio del magnete, R. Per uno ione di carica Ze e peso atomico A:

$$p_{max}c = 0.3ZBR \qquad\qquad K_{max} = Amc^2 \left[\left[1 + \left(\frac{0.3ZB}{Amc^2} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right]$$

Per $B = 1\ T$, $R = 1\ m$, si ha $p_{max} = 300\ Z\ MeV/c$ che corrisponde per un protone ad una energia cinetica $K_{max} = 47\ MeV$.

Per velocità $v \ll c$, $\gamma \simeq 1$, la frequenza di rivoluzione è costante e la condizione di risonanza è rispettata se $\omega_{RF} = costante$. Questo limita il valore dell'energia cinetica: per protoni $K_{max} \simeq 20\ MeV$. Per raggiungere energie più elevate occorre variare (diminuire) la frequenza ω_{RF} durante il ciclo di accelerazione. Questo è quello che avviene nel *sincro-ciclotrone*.

Il *ciclotrone isocrono* funziona a frequenza ω_{RF} costante e i poli del magnete sono sagomati in modo che il valore del campo B aumenti con il raggio

$$\omega = \frac{0.3ZB(0)c}{Amc^2} \qquad\qquad B(r) = \frac{A}{Z}\ \frac{mc^2}{0.3\ (c^2/\omega^2 - r^2)^{1/2}}$$

I moderni ciclotroni accelerano protoni e ioni fino ad energie cinetiche di circa 600 MeV e vengono usati per studiare reazioni nucleari nella regione delle energie intermedie e per produrre fasci secondari di particelle.

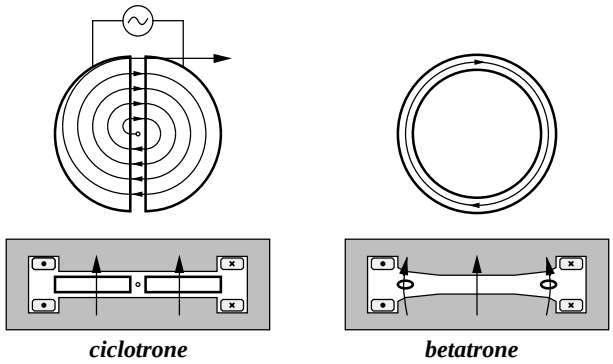


Figure 1.19: Schema del ciclotrone e del betatrone

Il betatrone

Il betatrone è stato realizzato da Kerr nel 1940 per accelerare elettroni ad energie, a quei tempi, elevate. Il nome betatrone ha origine dai *raggi beta* che sono elettroni emessi nei decadimenti dei nuclei. Nel betatrone gli elettroni percorrono una traiettoria circolare di raggio R e la camera a vuoto è a forma di *ciambella* racchiusa tra i poli di un magnete (Fig.1.19). Il campo magnetico è normale al piano della traiettoria.

Il betatrone funzione per induzione elettromagnetica. Non intervengono campi elettrici: si fa variare il campo magnetico e la forza elettromotrice è fornita dalla variazione del flusso del campo magnetico concatenato con la ciambella. Con riferimento alla Fig.1.20, chiamiamo $\langle B \rangle$ il valore del campo magnetico mediato su tutta

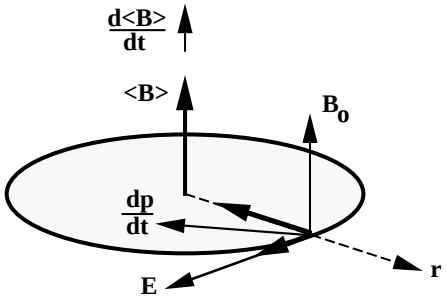


Figure 1.20: Principio di funzionamento del betatrone

la superficie delimitata dalla ciambella e B_o il valore del campo magnetico lungo l'orbita. Se si fa variare il campo magnetico, il campo elettrico generato lungo la circonferenza di raggio R è

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi R E = -\frac{d\Phi\langle B\rangle}{dt} = -\pi R^2 \, \frac{d\langle B\rangle}{dt}$$

Una particella di carica q è soggetta alla forza tangenziale

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} = \frac{q}{2}\vec{R} \wedge \frac{d\langle \vec{B} \rangle}{dt}$$

Perché la particella percorra la circonferenza di raggio R costante, deve risultare

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{R} \wedge \frac{d\vec{B}_o}{dt}$$

Quindi è possibile accelerare un elettrone lungo una traiettoria di raggio costante se è soddisfatta la

condizione di betatrone $\qquad \dfrac{d\langle \vec{B} \rangle}{dt} = 2 \, \dfrac{d\vec{B}_o}{dt} \qquad \langle \vec{B} \rangle = 2\vec{B}_o + costante$

che si può ottenere sagomando opportunamente i poli del magnete.

Il sincrotrone

In acceleratori circolari costruiti con un magnete singolo la massima energia raggiungibile è limitata dal campo magnetico e dal raggio del magnete. Poiché il valore di B che si può raggiungere, anche utilizzando bobine superconduttrici, è limitato ad alcuni $Telsa$, per aumentare l'energia occorre aumentare il raggio dell'acceleratore. Questo non si può fare con un singolo dipolo, che sarebbe enorme, ma si costruiscono acceleratori con più magneti curvanti distribuiti lungo la traiettoria delle particelle. Quindi il raggio di curvatura della traiettoria è fissato, $R = costante$, e la camera a vuoto è una ciambella contenuta tra i poli dei magneti curvanti. Lungo la traiettoria circolare, in uno o più punti, vi sono cavità RF dove un campo elettrico alternato a frequenza ω_{RF} cede energia alle particelle. La frequenza ω_{RF} deve essere uguale alla *frequenza di ciclotrone* o pari a un multiplo intero h (*numero di armonica*) e le particelle devono attraversare la cavità in fase con ω_{RF}.

Il sincrotrone è un acceleratore che opera in cicli: iniezione, accelerazione, estrazione del fascio e ritorno alla fase iniziale e utilizza un primo stadio di accelerazione, usualmente un acceleratore lineare, che inietta le particelle con impulso p_i (Fig.1.21). Nella fase di iniezione si ha

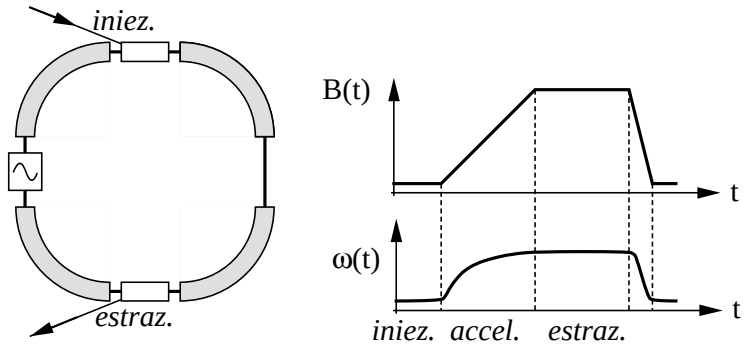


Figure 1.21: Schema del sincrotrone

$$B_i = p_i/qR \qquad \omega_i = qB_i/m\gamma_i = \beta_i c/R$$

Nella fase di accelerazione si aumenta gradualmente il campo magnetico e si varia di conseguenza la frequenza $\omega_{RF} = h\, qB/m\gamma$. Quando è raggiunto il valore massimo del campo magnetico, il fascio viene estratto impulsando dei magneti e dopo l'estrazione il valore del campo magnetico e della frequenza vengono riportati ai valori iniziali.

In un *proto-sincrotrone* occorre variare la frequenza ω_{RF} durante la fase di accelerazione

$$\omega_{RF} = h\ \omega = h\ \beta c/R$$

Se l'iniezione dei protoni avviene con quantità di moto p_i non piccola rispetto a mc, la banda di frequenza in cui operano le cavità è limitata e questo comporta notevoli vantaggi. In un *elettro-sincrotrone* invece è sufficiente iniettare elettroni con energia di pochi MeV, $\beta \approx 1$, per operare le cavità a $\omega_{RF} \approx c/R = costante$.

1.3.4 Cavità a radiofrequenza

Negli acceleratori le particelle cariche vengono accelerate con campi elettrici alternati con frequenze tipiche $\sim GHz$. I campi elettromagnetici sono guidati e contenuti all'interno di conduttori, *guide d'onda* e *cavità*. Facciamo l'ipotesi che questi siano conduttori ideali con resistività $\rho \simeq 0$ e che il mezzo dielettrico (aria a bassissima pressione) sia omogeneo e isotropo con $\epsilon \simeq \epsilon_o$ e $\mu \simeq \mu_o$. La velocità nel dielettrico indefinito è $v_o = (\epsilon\mu)^{-1/2} \simeq c$ e la lunghezza d'onda è $\lambda_o = v_o/\nu$. La frequenza è fissata dai dispositivi che eccitano i campi e la velocità, v, all'interno della guida è definita dalle condizioni al contorno dei campi elettromagnetici sulle superfici che separano conduttore e dielettrico; il campo elettrico è perpendicolare alla superficie di un conduttore ideale, $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$, e il campo magnetico è parallelo, $\vec{B} \wedge \hat{n} = 0$.

In un dielettrico omogeneo e isotropo, in assenza di densità di carica e di corrente, le equazioni di Maxwell sono

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \epsilon\mu \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

le componenti $F(x, y, z, t)$ dei campi $\vec{E}$, $\vec{B}$, soddisfano l'equazione di d'Alembert

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \, \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

e la soluzione si può sviluppare come sovrapposizione di componenti di Fourier.

Guide d'onda

Consideriamo una guida d'onda rettangolare indefinita lungo la direzione z (Fig.1.22) e esprimiamo la soluzione come

$$F(x, y, z, t) = \psi(x, y) \; e^{i(kz - \omega t)} \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = ikF \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = -i\omega F$$

in cui la funzione $\psi(x, y)$ rappresenta il fronte d'onda che si propaga con *velocità di fase* $v = \omega/k$ lungo l'asse z. La funzione ψ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + K^2 \psi = 0 \qquad K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2}$$

Perché l'onda si propaghi senza attenuazione le quantità $k = \omega/v$ e K devono essere reali. Da questo ($\omega/v = [(\omega/c)^2 - K^2]^{1/2}$ e quindi $\omega/c > K$) si conclude che solo la radiazione di lunghezza d'onda $\lambda_o = 2\pi c/\omega$ minore della *lunghezza d'onda critica*, $\lambda_c = 2\pi/K$, si può propagare senza attenuazione all'interno della guida.

La soluzione $\psi(x, y)$ si può esprimere come prodotto di due funzioni delle singole variabili $\psi(x, y) = \xi(x)\eta(y)$ di modo che l'equazione delle onde diventa

$$\xi''\eta + \xi\eta'' + K^2\xi\eta = 0 \qquad \xi''/\xi + \eta''/\eta + K^2 = 0$$

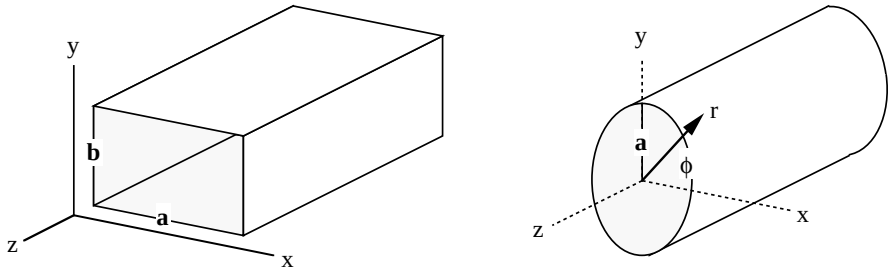


Figure 1.22: Guide d'onda rettangolare e cilindrica

e si ottiene una soluzione oscillante ponendo

$$\xi'' + K_a^2 \xi = 0 \qquad \eta'' + K_b^2 \eta = 0 \qquad K_a^2 + K_b^2 = K^2$$

$$\psi(x,y) = C \sin(K_a x + \alpha) \sin(K_b y + \beta)$$

dove le costanti K_a, α, K_b, β, sono determinate dalle condizioni di continuità dei campi sulle pareti della guida.

Le componenti trasverse dei campi, E_x, E_y, B_x, B_y, sono funzioni delle componenti longitudinali, ad esempio

$$\begin{aligned} -K^2 E_x = \quad & (\partial_x \partial_x + \partial_y \partial_y) E_x = \\ & -\partial_x (\partial_y E_y + \partial_z E_z) + \partial_y \partial_y E_x = \\ & -\partial_y (\partial_x E_y - \partial_y E_x) - \partial_x \partial_z E_z = -\partial_y \; i\omega B_z - \partial_x \; i(\omega/v) E_z \end{aligned}$$

e analogamente per le altre componenti

$$\begin{aligned} -iK^2 E_x &= +(\omega/v)\partial_x E_z + \omega \partial_y B_z \qquad & -iK^2 B_x &= -(\omega/c^2)\partial_y E_z + (\omega/v)\partial_x B_z \\ -iK^2 E_y &= +(\omega/v)\partial_y E_z - \omega \partial_x B_z \qquad & -iK^2 B_y &= +(\omega/c^2)\partial_x E_z + (\omega/v)\partial_y B_z \end{aligned}$$

Quindi, per descrivere la propagazione delle onde elettromagnetiche nella guida, è sufficiente definire le componenti longitudinali dei campi, E_z e B_z. Consideriamo i casi in cui una delle due componenti sia nulla, si definiscono:

TM *transverse magnetic mode*: $B_z = 0$;
ponendo che il campo elettrico sia normale alle superfici della guida ($E_z = 0$ per $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, in Fig.1.22) si ottiene $\alpha = 0$, $K_a a = m\pi$, $\beta = 0$, $K_b b = n\pi$, con m, n interi. La soluzione è

$$E_{z,mn} = C \; \sin(m\pi x/a) \; \sin(n\pi y/b) \; e^{i(kz - \omega t)} \qquad B_z = 0$$

TE *transverse electric mode*: $E_z = 0$;
in questo caso le componenti trasverse del campo elettrico sono

$$\begin{aligned} -iK^2 E_x &= \omega \partial_y B_z = \omega K_b C \; \sin(K_a x + \alpha) \; \cos(K_b y + \beta) \\ +iK^2 E_y &= \omega \partial_x B_z = \omega K_a C \; \cos(K_a x + \alpha) \; \sin(K_b y + \beta) \end{aligned}$$

e ponendo che il campo elettrico sia normale alle superfici della guida ($E_x = 0$ per $y = 0$, $y = b$, in Fig.1.22; $E_y = 0$ per $x = 0$, $x = a$) si ottiene $\alpha = \beta = \pi/2$, $K_a a = m\pi$, $K_b b = n\pi$:

$$E_z = 0 \qquad B_{z,mn} = C \ \cos(m\pi x/a) \ \cos(n\pi y/b) \ e^{i(kz-\omega t)}$$

La lunghezza d'onda critica dipende dalle dimensioni della guida e dal modo di propogazione

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{(K_a^2 + K_b^2)^{1/2}} = \frac{2}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^{1/2}} = \frac{2ab}{(m^2b^2 + n^2a^2)^{1/2}}$$

ad esempio

modo TM	$TM_{1,1}$	$\lambda_c = 2ab/(b^2+a^2)^{1/2}$	$TM_{1,n\gg1}$	$\lambda_c \simeq 2b/n$
modo TE	$TE_{1,0}$	$\lambda_c = 2a$	$TE_{m\gg1,0}$	$\lambda_c \simeq 2a/n$
	$TE_{0,1}$	$\lambda_c = 2b$	$TE_{0,n\gg1}$	$\lambda_c \simeq 2b/n$

La lunghezza d'onda nella guida è maggiore di quella nel dielettrico indefinito e, poiché la frequenza non cambia, anche la velocità di fase nella guida è maggiore

$$\lambda = \frac{\lambda_o}{(1 - \lambda_o^2/\lambda_c^2)^{1/2}} \qquad v = \frac{c}{(1 - \lambda_o^2/\lambda_c^2)^{1/2}}$$

La velocità di fase *non* è la velocità con cui si propaga energia nella guida. La *velocità di gruppo* è quella con cui si propaga un *pacchetto d'onda* costituito dalla sovrapposizione di fronti d'onda con energia leggermente diversa, ad esempio

$$\psi(x,y)\left[e^{i(kz-\omega t)} + e^{i([k+\Delta k]z-[\omega+\Delta\omega]t)}\right] = \psi(x,y)e^{i(kz-\omega t)}\left[1 + e^{i(\Delta kz-\Delta\omega t)}\right]$$

L'ampiezza del pacchetto d'onda dipende da z e t, e l'energia si mantiene costante sui fronti con $A(z,t) = 1 + e^{i(\Delta kz-\Delta\omega t)} = costante$, cioè $z = (\Delta\omega/\Delta k)t + costante$. Poiché $k^2 = \omega^2/v^2 = \omega^2/c^2 - K^2$ e K dipende solo dalle caratteristiche geometriche della guida, si ha $kdk = \omega d\omega/c^2$. La velocità di gruppo nella guida, v_g, è minore sia della velocità di fase, v, che della velocità nel dielettrico indefinito, c,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{\omega/k} = \frac{c^2}{v} = c\left(1 - \frac{\lambda_o^2}{\lambda_c^2}\right)^{1/2}$$

La Fig.1.23 mostra la relazione tra frequenza e numero d'onda, $\omega/c = (k^2 + K^2)^{1/2}$, in una guida d'onda. Un punto sulla curva fornisce la velocità di fase, $v > c$, mentre la derivata fornisce la velocità di gruppo $v_g = d\omega/dk < c$; con $v_g v = c^2$. Per $k \gg K$ ($\lambda_o \ll \lambda_c$) si ha $v \to c$ e $v_g \to c$.

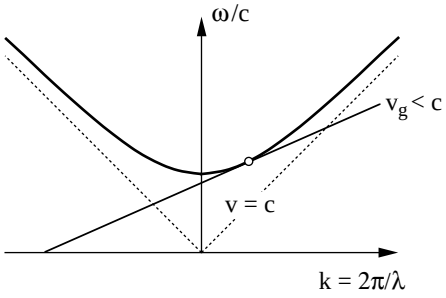


Figure 1.23: Relazione di dispersione in una guida d'onda

Guide d'onda cilindriche

L'equazione delle onde in coordinate cilindriche r, ϕ, z (Fig.1.22) è

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

Nel caso di guide a simmetria cilindrica conviene fattorizzare la soluzione come $F(r,\phi,z,t) = R(r)\Phi(\phi)e^{i(kz-\omega t)}$ che soddisfa l'equazione

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + K^2 = 0 \qquad\qquad K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2}$$

Il primo e il terzo termine non dipendono dall'angolo ϕ per cui $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = \textit{costante}$ e si ha una soluzione oscillante se

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + n^2\Phi = 0 \qquad\qquad \Phi(\phi) = C\sin(n\phi + \alpha)$$

L'equazione radiale diventa

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R = 0 \qquad\qquad \rho = Kr$$

e le soluzioni sono le funzioni di prima specie di Bessel di ordine n, $R(Kr) = J_n(\rho)$. Queste sono funzioni oscillanti che hanno un numero infinito di zeri, $J_n(\zeta_{mn}) = 0$. La soluzione generale è del tipo

$$F(r,\phi,z,t) = C\ J_n(Kr)\ \sin(n\phi+\alpha)\ e^{i(kz-\omega t)}$$

Le componenti trasverse dei campi si possono esprimere in funzione delle componenti longitudinali

$$-iK^2E_r = +(\omega/v)\partial_r E_z + (\omega/r)\partial_\phi B_z \qquad -iK^2B_r = -(\omega/c^2r)\partial_\phi E_z + (\omega/v)\partial_r B_z$$
$$-iK^2E_\phi = +(\omega/vr)\partial_\phi E_z - \omega\partial_r B_z \qquad -iK^2B_\phi = +(\omega/c^2)\partial_r E_z + (\omega/vr)\partial_\phi B_z$$

TM Nei modi TM il campo magnetico forma linee chiuse nel piano normale all'asse z, mentre il campo elettrico ha componente longitudinale non nulla (Fig.1.24); per questo i modi TM possono essere utilizzati per accelerare particelle cariche lungo l'asse z. Le soluzioni sono definite dalla condizione che la componente azimutale del campo elettrico sia nulla sulla parete della guida, $E_\phi(r{=}a) = 0$. Poichè questa è proporzionale alla funzione di Bessel, $E_\phi(r) \propto J_n(Kr)/r$, i modi TM sono caratterizzati dalla condizione $J_n(Ka) = 0$ che definisce infiniti valori K_{mn}. La lunghezza d'onda critica è $\lambda_c^{mn} = 2\pi/K_{mn}$.

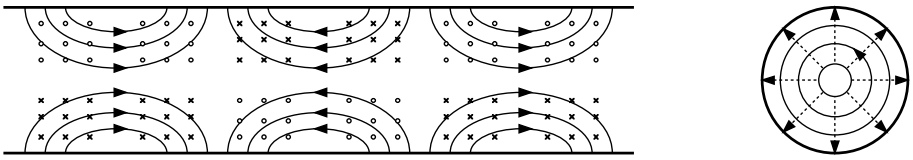


Figure 1.24: Linee di campo per il modo TM_{11} in una guida d'onda cilindrica; campo elettrico: $\rightarrow$; campo magnetico: $\times$ entrante, $\bullet$ uscente

TE Nei modi TE le linee di forza del campo elettrico sono normali all'asse z e il campo magnetico forma linee chiuse con componente longitudinale non nulla. La componente azimutale del campo elettrico è proporzionale alla derivata della funzione di Bessel, $E_\phi(r) \propto J'_n(Kr)/r$, e anche in questo caso la condizione $J'_n(Ka) = 0$ definisce infiniti valori K_{mn}.

Cavità risonanti

Una guida d'onda non è adatta ad accelerare particelle cariche perché la velocità di fase è sempre maggiore di quella delle cariche elettriche da accelerare. Se la guida d'onda è chiusa da pareti conduttrici, si possono stabilire all'interno *onde stazionarie* se la lunghezza della guida, L, è pari ad un numero semi-intero di lunghezze d'onda, $L = \ell\lambda/2$. In questo modo si realizza una cavità caratterizzata dal modo di oscillazione e dalla frequenza di risonanza, quindi da tre numeri interi ℓ, m, n.

Se consideriamo un dielettrico con conducibilità elettrica finita, σ, il campo elettromagnetico induce una densità di corrente, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, sulle pareti della cavità e quindi si ha dissipazione di energia per effetto Joule. Introducendo la densità di corrente nelle equazioni di Maxwell, $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \epsilon\partial\vec{E}/\partial t$, l'equazione delle onde sulle pareti della cavità viene modificata con un termine dissipativo

$$\nabla^2\vec{E} - \sigma\mu\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \epsilon\mu\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Questa è l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato, quindi l'ampiezza dei campi, $\vec{E}$, $\vec{B}$, diminuisce nel tempo con legge esponenziale.

Consideriamo la soluzione del tipo $F(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)\chi(t)$ e facciamo l'ipotesi che il termine dissipativo sia piccolo, cioè che la funzione $\psi(x,y,z)$ sia soluzione dell'equazione $\nabla^2\psi + \kappa^2\psi = 0$ e che sia definita dalle condizioni al contorno dei campi elettromagnetici sulle pareti della cavità (se si usa un conduttore di conducibilità elevata − rame, argento, o materiale superconduttore − le condizioni $\vec{E}\cdot\hat{n} = 0$, $\vec{B}\wedge\hat{n} = 0$, sono un'ottima approssimazione). Per brevità indichiamo $\psi_n(x,y,z)$ la soluzione caratterizzata da tre numeri interi ℓ, m, n, che individuano la condizione di risonanza e il modo di oscillazione. L'ampiezza $\chi_n(t)$ soddisfa l'equazione

$$\epsilon\mu\ \ddot{\chi}_n + \sigma\mu\ \dot{\chi}_n + \kappa_n^2\ \chi_n = 0 \qquad \ddot{\chi}_n + \frac{1}{\tau}\ \dot{\chi}_n + \omega_n^2\ \chi_n = 0 \qquad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \qquad \omega_n = \frac{\kappa_n}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

che ha soluzione $\chi_n(t) = e^{-t/2\tau}(Ae^{i\Omega_n t} + Be^{-i\Omega_n t})$ con $\Omega_n = \omega_n(1 - 1/4Q^2)^{1/2}$.
ω è la frequenza di risonanza della cavità senza perdite, $Q = \tau\omega = (\epsilon/\mu)^{1/2}\kappa/\sigma$ è il *fattore di merito* della cavità. La banda di frequenza è definita da una curva Lorentziana centrata sulla frequenza di risonanza con larghezza FWHM $\Delta\omega = \Omega/Q$. Quindi una cavità risonante deve avere fattore di merito il più elevato possibile, $Q \gg 1$, in questo caso $\Omega_n = \omega_n$.

Il fattore di merito è il rapporto tra l'energia immagazzinata alla frequenza di risonanza e l'energia dissipata in un periodo: $Q = 2\pi\langle\mathcal{E}\rangle / \int_T W dt = \omega\langle\mathcal{E}\rangle/\langle W\rangle$. In una cavità, come in una guida d'onda, il campo elettromagnetico penetra per un piccolo spessore all'interno del conduttore, *effetto pelle*, generando correnti che dissipano energia per effetto Joule. Se ϵ_c, μ_c, sono le costanti del materiale di conducibilità σ, si ha $\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \sigma\vec{E} - i\omega\epsilon_c\vec{E}$, $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = k^2\vec{H} = i\omega\mu_c(\sigma - i\omega\epsilon_c)\vec{H}$, e quindi il vettore d'onda, $k^2 = \omega^2\mu_c\epsilon_c + i\omega\mu_c\sigma$, ha una parte diffusiva e una assorbitiva:

$$k = \frac{1}{\delta}(1 + \omega\epsilon_c/\sigma) + \frac{i}{\delta} \qquad \delta = (2/\omega\mu_c\sigma)^{1/2}$$

δ è lo spessore della *pelle* del conduttore. Per un buon conduttore, ad esempio il rame che ha resistività $\rho = 1/\sigma = 1.75\ 10^{-8}\ \Omega\ m$, alla frequenza di 1 GHz, si ha $\omega\epsilon_c/\sigma \simeq 10^{-9}$ e $\delta \simeq 2\ \mu m$.

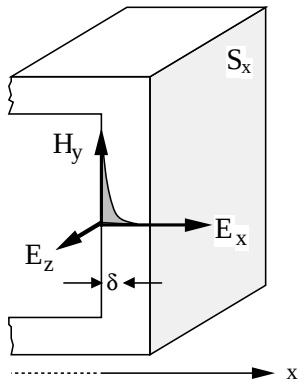


Figure 1.25: Effetto pelle sulle pareti di una guida d'onda

Per calcolare la potenza dissipata consideriamo ad esempio un modo TM in cui il campo magnetico ha solo la componente H_y sulla superficie del conduttore, $x = 0$ in Fig.1.25, $H_y = H_o e^{ix/\delta} e^{-x/\delta} \sin \omega t$. Trascurando la corrente di spostamento nel conduttore, il campo elettrico sulla superficie ha una componente longitudinale $E_z = \frac{1}{\sigma}\partial_x H_y = \frac{i-1}{\sigma\delta} H_y$ che genera una corrente longitudinale $j_z = \sigma E_z$. La potenza media è

$$W = \frac{1}{2}\int j_z E_z \; dxdydz = \frac{|H_o|^2}{\sigma\delta}\int_0^\infty e^{-2x/\delta} dx \; S_x = \frac{|H_o|^2}{2\sigma\delta} \; S_x$$

dove S_x è la superficie della cavità normale a $\hat{x}$. L'energia media immagazzinata nella cavità è

$$\mathcal{E} = \int \left(\epsilon\langle E^2\rangle/2 + \mu\langle H^2\rangle/2\right) dxdydz \simeq \frac{\mu|H_o|^2}{2} \; V$$

dove V è il volume della cavità. Estendendo a tutte le pareti della cavità si ottiene per il fattore di merito

$$Q = \frac{\omega\langle\mathcal{E}\rangle}{\langle W\rangle} \simeq \omega\mu\sigma\delta \; \frac{V}{S} \times f.g. = \frac{\mu}{\mu_c}\frac{V}{S\delta} \times f.g.$$

dove $f.g. \simeq 1$ è un fattore geometrico che dipende dal modo di eccitazione e dalla forma della cavità. Quindi il fattore di merito è tanto maggiore quanto più elevato è il rapporto V/S (per cavità sferica > cilindrica > rettangolare) e quanto più piccolo è lo spessore dell'effetto pelle δ.

Esempio: cavità cilindrica

Consideriamo una cavità cilindrica di lunghezza L e raggio a; la soluzione per i campi è del tipo $F(r,\phi,z,t) = CJ_n(Kr)\sin(n\phi+\alpha)e^{ikz}e^{-i\omega t}$ con $K^2 = (\omega/c)^2 - k^2$

- per la condizione di risonanza si ha: $k = \pi\ell/L$ con ℓ intero;
- consideriamo il modo TM ($B_z = 0$):
  le componenti trasverse del campo elettrico si annullano alle estremità della cavità $z = 0$ e $z = L$ dove la componente longitudinale E_z è massima; cioè $e^{ikz} \to \cos kz = \cos\frac{\pi\ell}{L}z$; quindi $E_z = CJ_n(Kr)\sin(n\phi+\alpha)\cos\frac{\pi\ell}{L}z \; e^{-i\omega t}$;
- la componente azimutale del campo elettrico
  $E_\phi = \frac{ik}{K^2 r}\partial_\phi E_z = iC\frac{\pi\ell n}{K^2 Lr}J_n(Kr)\cos(n\phi+\alpha)\cos\frac{\pi\ell}{L}z \; e^{-i\omega t}$;
  si annulla sulla superficie laterale della cavità per $r = a$, la condizione $J_n(Ka) = 0$ si verifica per $K_{mn}a = \zeta_{mn}$ e definisce i modi trasversi della cavità;
- le altre componenti dei campi sono:
  $E_r = \frac{ik}{K^2}\partial_r E_z = iC\frac{\pi\ell a}{\zeta_{mn}L}J_n'(\zeta_{mn}r/a)\sin(n\phi+\alpha)\cos\frac{\pi\ell}{L}z \; e^{-i\omega t}$
  $B_\phi = \frac{i\omega}{c^2K^2}\partial_r E_z = iC\frac{\omega a}{c^2\zeta_{mn}}J_n'(\zeta_{mn}r/a)\sin(n\phi+\alpha)\cos\frac{\pi\ell}{L}z \; e^{-i\omega t}$
  $B_r = \frac{-i\omega}{c^2K^2 r}\partial_\phi E_z = -iC\frac{\omega a^2 n}{c^2\zeta_{mn}^2 r}J_n(\zeta_{mn}r/a)\cos(n\phi+\alpha)\cos\frac{\pi\ell}{L}z \; e^{-i\omega t}$

- la lunghezza d'onda critica è $\lambda_c = 2\pi a/\zeta_{mn}$
  le lunghezze d'onda dei modi risonanti sono $\lambda_{\ell mn} = 2\pi/\left[(\zeta_{mn}/a)^2 + (\pi\ell/L)^2\right]^{1/2}$
- le frequenze di risonanza sono $\omega_{\ell mn} = c\left[(\zeta_{mn}/a)^2 + (\pi\ell/L)^2\right]^{1/2}$

I primi zeri delle funzioni di Bessel, $J_n(\zeta_{mn}) = 0$, sono:

$$\begin{array}{lllllll} n=0 & \zeta_{m0} = & 2.405 & 5.550 & 8.654 & \ldots \\ n=1 & \zeta_{m1} = & 3.832 & 7.016 & 10.173 & \ldots \end{array}$$

Il modo più semplice è con $n = 0$ per cui non si ha dipendenza dei campi dall'angolo azimutale e risulta $E_\phi = 0$, $B_r = 0$. Per $m = 1$: $\lambda_c = 2\pi a/\zeta_{10} = 2.61a$.

Nel modo TM_{010}, $\ell = 0$, non si ha dipendenza dei campi da z, la frequenza di risonanza è $\omega_{010} = c\zeta_{10}/a$; le componenti dei campi sono:

$$\begin{array}{ll} E_z = E_o J_0(\zeta_{10} r/a) & B_z = 0 \\ E_r = 0 & B_r = 0 \\ E_\phi = 0 & B_\phi = iE_o \frac{\omega a}{c^2 \zeta_{10}} J_0'(\zeta_{10} r/a) = -\frac{iE_o}{c} J_1(\zeta_{10} r/a) \end{array}$$

Nel modo TM_{110}, $\ell = 1$, la frequenza di risonanza è $\omega_{110} = c[(\zeta_{10}/a)^2 + (\pi/L)^2]^{1/2}$; le componenti dei campi sono:

$$\begin{array}{ll} E_z = E_o J_0(\zeta_{10} r/a) \cos\frac{\pi}{L} z & B_z = 0 \\ E_r = E_o \frac{\pi a}{\zeta_{10} L} J_1(\zeta_{10} r/a) \sin\frac{\pi}{L} z & B_r = 0 \\ E_\phi = 0 & B_\phi = E_o \frac{\omega_{110} a}{c^2 \zeta_{10}} J_1(\zeta_{10} r/a) \sin\frac{\pi}{L} z \end{array}$$

La Fig.1.26 mostra le linee del campo elettrico per i modi TM_{010} e TM_{110} in una cavità cilindrica. Le linee del campo magnetico sono cinconferenze coassiali con l'asse z. Dalla figura è chiaro che il modo TM_{010} è il più efficace per accelerare particelle cariche lungo l'asse z.

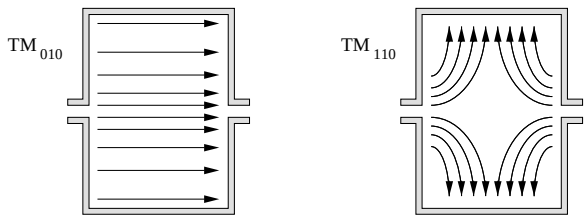


Figure 1.26: Linee del campo elettrico per i modi TM_{010} e TM_{110} in una cavità cilindrica

1.3.5 Accelerazione in cavità risonanti

In un acceleratore circolare, l'aumento di energia cinetica di una particella di carica q e velocità βc in un singolo passaggio è

$$\Delta\mathcal{E} = q\Delta V = \int_{-L/2}^{+L/2} qE_o \cos(\omega t + \phi) dz = \int_{-L/2\beta c}^{+L/2\beta c} qE_o \beta c \cos(\omega t + \phi) dt$$

dove, per $\phi = 0$ la particella è in fase con il campo accelerante nella cavità. L'aumento di velocità in un singolo passaggio è trascurabile, $\beta \simeq$ *costante*, e quindi

$$\Delta\mathcal{E} = qE_o L \, \frac{\sin \omega L/2\beta c}{\omega L/2\beta c} \, \cos\phi$$

Il *fattore di perdita*, $\sin(\omega L/2\beta c)/(\omega L/2\beta c)$, non è significativamente minore di 1 se $\omega L/2\beta c = \zeta_{10} L/2\beta a \leq 1$ cioè $L/a \leq 0.8\beta$. Questa condizione è facile da soddisfare se $\beta \simeq 1$, ma per $\beta \ll 1$ richiede che sia $L \ll a$, cioè di avere cavità corte lungo la direzione di accelerazione.

In un acceleratore lineare si hanno tante cavità allineate lungo l'asse z e, per mantenere coerenza di fase tra il campo accelerante e la particella, deve essere $L = n\beta\lambda/2$ dove L è la distanza tra le cavità e λ è la lunghezza d'onda della radiazione nelle cavità. Lo schema originario è quello di Wideroe con tubi a deriva adiacenti connessi ad un generatore alternato (Fig.1.27). In questo caso $L = \beta\lambda/2$ e il gradiente di energia è $d\mathcal{E}/dz = \Delta\mathcal{E}/\lambda = \beta q \Delta V/2L$. Un schema più efficiente è quello di Alvarez, con $L = \beta\lambda$ che, a parità di campo elettrico, produce un gradiente di energia doppio, $d\mathcal{E}/dz = \beta q \Delta V/L$. Inoltre in questo caso la corrente lungo le connessioni delle cavità è nulla e la dissipazione di potenza è minore.

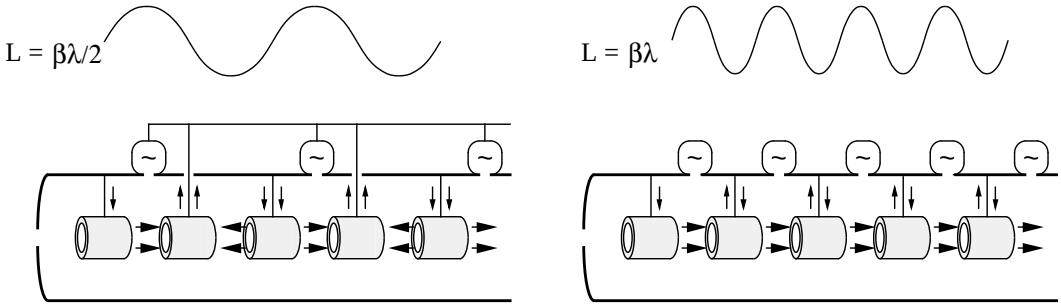


Figure 1.27: Schemi di Wideroe e di Alvarez per un acceleratore lineare

Nei moderni acceleratori LINAC-RF le particelle vengono accelerate in un guida d'onda in cui si fa in modo che la velocità di fase con cui si propaga il campo elettromagnetico sia pari alla velocità βc. Consideriamo una guida d'onda cilindrica di raggio a in cui vengono accelerati elettroni di alta energia per cui $\beta \simeq 1$. Nella guida si possono propagare le onde elettromagnetiche di frequenza $\omega > \omega_c = \zeta c/a$, dove il fattore ζ dipende dal modo eccitato nella guida. Se nella guida sono disposti dei diaframmi di raggio $b < a$ opportunamente spaziati a distanza L ($L \simeq$ costante

per $\beta \simeq 1$) si stabiliscono onde stazionarie di frequenza $\omega = \zeta/b > \omega_c$ e numero d'onda $k = \ell\pi/L$. La velocità di gruppo è nulla per un'onda stazionaria e quindi $d\omega/dk = 0$ in corrispondenza dei valori $k = \ell\pi/L$ e la relazione di dispersione nella guida viene modificata nell'andamento periodico mostrato in Fig.1.28. In questo modo è possibile realizzare la condizione in cui il campo elettromagnetico si propaga con velocità di fase $\leq c$ e cede continuamente energia alla particella.

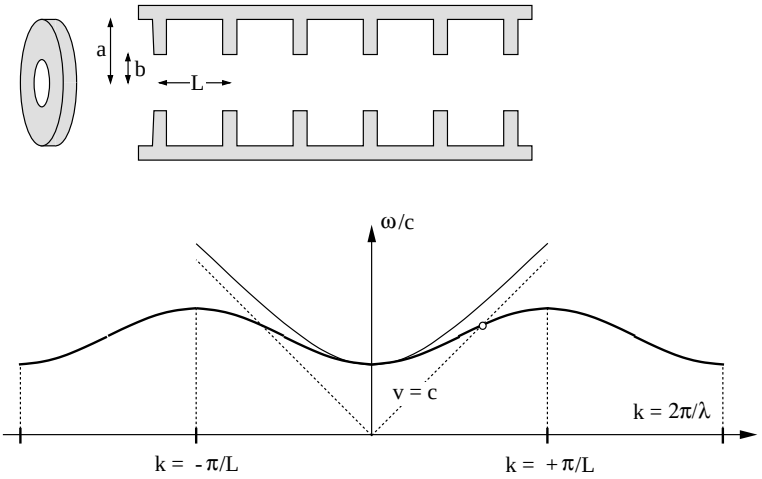


Figure 1.28: Guida d'onda a iride di un Linac-RF e relazione di dispersione nella guida d'onda

1.3.6 Oscillazioni di betatrone

In un acceleratore circolare occorre limitare la dispersione delle particelle durante i tanti giri che queste percorrono nell'anello ed è quindi opportuno studiare la configurazione del campo magnetico che minimizzi la dispersione. Consideriamo una particella di carica q e massa m che percorre una circonferenza di raggio R_o detta *orbita di riferimento*. Lungo l'orbita di riferimento il campo magnetico ha componenti $B_x = B_y = 0,\ B_z = B_o$. Consideriamo un sistema di riferimento solidale con la particella, cioè rotante alla frequenza di ciclotrone $\omega = qB/m\gamma$, con l'asse x parallelo alla direzione del moto, $\vec{v} \equiv (v, 0, 0)$, l'asse y parallelo a $\vec{r}$ e l'asse z parallelo a $\vec{B}$ (Fig.1.29).

Le equazione del moto in questo riferimento sono

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{d}{dt}\, m\gamma\dot{y} = m\gamma\ (\ddot{y} - \omega^2 R) = q\ (v_z B_x - v_x B_z) = -qvB_z$$

$$\frac{dp_z}{dt} = \frac{d}{dt}\, m\gamma\dot{z} = m\gamma\ddot{z} = q\ (v_x B_y - v_y B_x) = +qvB_y$$

$$\ddot{y} + \frac{qvB_z}{m\gamma} - \omega^2 R = \ddot{y} + \frac{q\omega(R+y)B_z}{m\gamma} - \omega^2 R = 0$$

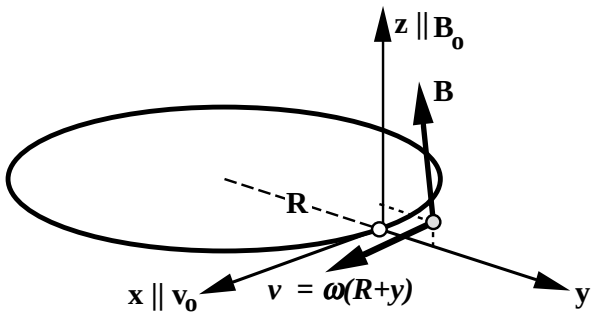


Figure 1.29: Orbita di riferimento e sistema di riferimento rotante

$$\ddot{z} - \frac{qvB_y}{m\gamma} = \ddot{z} - \frac{q\omega(R+y)B_y}{m\gamma} = 0$$

Per piccoli spostamenti dall'orbita di riferimento ($y \ll R, z \ll R$) le componenti del campo magnetico sono

$$B_z = (B_z)_o + \left(\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)_o y + \ldots \qquad B_y = (B_y)_o + \left(\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)_o z + \ldots$$

Consideriamo il caso in cui i poli del magnete siano sagomati in modo che la componente principale B_z sia

$$B_z = B_o \left(\frac{r}{R}\right)^{-n} = B_o \left(\frac{R+y}{R}\right)^{-n} \qquad \frac{\partial B_z}{\partial y} = -n\frac{B_o}{R}\left(\frac{R+y}{R}\right)^{-n-1}$$

dove n è chiamato *indice di campo*. Poiché lungo l'orbita risulta $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0$, $\partial B_z/\partial y = \partial B_y/\partial z$, si ha

$$B_y = -n\ B_o\ z/R \qquad\qquad B_z = B_o - n\ B_o\ y/R$$

Le equazioni del moto diventano

$$\ddot{y} + \frac{qB_o}{m\gamma}\ \omega\ (R+y)\ (1 - n\ \frac{y}{R}) - \omega^2 R = \ddot{y} - \omega^2\ (n-1)\ y - \omega^2\ n\ \frac{y^2}{R} = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{qB_o}{m\gamma}\ \omega\ (R+y)\ n\ \frac{z}{R} = \ddot{z} + \omega^2 nz + \omega^2\ n\ \frac{yz}{R} = 0$$

Approssimando al primo ordine si ottiene

$$\ddot{y} + (1-n)\ \omega^2\ y = 0 \qquad\qquad \ddot{z} + n\ \omega^2\ z = 0$$

cioè un moto oscillatorio nelle due direzioni nel piano trasverso al moto se è soddisfatta la condizione $0 < n < 1$. Si ha quindi, per piccoli spostamenti dall'orbita di riferimento, una forza di richiamo che produce *oscillazioni di betatrone* nel piano orizzontale e nella direzione verticale con frequenza

$$\omega_H = \omega\ \sqrt{1-n} \qquad\qquad \omega_V = \omega\ \sqrt{n}$$

Questo metodo di compensare piccoli spostamenti dall'orbita di riferimento è detto *focheggiamento debole*. La lunghezza d'onda delle oscillazioni di betatrone (a parte il fattore 2π) è chiamata *funzione beta*

$$ß_H = \frac{R}{\sqrt{1-n}} \qquad ß_V = \frac{R}{\sqrt{n}}$$

1.3.7 Trasporto dei fasci

Per descrivere la traiettoria di una particella negli elementi di un'acceleratore conviene utilizzare una rappresentazione che esprima per ciascun elemento le coordinate finali in funzione di quelle iniziali. Indichiamo con s la coordinata lungo la traiettoria di riferimento, con $y(s),\ z(s)$ gli spostamenti radiale e verticale e con $y'(s) = dy/ds = \tan\theta_y$, $z'(s) = dz/ds = \tan\theta_z$ le derivate. Queste sono legate alle derivate rispetto al tempo da

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\,\frac{ds}{dt} = vy' \qquad \ddot{y} = v^2 y'' \qquad \ldots$$

dove v è la velocità lungo la traiettoria di riferimento. In una regione senza campi magnetici la particella percorre una retta

$$y(s) = y_o + y'_o s \qquad y'(s) = y'_o \qquad \ldots$$

che, per un tratto di lunghezza $\Delta s = \ell$, si può rappresentare con le trasformazioni

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_o \\ y'_o \end{pmatrix} = M_y \cdot \begin{pmatrix} y_o \\ y'_o \end{pmatrix}$$

e analoga per la proiezione verticale. Per il generico elemento k le *matrici di trasporto* sono definite

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_k = M_y^k \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{k-1} \qquad \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_k = M_z^k \cdot \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_{k-1}$$

di modo che le coordinate e gli angoli rispetto alla traiettoria di riferimento all'uscita dell'elemento k si ottengono dai valori iniziali applicando la matrice prodotto delle matrici di trasporto dei singoli elementi

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_k = M_y^k \cdot M_y^{k-1} \ldots M_y^1 \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_o \qquad \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_k = \ldots$$

Se non vi sono effetti dissipativi, le matrici di trasporto hanno determinate unitario, $Det(M) = 1$.

Le equazioni del moto in un magnete a focheggiamento debole sono

$$y'' + \frac{1}{ß_H^2}\, y = 0 \qquad z'' + \frac{1}{ß_V^2}\, z = 0$$

e hanno soluzioni

$$y = A\cos s/ß + B\sin s/ß \qquad\qquad y(0) = A$$

$$y' = -(A/ß)\sin s/ß + (B/ß)\cos s/ß \qquad y'(0) = B/ß$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s/ß_H & ß_H \sin s/ß_H \\ -\frac{1}{ß_H}\sin s/ß_H & \cos s/ß_H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_o \\ y'_o \end{pmatrix}$$

e analoga per la coordinata verticale.

Le relazioni precedenti mostrano che le ampiezze delle oscillazioni di betatrone sono proporzionali a $ß_H y'_o$ e $ß_V z'_o$. D'altra parte nella condizione di focheggiamento debole, $0 < n < 1$, non si può fare in modo che entrambe le funzioni beta siano piccole rispetto al raggio dell'orbita di accelerazione e questa è una seria limitazione per raggiungere energie elevate con un sincrotrone: aumentando il raggio aumenta l'ampiezza di oscillazione e quindi la dispersione del fascio nel piano trasverso. Se facciamo in modo che sia $n \gg 1$, cioè $ß_V = R/\sqrt{n} \ll R$, le oscillazioni nel piano verticale sono di piccola ampiezza, ma il fascio diverge nel piano orizzontale perché l'equazione del moto ha soluzione

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh s/ß_H & ß_H \sinh s/ß_H \\ \frac{1}{ß_H}\sinh s/ß_H & \cosh s/ß_H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_o \\ y'_o \end{pmatrix}$$

con $ß_H = R/\sqrt{n-1} \ll R$.

Quindi un magnete con indice di campo $n > 1$ ha una azione focalizzante in una proiezione e defocalizzante nell'altra. Consideriamo due magneti che abbiano i gradienti di campo scambiati e lunghezza ℓ minore delle lunghezze d'onda di betatrone in entrambe le proiezioni. Per $\ell/ß \ll 1$ le matrici di trasporto si approssimano al primo ordine

$$M_1^F = \begin{pmatrix} \cos \ell/ß_1 & ß_1 \sin \ell/ß_1 \\ -\frac{1}{ß_1}\sin \ell/ß_1 & \cos \ell/ß_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ -\ell/ß_1^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2^D = \begin{pmatrix} \cosh \ell/ß_2 & ß_2 \sinh \ell/ß_1 \\ +\frac{1}{ß_2}\sinh \ell/ß_2 & \cosh \ell/ß_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ +\ell/ß_2^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Queste relazioni sono simili a quelle delle lenti in ottica. Una lente di distanza focale f (Fig.1.30) è caratterizata da una matrice di trasporto

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_o \\ y'_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_o + by'_o \\ cy_o + dy'_o \end{pmatrix}$$

La condizione di *lente sottile*, $y = y_o \; \forall \; y'_o$, comporta $a = 1$, $b = 0$. La condizione sul determinante, $ad = 1$, comporta $d = 1$. Per un fascio parallelo, $y'_o = 0$, la deflessione è $y' = y_o/f$ per una lente divergente e $y' = -y_o/f$ per una convergente. Quindi una lente sottile è caratterizzata dalle matrici di trasporto

$$M^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad M^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +1/f & 1 \end{pmatrix}$$

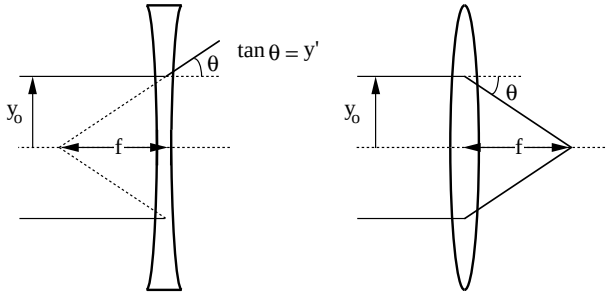


Figure 1.30: Ottica delle lenti sottili

cioè una lente *convergente* ha il termine $1/f$ *negativo*. Una lente di spessore ℓ si può rappresentare come una lente sottile tra due spazi vuoti di lunghezza $\ell/2$

$$\begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \pm \ell/2f & \ell + \dots \\ \pm 1/f & 1 \pm \ell/2f \end{pmatrix}$$

e la matrice di trasporto è uguale a quella dei magneti con $\ell/ß^2 = 1/f$.

Se i due magneti sono separati da una distanza δ la matrice di trasporto, per $\delta \ll \ell$, è

$$M_1^F M_\delta M_2^D = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ -\ell/ß_1^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ +\ell/ß_2^2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 + \ell^2/ß_2^2 & 2\ell \\ -\ell^3\delta/ß_1^2 ß_2^2 & 1 - \ell^2/ß_1^2 \end{pmatrix}$$

Se si cambia l'ordine $(M_1^D M_\delta M_2^F)$ si scambiano tra loro i termini diagonali ma non cambiano gli altri. Quindi l'azione combinata dei due magneti è focalizzante in entrambe le proiezioni. Questo metodo di trasporto è detto *focheggiamento forte* ed è utilizzato nei sincrotroni che accelerano protoni ad energia elevata con una serie di dipoli con numero d'ordine n elevato a *gradiente alternato* (Fig.1.31).

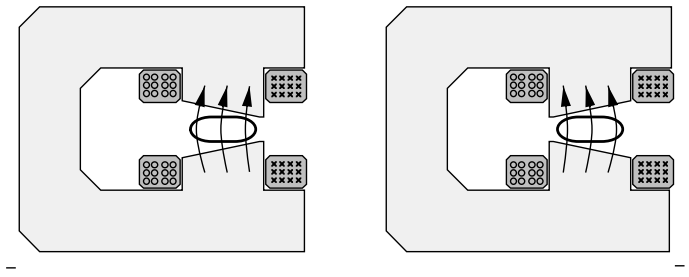


Figure 1.31: Dipoli curvanti a gradiente alternato

Nello schema di focheggiamento forte con dipoli a gradiente alternato i magneti hanno la duplice funzione di curvare la traiettoria delle particelle e di limitare l'ampiezza delle oscillazioni di betatrone. Questo schema è utilizzato con successo nei proto-sincrotroni, ma ha lo svantaggio di non essere flessibile. Inoltre, in alcuni

casi, occorre focalizzare il fascio di particelle per aumentarne il flusso. I *quadrupoli* sono magneti con elevato gradiente di campo che hanno la proprietà di focalizzare le traiettorie delle particelle in una proiezione (ma di defocalizzarla nell'altra proiezione) in una lunghezza limitata.

Un quadrupolo (Fig.1.32) è realizzato avvolgendo quattro bobine attorno a quat-

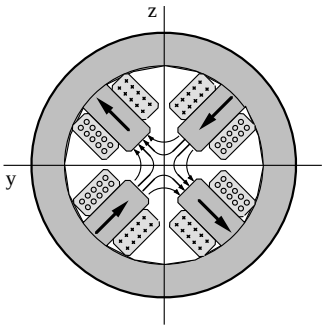


Figure 1.32: Quadrupolo

tro espansioni polari simmetriche in modo da realizzare vicino all'asse un campo magnetico di componenti

$$B_x = 0 \qquad B_y = \pm\, G\; z \qquad B_z = \pm\, G\; y$$

G è il gradiente di campo che è positivo o negativo secondo il verso della corrente nelle bobine, ma uguale nelle due proiezioni poiché $\partial B_y/\partial z = \partial B_z/\partial y$. Le equazioni del moto di una particella di carica q, massa m e che ha velocità v lungo l'asse x sono

$$dp_y/dt = m\gamma\ddot{y} = q(v_z B_x - v_x B_z) = \mp\, qvB_z = \mp\, qvG\; y$$
$$dp_z/dt = m\gamma\ddot{z} = q(v_x B_y - v_y B_x) = \pm\, qvB_y = \pm\, qvG\; z$$

Passando a coordinate lungo la traiettoria, le equazioni diventano

$$m\gamma v^2\; y'' = \mp\, qvG\; y \qquad\qquad y'' \pm\; (qG/p)\; y = 0$$
$$m\gamma v^2\; z'' = \pm\, qvG\; z \qquad\qquad z'' \mp\; (qG/p)\; z = 0$$

e, scegliendo uno dei due versi, si hanno le soluzioni già trovate per i dipoli con gradiente di campo

$$M^F = \begin{pmatrix} \cos \ell/ß & ß \sin \ell/ß \\ -\frac{1}{ß} \sin \ell/ß & \cos \ell/ß \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ -\ell/ß^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^D = \begin{pmatrix} \cosh \ell/ß & ß \sinh \ell/ß \\ +\frac{1}{ß} \sinh \ell/ß & \cosh \ell/ß \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ +\ell/ß^2 & 1 \end{pmatrix}$$

con $ß = \sqrt{p/qG}$. Invertendo il senso della corrente nelle bobine si inverte il segno del gradiente $G \to -G$ (equivale a ruotare il quadrupolo di $\pi/2$) e le conclusioni

non cambiano. Un quadrupolo di lunghezza ℓ si comporta, per una particella di quantità di moto p, come una lente convergente in una proiezione e divergente nell'altra con distanze focali uguali, $f = p/qG\ell$. Una coppia di quadrupoli ha un'azione focalizzante in entrambe le proiezioni. I quadrupoli possono avere un gradiente di campo molto elevato e quindi una piccola distanza focale anche con lunghezze limitate. I moderni sincrotroni a focheggiamento forte sono costituiti da un *reticolo* in cui l'elemento base, la *cella del reticolo*, è una serie di magneti curvanti con indice di campo $n = 1$ e una coppia di quadrupoli FD.

Finora abbiamo considerato un fascio monocromatico di particelle, cioè senza dispersione in impulso. In realtà le particelle durante l'accelerazione hanno impulsi diversi e seguono traiettorie diverse. Introcucendo il *fattore di dispersione*, $\delta p/p = -\delta\omega/\omega$, l'equazione del moto nel piano radiale viene modificata

$$\ddot{y} + \omega^2\ (1-n)\ y = -\omega\ \delta\omega\ R = \omega^2\ R\ \frac{\delta p}{p} \qquad\qquad y'' + \frac{1-n}{R^2}\ y = \frac{1}{R}\ \frac{\delta p}{p}$$

Questa ha soluzione

$$y = A\cos\frac{s}{ß} + B\sin\frac{s}{ß} + \frac{ß^2}{R}\ \frac{\delta p}{p} \qquad\qquad y' = -\frac{A}{ß}\sin\frac{s}{ß} + \frac{B}{ß}\cos\frac{s}{ß}$$

con le condizioni iniziali

$$y_o = A + \frac{ß^2}{R}\ \left(\frac{\delta p}{p}\right)_o \qquad\qquad y'_o = \frac{B}{ß}$$

e la matrice di trasporto nel piano radiale diventa una matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \delta p/p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s/ß & ß\sin s/ß & \frac{ß^2}{R}(1-\cos s/ß) \\ -\frac{1}{ß}\sin s/ß & \cos s/ß & \frac{ß}{R}\sin s/ß \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \delta p/p \end{pmatrix}_o$$

1.3.8 Emittanza

Per un fascio di particelle, come in un fluido in assenza di effetti dissipativi, vale il *teorema di Liouville*: la densità $f(\vec{x}, \vec{p}, t) = d^6n/d\vec{r}d\vec{p}$ si conserva durante il moto nell'acceleratore. Questo impone alcune proprietà delle matrici di trasporto che descrivono le traiettorie nel piano trasverso e nel piano radiale. Le matrici sono unitarie e hanno $Det(M) = 1$. In generale le matrici di trasporto nel reticolo dell'acceleratore si esprimono

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cos\mu + \begin{pmatrix} \eta & ß \\ -\zeta & -\eta \end{pmatrix}\sin\mu$$

dove $\eta(s), \zeta(s), ß(s)$ sono funzioni periodiche del reticolo e la condizione sul determinante è $\zeta ß - \eta^2 = 1$.

In un reticolo periodico le equazioni del moto sono del tipo

$$y'' + \left(\frac{1}{R^2} + \frac{q}{p}\frac{\partial B_z}{\partial y}\right) y = \frac{\delta p/p}{R} \qquad\qquad z'' + \frac{q}{p}\ \frac{\partial B_y}{\partial z}\ z = 0$$

e la soluzione si può esprimere nella forma

$$y(s) = \sqrt{\varepsilon_y ß(s)}\ \cos(\mu(s) + \phi) \qquad\qquad \mu(s) = \int_s^{s+\ell} \frac{ds'}{ß(s')}$$

dove $ß(s)$ è la *funzione di betatrone* che ha dimensione $[m]$, $\mu(s)$ è la *fase di betatrone*, ℓ è il periodo del reticolo, ε_y e ϕ sono costanti. E analoga soluzione si ha nel piano verticale. La derivata della soluzione è

$$y' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{ß}}\ \frac{ß'}{2}\ \cos(\mu + \phi) - \sqrt{\varepsilon ß}\ \mu'\ \sin(\mu + \phi) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{ß}}\ \frac{ß'}{2}\ \cos(\mu + \phi) - \sqrt{\frac{\varepsilon}{ß}}\ \sin(\mu + \phi)$$

con le condizioni iniziali

$$y_o = \sqrt{\varepsilon ß_o}\ \cos\phi \qquad\qquad y'_o = \sqrt{\frac{\varepsilon}{ß_o}}\ \frac{ß'_o}{2}\ \cos\phi - \sqrt{\frac{\varepsilon}{ß_o}}\ \sin\phi$$

$$y_o\ \frac{ß'_o}{2} - ß_o y'_o = \sqrt{\varepsilon ß_o}\ \sin\phi$$

Tenuto conto che per questa soluzione si ha $\eta = -ß'/2$, dalla relazione di unitarietà, $\zeta ß = 1 + ß'^2/4$, risulta

$$\varepsilon ß_o = y_o^2\ (1 + ß'^2_o/4) - ß_o ß'_o y_o y'_o + ß_o^2 y'^2_o = \zeta_o ß_o y_o^2 - ß_o ß'_o y_o y'_o + ß_o^2 y'^2_o$$

$$\varepsilon = \zeta_o y_o^2 - ß'_o y_o y'_o + ß_o y'^2_o$$

Se calcoliamo per la soluzione i valori $y^2,\ yy',\ y'^2$

$$y^2 = \varepsilon ß\ \cos^2\mu \qquad\qquad yy' = \varepsilon\ \left(\frac{ß'}{2}\cos^2\mu - \sin\mu\cos\mu\right)$$

$$y'^2 = \varepsilon\left(\frac{ß'^2}{4ß}\cos^2\mu - \frac{ß'}{ß}\sin\mu\cos\mu + \frac{1}{ß}\sin^2\mu\right)$$

troviamo che ε_y è una costante del moto

$$\zeta y^2 - ß' yy' + ß y'^2 = \varepsilon_y$$

Questa, tenuto conto della relazione tra i coefficienti, è l'equazione di un ellisse nel piano $y - y'$, con centro in $y = 0,\ y' = 0$, e ogni particella nel moto lungo l'acceleratore ha valori delle coordinate $y(s),\ y'(s)$ che cambiano da punto a punto, ma sempre su un ellisse. Nel caso che sia $ß' = 0$, $\zeta = \frac{1}{ß}$, l'equazione diventa

$$\frac{y^2}{ß} + ß y'^2 = \varepsilon_y$$

e l'ellisse ha assi paralleli alle coordinate e semiassi uguali a $\sqrt{\varepsilon_y ß}$ e $\sqrt{\varepsilon_y/ß}$. Tutte queste cosiderazioni sono anche valide nel piano $z - z'$. L'area dell'ellissi è pari a $\pi\varepsilon$, ed è chiamata *emittanza* $[m \times rad]$ e rappresenta l'estensione dello spazio delle fasi occupato dal fascio nel piano $y - y'$ $(z - z')$.

Per ogni coppia di *variabili coniugate* (y, p_y), (z, p_z), in assenza di effetti dissipativi, si ha lungo un ciclo $\oint p_y dy = costante$, $\oint p_z dz = costante$

$$p_y = m\gamma\dot{y} = mc\beta\gamma y' \qquad\qquad \oint \beta\gamma y' dy = \beta\gamma\pi\varepsilon_y = costante$$

e analogamente $\beta\gamma\pi\varepsilon_z = costante$. La quantità $\beta\gamma\pi\varepsilon$ è chiamata *emittanza invariante*. Quando il fascio aumenta l'energia (l'aumento in un ciclo è molto piccolo) le emittanze $\beta\gamma\pi\varepsilon$ si mantengono costanti e lo spazio delle fasi, $\pi\varepsilon$, occupato dal fascio nei piani $y - y'$, $z - z'$, diminuisce proporzionalmente a $1/\beta\gamma$. Poiché l'emittanza definisce le dimensioni della camera a vuoto in cui circola il fascio e $\pi\varepsilon$ è molto maggiore all'iniezione che alla fine del ciclo di accelerazione, per accelerare particelle ad energia elevata si usano di solito acceleratori in cascata in modo da limitare l'emittanza all'iniezione.

1.3.9 Oscillazioni di sincrotrone

Gli acceleratori di alta energia funzionano con il principio di accelerazioni multiple e le particelle, per aumentare l'energia, devono pasare nelle cavità RF in fase con il campo elettrico acceleratore a frequenza ω_{RF}. Poiché le particelle hanno una dispersione nel tempo di attraversamento delle cavià, δt, l'aumento di energia è possibile se piccole variarioni di fase $\delta\phi = \omega_{RF}\delta t$ vengono compensate. Le condizioni di *stabilità di fase* sono state dismostrate da Veksler e McMillan nel 1945.

Se $\Delta V = V_o \sin\omega_{RF} t$ è la differenza di potenziale nella cavità, una particella che la attraversa ha una variazione di energia $qV_o \sin(\omega_{RF} t + \phi)$, dove ϕ è la fase che tiene conto dell'istante di attraversamento. Definiamo *particella sincrona* la particella che percorre l'orbita di riferimento e che sia sempre in fase: $\phi_s = costante$, questa ha frequenza $\omega_s = \omega_{RF}/h$ con $h = intero$ e ha energia E_s.

Consideriamo l'esempio dell'acceleratore lineare (Fig.1.33). Una generica parti-

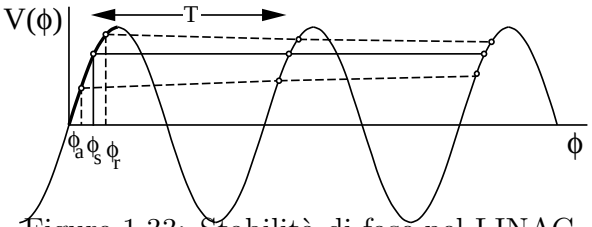


Figure 1.33: Stabilità di fase nel LINAC

cella ha energia $E = E_s + \delta E$, fase $\phi = \phi_s + \delta\phi$ e frequenza $\omega = \omega_s + \delta\omega$. Dopo aver attraversato la cavità la particella ha energia

$$E' = E_s + \delta E + qV_o \sin(\phi_s + \delta\phi) =$$

$$= E_s + qV_o \sin\phi_s \cos\delta\phi + \delta E + qV_o \cos\phi_s \sin\delta\phi \approx E_s' + \delta E + qV_o\delta\phi\cos\phi_s$$

La variazione di energia rispetto alla particella sincrona è $\delta E' = \delta E + qV_o\delta\phi\cos\phi_s$. Supponiamo che la particella abbia energia maggiore di E_s e che sia in anticipo di fase, $\delta\phi < 0$: la variazione di energia è minore se $\delta\phi\cos\phi_s < 0$, e la particella si avvicina alla particella sincrona se $\cos\phi_s > 0$. Se la particella ha energia minore di E_s ed è in ritardo di fase, $\delta\phi > 0$, la variazione di energia è maggiore se $\delta\phi\cos\phi_s > 0$, e la particella si avvicina alla particella sincrona se $\cos\phi_s > 0$. Quindi in entrambe i casi si ha stabilità di fase se $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. Poiché per aumentare l'energia deve essere $0 < \phi < \pi$, le particelle che attraversano la cavità con $0 < \phi < \pi/2$ vengono accelerate e oscillano attorno alla fase della particella sincrona. Queste oscillazioni di fase (e di energia) sono chiamate *oscillazioni di sincrotrone*.

In un acceleratore circolare particelle di impulso diverso percorrono traiettorie diverse e hanno frequenze angolari diverse (Fig.1.34). Il rapporto tra la variazione della

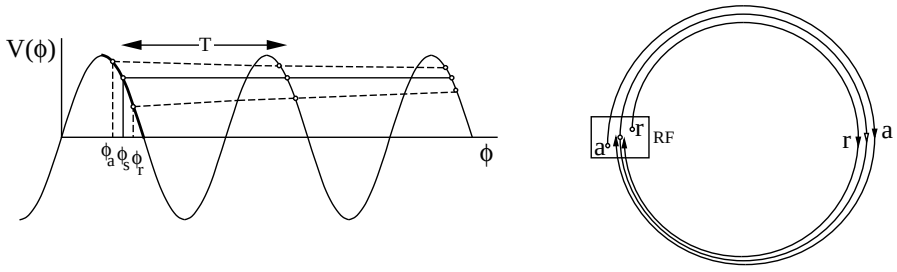


Figure 1.34: Stabilità di fase nell'acceleratore circolare

lunghezza dell'orbita, ℓ, e la variazione di impulso è un parametro dell'acceleratore chiamato *fattore di compressione di impulso*

$$\alpha_p = \frac{d\ell/\ell}{dp/p}$$

Il rapporto tra la variazione della frequenza angolare e la variazione di impulso

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{d\beta}{\beta} - \frac{dr}{r} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{dp}{p} - \alpha_p\frac{dp}{p} \qquad \frac{dp}{p} = \frac{d\beta}{\beta} + \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{d\beta}{\beta} + \beta^2\gamma^2\frac{d\beta}{\beta} = \gamma^2\frac{d\beta}{\beta}$$

è legato a α_p e dipende dall'energia

$$\eta = \frac{d\omega/\omega}{dp/p} = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_p$$

quindi negli acceleratori circolari si può avere stabilità di fase in condizioni diverse secondo se la velocità aumenta più rapidamente della lunghezza della traiettoria (a bassa energia) o più lentamente (ad alta energia) passando per una *energia di transizione* quando $1/\gamma^2 = \alpha_p$.

Se indichiamo con $\Delta E = qV_0 \sin\phi$ la variazione di energia per giro e se facciamo l'ipotesi che le variazioni siano lente rispetto alla frequenza, la variazione della differenza di energia rispetto alla particella sincrona in un periodo T è

$$\Delta\delta E = qV_o(\sin\phi - \sin\phi_s) \approx \frac{d\delta E}{dt}\ T \qquad\qquad \frac{d\delta E}{dt} \approx \frac{qV_o}{2\pi}\ \omega_s(\sin\phi - \sin\phi_s)$$

la variazione della fase in un periodo è ($\delta T/T = -\delta\omega/\omega = -\eta\delta p/p$)

$$\Delta\delta\phi \approx \omega_s\delta T \approx -\omega_{RF}T\eta\ \frac{\delta p}{p} = -\omega_{RF}T\eta\ \frac{\delta E}{\beta^2 E} \qquad\qquad \frac{d\delta\phi}{dt} \approx \frac{\Delta\delta\phi}{T} = -\frac{\omega_{RF}\eta}{\beta_s^2 E_s}\ \delta E$$

Da queste relazioni si ottiene l'equazione della fase

$$\frac{d^2}{dt^2}\ \delta\phi = -\frac{\omega_{RF}\eta}{\beta_s^2 E_s}\ \frac{d}{dt}\ \delta E = -h\ \frac{\omega_s^2\eta}{2\pi\beta_s^2}\ \frac{qV_o}{E_s}\ (\sin\phi - \sin\phi_s)$$

che, per piccoli sfasamenti, $\sin\phi = \sin(\phi_s + \delta\phi) \approx \sin\phi_s + \delta\phi\cos\phi_s$, diventa

$$\frac{d^2}{dt^2}\ \delta\phi + \Omega_s^2\ \delta\phi = 0 \qquad\qquad \Omega_s = \omega_s\left(\frac{h\eta\cos\phi_s}{2\pi\beta_s^2}\ \frac{qV_o}{E_s}\right)^{1/2}$$

Si hanno oscillazioni di fase se Ω_s è reale. Sotto l'energia di transizione, $\eta > 0$, si ha stabilità di fase per $\cos\phi_s > 0$, cioè $0 < \phi < \pi/2$ come nel caso del $LINAC$. Infatti in un acceleratore lineare il raggio di curvatura è infinito, $\alpha_p = 0$ e η è sempre positivo. Sopra l'energia di transizione, $\eta < 0$, si ha stabilità di fase per $\cos\phi_s < 0$, quindi $\pi/2 < \phi < \pi$. Questo è il caso dell'elettro-sincrotrone in cui γ è grande e si fa in modo di operare sempre sopra l'energia di transizione. La maggior parte dei protosincrotroni devono passare attraverso l'energia di transizione durante il ciclo di accelerazione e quindi devono effettuare un cambiamento della fase di ω_{RF}.

1.3.10 Anelli di collisione

In esperimenti di fisica subnucleare è importante convertire l'energia cinetica delle particelle nello stato iniziale in energia disponibile nello stato finale per produrre particelle di massa elevata. Negli esperimenti in cui si invia un fascio di particelle di impulso $\vec{p}$ su un bersaglio fermo nel laboratorio parte dell'energia del fascio non è disponibile per produrre particelle perché viene utilizzata per conservare l'impulso totale. Se invece si fanno collidere due fasci che nel laboratorio hanno impulso uguale e opposto tutta l'energia è disponibile nello stato finale perché l'impulso totale nel laboratorio è nullo. L'energia nello stato finale è pari al modulo del quadri-impulso. In un esperimento a bersaglio fissso si ha ($c = 1$), $P_1 = (\vec{p}_1, E_1)$, $P_2 = (0, m_2)$

$$(P_1 + P_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2$$

In un esperimento a fasci collidenti, $P_1 = (\vec{p}, E_1)$, $P_2 = (-\vec{p}, E_2)$

$$(P_1 + P_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 + 2p^2$$

Per $E \gg m$ si ha $E_{cm} \approx \sqrt{2Em}$ nel primo caso e $E_{cm} = 2E$ nel secondo.

Particelle di carica q con impulso $\vec{p}$ e antiparticelle di carica opposta $-q$ con impulso opposto $-\vec{p}$ possono essere accelerate nello stesso anello utilizzando lo stesso campo elettrico acceleratore e lo stesso campo magnetico curvante. Infatti la forza acceleratrice è nei due casi parallela all'impulso e la forza centripeta è la stessa

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \qquad \frac{d}{dt}(-\vec{p}) = -q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Un parametro importante degli anelli di collisione è la *luminosità* che definisce il numero di reazioni che avvengono nell'unità di tempo. Per un esperimento a bersaglio fisso abbiamo definito la luminosità come il prodotto *flusso del fascio* $\times$ *numero di particelle bersaglio*. In un anello di collisione, con N_1 e N_2 particelle per fascio, la luminosità è

$$L = \frac{N_1}{S\Delta t}\ N_2 = f\ \frac{N_1 N_2}{S}$$

dove f è la frequenza di incrocio dei fasci e S è la superficie di sovrapposizione dei fasci. Per avere luminosità elevata occorre ridurre al minimo la sezione dei fasci nel punto di incrocio cioè ridurre il valore di ß con quadrupoli focalizzanti.

Gli anelli di collisione, una volta accelerati i fasci all'energia di operazione, funzionano in regime continuo. Il numero di particelle circolanti diminuisce col tempo per effetto delle interazioni delle particelle con il gas residuo nella camera a vuoto e con le altre particelle. Un'altro parametro importante è la *vita media* della luminosità che è tipicamente di alcune ore. Oltre agli anelli di collisione protone-antiprotone e elettrone-positrone, che funzionano con un solo anello, sono utilizzati anche anelli di collisione protone-protone e elettrone-protone che però funzionano con due anelli distinti che si incrociano in più punti.

1.3.11 Radiazione di sincrotrone

Una carica elettrica accelerata emette radiazione elettromagnetica. L'energia emessa per unità di tempo è data dalla formula di Larmor (appendice 4.7) ed è invariante

$$W = \frac{2}{3}\ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o c^3}\ c^2\gamma^4 \left[\gamma^2 \left(\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] \qquad [eV\ s^{-1}]$$

La potenza emessa dipende dalla quarta potenza di $\gamma = E/mc^2$ e quindi, a parità di energia, è molto maggiore per particelle di massa piccola (elettroni) che non per masse grandi (protoni).

In un acceleratore lineare l'accelerazione è parallela alla velocità, $d\vec{\beta}/dt \parallel \vec{\beta}$, e la potenza è

$$W = \frac{2}{3}\ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o c}\ \gamma^4\ (\gamma^2\beta^2 + 1) \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \frac{2}{3}\ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o c}\ \gamma^6 \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2$$

Poiché per valori grandi di γ, $\beta \to 1$ e $d\beta/dt$ è molto piccolo, negli acceleratori lineari l'energia emessa è molto piccola ed è facilmente compensata dal campo elettrico accelerante.

In un acceleratore circolare vi è una accelerazione centripeta ortogonale alla velocità, $d\vec{\beta}/dt \perp \vec{\beta}$. Trascurando l'accelerazione longitudinale, che è molto più piccola, la potenza è

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o c} \gamma^4 \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2$$

L'accelerazione centripeta è $d\vec{\beta}/dt = \vec{\omega} \wedge \vec{\beta}$. Se R è il raggio di curvatura, l'accelerazione è $|d\beta/dt| = \beta^2 c/R$ e la potenza è

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o} c \frac{\beta^4\gamma^4}{R^2}$$

L'energia emessa per giro, che deve essere fornita dalle cavità RF, è

$$\Delta E_{giro} = \oint W dt \approx WT = \frac{2\pi R}{\beta c} \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o} c \frac{\beta^4\gamma^4}{R^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o} \frac{\beta^3\gamma^4}{R}$$

Per un elettrone, $e^2/4\pi\epsilon_o = r_e m_e c^2$,

$$W = \frac{2}{3} \frac{r_e c}{R^2} m_e c^2 \beta^4\gamma^4 \qquad \Delta E_{giro} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{R} m_e c^2 \beta^3\gamma^4$$

La radiazione emessa si chiama *radiazione di sincrotrone*. Negli elettro-sincrotroni di alta energia l'energia fornita dalle cavità RF è spesa per compensare l'energia emessa per radiazione di sincrotrone più che per accelerare i fasci. Negli anelli di collisione elettrone-positrone, anche quando è stata raggiunta l'energia di operazione, occorre continuamente rifornire con le cavità RF l'energia irraggiata. Poiché ΔE_{giro} è inversamente proporzionale a R, gli anelli di collisione e^+e^- di alta energia sono costruiti con grandi raggi di curvatura.

La radiazione di sincrotrone ha comunque benefici effetti sul comportamento dei fasci negli acceleratori di elettroni. L'emissione di radiazione è un effetto non conservativo che viola il teorema di Liouville e che può essere utilizzato per attenuare l'ampiezza delle oscillazioni di betatrone e quindi per ridurre lo spazio delle fasi nel piano trasverso. La dispersione angolare del fascio è $\langle\theta\rangle = \sqrt{\epsilon/ß}$ mentre l'angolo di emissione della radiazione è $\approx 1/\gamma$, come illustrato nel seguito. Se $1/\gamma \ll \langle\theta\rangle$ l'emissione di radiazione non cambia apprezzabilmente la direzione dell'elettrone e il risultato è che si riducono sia la componente trasversa che la componente longitudinale della quantità di moto, $p'_T = ap_T$, $p'_L = ap_L$, con $a < 1$. Le cavità risonanti accelerano l'elettrone nella direzione longitudinale in modo da compensare l'energia irraggiata, $p''_L = p_L$, con il risultato che si riduce l'angolo $\theta'' = p''_T/p''_L = a\theta$. Quindi, sfruttando l'emissione di radiazione di sincrotrone si possono ottenere fasci di piccole dimensioni nel piano trasverso e questo permette di ottenere elevate luminosità negli anelli di collisione e^+e^-.

Una importante applicazione della radiazione di sincrotrone emessa da acceleratori circolari di elettroni è la produzione di sorgenti di radiazione elettromagnetica con particolari caratteristiche di intensità, direzionalità e banda di frequenza. Nel riferimento solidale con la particella carica la distribuzione angolare della potenza emessa (appendice 4.7) è

$$\frac{dW}{d\Omega'} = \frac{r_e m_e c^2}{4\pi c}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \sin^2\psi$$

dove ψ è l'angolo tra l'accelerazione e la direzione di emissione (Fig.1.35). Nel

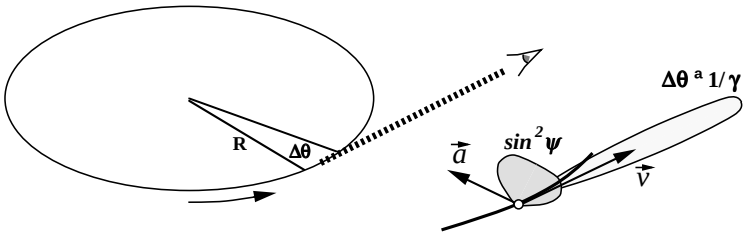


Figure 1.35: Emissione di radiazione di sincrotrone

laboratorio la carica ha velocità βc e la distribuzione della radiazione emessa ad angolo polare θ rispetto alla direzione della velocità è

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{r_e m_e c^2}{4\pi c}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left(1 - \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}\ \sin^2\theta\cos^2\phi\right)$$

Per $\beta \to 1$, $\beta \approx 1 - 1/2\gamma^2$, l'angolo solido si contrae, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, e la distribuzione angolare, mediando sull'angolo azimutale ϕ, diventa

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{r_e m_e c^2}{4\pi c}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \frac{8\gamma^6}{(1+\gamma^2\theta^2)^3}\left(1 - \frac{2\gamma^2\theta^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^2}\right)$$

Il valore massimo della distribuzione si ha per $\theta = 1/2\gamma$ e il valore quadratico medio della distribuzione è $\sqrt{<\theta^2>} = 1/\gamma$: la radiazione di sincrotrone è concentrata in un cono di semiapertura $\approx 1/\gamma$ attorno alla direzione del moto della carica.

Il calcolo dello spettro di frequenza emesso è piuttosto complicato. Per valutare le frequenze tipiche consideriamo una carica in moto in un anello di raggio R. Un osservatore sul piano dell'anello vede la radiazione emessa lungo un tratto $\Delta\ell \approx R\Delta\theta \approx R/\gamma$. La durata dell'impulso τ è la differenza tra il tempo di percorrenza del tratto $\Delta\ell$ a velocità βc da parte dell'elettrone e il tempo di percorrenza della corda $2R\sin\Delta\theta/2$ a velocità c da parte della radiazione

$$\tau = \frac{R}{\gamma\beta c} - \frac{2R\sin 1/2\gamma}{c} = \frac{R}{\beta\gamma c}(1-\beta) \approx \frac{R}{\beta\gamma c}\ \frac{1-\beta^2}{2}$$

Lo spettro in frequenza è la trasformata di Fourier della distribuzione temporale. Se assumiamo un impulso uniforme di durata τ, lo spettro in frequenza è approssimativamente uniforme e si estende fino alla

$$\textit{frequenza critica} \qquad \omega_c = \frac{1}{\tau} = 2\gamma^3\omega_o$$

dove $\omega_o = \beta c/R$ è la frequenza di rivoluzione del fascio. Acceleratori circolari di elettroni di alta energia producono fasci intensi e collimati di raggi X con energia fino a $\approx 10\ keV$ cioè lunghezza d'onda $\lambda \approx 1\ \mathring{A}$ e vengono utilizzati per lo studio delle proprietà di strutture molecolari e cristalline.

Calcoli accurati dimostrano che lo spettro di potenza emessa sotto forma di radiazione di sincrotrone è rappresentato da una funzione universale del rapporto $x = \omega/\omega_c$

$$\frac{dW}{d\omega} = \hbar\omega\ \frac{d\dot{N}_\gamma}{d\omega} = \frac{W}{\omega_c}\ S(\omega/\omega_c)$$

con $\int S(x)\ dx = 1$. La funzione di distribuzione $S(x)$ è mostrata in Fig.1.36. Per $\omega \ll \omega_c$ aumenta con una legge di potenza ben approssimata con $S(x) = 1.333\ x^{1/3}$, mentre per $\omega \gg \omega_c$ decresce esponenzialmente: $S(x) = 0.777\ x^{1/2}\ e^{-x}$.

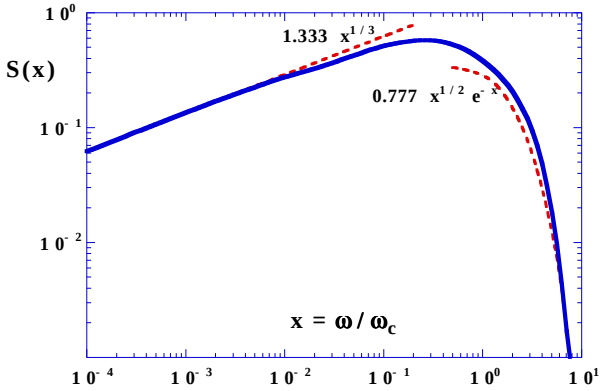


Figure 1.36: Funzione universale che descrive lo spettro della radiazione di sincrotrone

1.3.12 Sorgenti di radiazione di sincrotrone

I magneti curvanti di un elettro-sincrotrone costituiscono una sorgente di radiazione di sincrotrone. La radiazione è emessa nel piano di curvatura lungo la direzione degli elettroni in un cono di apertura angolare $\Delta\theta \simeq 1/\gamma$. L'intensità della radiazione è proporzionale al numero di elettroni che circolano nell'anello e lo spettro di frequenza è dato dalla funzione $S(\omega/\omega_c)$ che si estende fino a valori di energia poco superiori a $\hbar\omega_c$. L'energia perduta sotto forma di radiazione viene continuamente rifornita agli elettroni dal campo accelerante a radio-frequenza, quindi gli elettroni producono continuamente radiazione di sincrotrone. Le caratteristiche della radiazione (intensità, spettro di frequenza, polarizzazione, ...) possono essere variate localmente nell'acceleratore inserendo opportuni componenti magnetici che non perturbino la struttura periodica dell'anello.

Traslatore di frequenza

Se nell'anello si inserisce un campo magnetico, B^*, di intensità maggiore di quello dei magneti curvanti, aumenta localmente la forza di Lorentz e quindi la frequenza angolare, $\omega_o = eB^*/m\gamma$. In questo modo si aumenta la frequenza critica della radiazione emessa localmente dal magnete *superbend* B^*.

Un *traslatore di frequenza* di questo tipo (Fig.1.37) si realizza, ad esempio, inserendo in una sezione dritta dell'anello due magneti compensatori posti prima e dopo il magnete B^* in modo che l'integrale di campo dei tre magneti sia nullo, $\int B\ d\ell = 0$, per non cambiare le caratteristiche del fascio di elettroni.

Figure 1.37: Traslatore di frequenza; sono mostrati due magneti curvanti dell'anello, i due magneti compensatori e il magnete superbend

Magnete wiggler

Possiamo estendere il concetto del traslatore di frequenza in una struttura periodica in cui il campo magnetico è ortogonale alla direzione degli elettroni e l'integrale di campo è nullo. Un magnete *wiggler* è realizzato con N elementi di lughezza λ_p (Fig.1.38) realizzati con elettro-magneti o con magneti permanenti. L'intensità del campo magnetico si può ottenere come sviluppo in serie di Fourier con componente fondamentale di periodo λ_p. Con riferimento alla Fig.1.38, x è la direzione iniziale degli elettroni che vengono deflessi nel piano x-y. Assumendo per le componenti del campo magnetico $B_z(x,y,z) = B_o f(z)\cos kx$, con $k = 2\pi/\lambda_p$, e $B_y(x,y,z) = 0$, la soluzione deve soddisfare le condizioni

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0 & \partial B_x/\partial z = \partial B_z/\partial x = -kB_o f(z)\sin kx \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \partial B_x/\partial x = -\partial B_z/\partial z = -B_o f'(z)\cos kx \\ \partial^2 B_x/\partial x\partial z = \partial^2 B_x/\partial z\partial x & -k^2 B_o f(z)\cos kx = -B_o f''(z)\cos kx \end{array}$$

L'equazione $f''(z) - k^2 f(z) = 0$ ha soluzione $f(z) = a\cosh kz + b\sinh kz$ con le condizioni al contorno $f(0) = a = 1$, $f(-z) = f(+z)$ cioè $b = 0$. La componente B_x si ottiene integrando una delle relazioni precedenti. Quindi le componenti del campo magnetico sono

$$B_x = B_o\ \sinh kz\ \sin kx \qquad B_y = 0 \qquad B_z = B_o\ \cosh kz\ \cos kx$$

L'angolo di deflessione nel piano x-y in un quarto di periodo è

$$\theta_{p/4} = \int_0^{\lambda_p/4} \frac{eB_o\cos kx}{p}\ dx = \frac{eB_o}{kp}$$

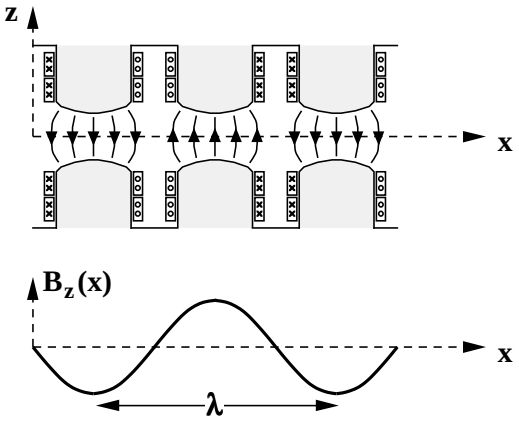


Figure 1.38: Magnete wiggler; la struttura periodica si estende per N periodi di lunghezza λ

Ricordando che il valor medio dell'apertura del cono di emissione di radiazione di sincrotrone è $\langle\theta\rangle \simeq 1/\gamma$, il rapporto tra l'angolo di deflessione in un quarto di periodo e l'apertura del cono definisce il *fattore di intensità* del magnete wiggler

$$Q = \frac{\theta_{p/4}}{\langle\theta\rangle} = \frac{eB_o}{kp}\ \frac{E}{mc^2} = \frac{ecB_o}{kmc^2}\ \frac{E}{pc} \simeq \frac{ec}{2\pi\ mc^2}\ B_o\lambda_p$$

$ec = 0.3\,GeV/T\,m$, $mc^2 = 0.5\,MeV$; quindi: $Q \simeq 100\,B_o(T)\,\lambda_p(m) = B_o(T)\,\lambda_p(cm)$. Tipicamente i magneti wiggler hanno $Q \simeq 1$. I magneti wiggler con $Q \ll 1$ sono chiamati *ondulatori*.

Gli elettroni sono soggetti ad una accelerazione nel piano normale alla direzione del campo magnetico. Le equazioni del moto nel piano x-y sono

$$\begin{array}{ll} m\gamma\ddot{x} = -e(v_yB_z - v_zB_y) = -e\dot{y}B_z & \ddot{x} = -\omega_o\dot{y}\cos kx \\ m\gamma\ddot{y} = -e(v_zB_x - v_xB_z) = +e\dot{x}B_z & \ddot{y} = +\omega_o\dot{x}\cos kx \\ m\gamma\ddot{z} = -e(v_xB_y - v_yB_x) = 0 & \end{array}$$

con $\omega_o = eB_o/m\gamma$. La soluzione approssimata della seconda equazione si ottiene assumendo che la velocità lungo l'asse x sia costante, $dx/dt \simeq costante = v_o$,

$$\dot{y} = \omega_o v_o \int \cos kx\ dt = \frac{\omega_o}{k}\ \sin kx + C$$

con la condizione iniziale $\dot{y}_{x=0} = C = 0$. Sostituendo nella prima equazione si ha

$$\dot{x} = -\frac{\omega_o^2}{k} \int \sin kx\ \cos kx\ dt = -\frac{\omega_o^2}{2k^2v_o}\ \sin^2 kx + C$$

con la condizione iniziale $\dot{x}_{x=0} = C = v_o$

$$\dot{x} = v_o\left(1 - \frac{\omega_o^2}{2k^2v_o^2}\ \sin^2 kx\right) = v_o\left(1 - \frac{Q^2}{2\gamma^2}\ \sin^2 kx\right)$$

La componente v_x della velocità degli ellettroni oscilla con periodo λ_p attorno al valor medio $\bar{v}_x = v_o(1 - Q^2/4\gamma^2)$. La componente v_y ha valore massimo $\omega_o/k = v_o Q/\gamma \ll v_o$. Integrando l'espressione di $\dot{y}$

$$y(x) = \frac{\omega_o}{k} \int \sin kx \; dt = \frac{\omega_o}{k^2 v_o} \cos kx + C$$

si ottiene l'ampiezza dell'oscillazione trasversa $y_{max} = (Q/2\pi\gamma)\lambda_p \ll \lambda_p$.

La potenza media emessa da un elettrone è ($|\ddot{x}| \ll |\ddot{y}|$, $\ddot{y} = c\omega_o \cos kx$)

$$W = \frac{2}{3} \frac{r_e m_e c^2}{c^3} \gamma^4 \langle \ddot{y}^2 \rangle = \frac{1}{3} \frac{r_e m_e c^2}{c} \gamma^4 \omega_o^2 = \frac{4\pi^2}{3} m_e c^2 \frac{r_e c}{\lambda_p^2} \gamma^2 Q^2$$

e l'energia irraggiata da un elettrone in un ondulatore di N elementi è

$$\Delta E = NW \frac{\lambda_p}{\beta c} = \frac{4\pi^2}{3} m_e c^2 \frac{r_e}{\lambda_p} N\gamma^2 Q^2$$

In un ondulatore costituito di N elementi gli elettroni compiono oscillazioni con periodo $T \simeq \lambda_p/\beta c$ ed emettono radiazione *quasi monocromatica*. In un periodo, la radiazione emessa ad angolo polare θ rispetto all'asse dell'ondulatore percorre la distanza $cT = \lambda_p/\beta(1-Q^2/\gamma^2)$ e si ha emissione coerente se la differenza di percorso tra la radiazione emessa da due punti a distanza λ_p è pari ad un numero intero di lunghezze d'onda (Fig.1.39)

$$\frac{\lambda_p}{\beta(1 - Q^2/\gamma^2)} - \lambda_p \cos\theta = n\lambda = n \frac{2\pi c}{\omega}$$

Approssimando $\beta = 1 - 1/2\gamma^2 + \ldots$, $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + \ldots$, si ottiene che lo spettro della radiazione è piccato attorno alle frequenze

$$\omega_n = n \frac{2\gamma^2}{1 + Q^2/2 + \gamma^2\theta^2} \frac{2\pi c}{\lambda_p}$$

La frequenza delle armoniche è massima per radiazione emessa in avanti, $\theta \simeq 0$, e per $Q \ll 1$, e la larghezza delle *righe* è inversamente proporzionale al numero di elementi, N. Si possono selezionare diverse bande di frequenza variando l'angolo di osservazione.

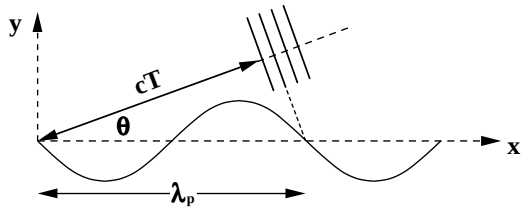


Figure 1.39: Radiazione quasi monocromatica emessa da un ondulatore

1.3.13 Sorgenti di neutroni

I neutroni, insieme ai protoni, sono i costituenti dei nuclei atomici (*nucleoni*); hanno massa $m_n = 939.6\ MeV/c^2$, carica elettrica nulla, sono fermioni di spin 1/2 con momento magnetico $\mu_n = -1.91$ in unità $e\hbar/2m_p$. I neutroni non esistono liberi, decadono con vita media sufficientemente lunga ($\tau = 900\ s$) per poterli utilizzare come proiettili in esperimenti. A differenza di fotoni, elettroni e protoni, i neutroni interagiscono molto debolmente con gli elettroni atomici e, per questo, sono più penetranti e particolarmente indicati come sonde per studiare la struttura e le proprietà della materia.

I neutroni *termici*, quelli con energia cinetica media $kT_{amb} = 0.025\ eV$, hanno lunghezza d'onda di De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{(2mc^2\ kT)^{1/2}} = 1.8\ 10^{-10}\ m$$

confrontabile con le distanze interatomiche nei cristalli o in materiale organico. Questo fu evidenziato da Brockhouse e Shull [26] che svilupparono il metodo della spettroscopia neutronica per lo studio della materia condensata.

Sorgenti di neutroni termici si realizzano nei reattori nucleari (capitolo ???) che producono enormi flussi di neutroni nella fissione di nuclei pesanti, oppure con interazioni nucleari di fasci di protoni (o ioni) su bersagli di nuclei pesanti. Nel primo caso si ha una sorgente continua, nel secondo caso si può realizzare una sorgente pulsata alla frequenza di estrazione del fascio da un acceleratore e questo presenta notevoli vantaggi perché si può stabilire una coerenza temporale tra il ciclo dell'acceleratore e la produzione dei neutroni.

Il processo in cui si produce un gran numero di neutroni in una singola interazione protone-nucleo è chiamato *spallazione*. Se i protoni hanno lunghezza d'onda molto minore della distanza tra i costituenti del nucleo, $\lambda \ll 10^{-15}\ m$, ovvero energia cinetica $\geq 500\ MeV$, e se il bersaglio è un nucleo con peso atomico elevato con un eccesso di neutroni rispetto ai protoni, il processo di spallazione si può schematizzare sulla base del modello nucleare statistico di Fermi (capitolo ???) nel modo seguente:

- l'interazione avviene tra il protone e un singolo nucleone che viene emesso dal nucleo;
- il nucleo viene a trovarsi in uno stato eccitato con un eccesso di energia di $\Delta E = 50 \div 100$ MeV;
- questa energia viene dissipata con l'emissione di $\frac{\Delta E}{\langle E_{legame} \rangle} \approx 10 \div 15$ neutroni, *evaporazione nucleare*, mentre i protoni vengono trattenuti nel nucleo dalla barriera di potenziale coulombiana;
- il nucleo residuo non è stabile perché contiene un eccesso di protoni ed è soggetto ad una serie di decadimenti β^+ in cascata.

[26] premi Nobel per la fisica nel 1994

Il processo di evaporazione nucleare avviene in tempi molto brevi ($\tau \sim 10^{-20}\ s$). La sezione d'urto differenziale dei neutroni prodotti con un fascio di protoni di 590 MeV è mostrata in Fig.1.40 in funzione dell'energia e dell'angolo polare. Da questi risultati si osserva che

- l'energia cinetica media dei neutroni è ∼2 MeV;
- la maggior parte dei neutroni è prodotta in modo isotropo con energia minore di 10 MeV;
- i neutroni con energia maggiore di ∼10 MeV sono emessi preferenzialmente in avanti, ma con probabilità molto piccola.

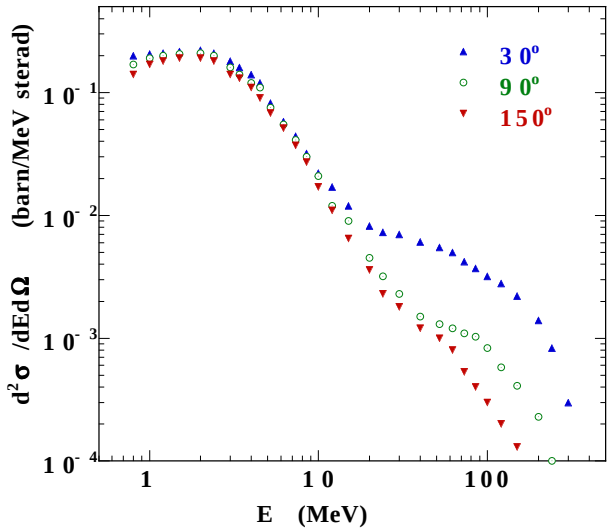


Figure 1.40: Sezione d'urto differenziale di neutroni di spallazione prodotti da protoni di 590 MeV su un bersaglio di Pb

Come bersaglio si usano nulcei pesanti non soggetti a fissione, per evitare l'emissione di neutroni *ritardati*: Tantalio, Tungsteno, Piombo, ... Il nucleo più efficace come moderatore è l'Idrogeno, utilizzato sotto forma di H_2O a temperatura ambiente, oppure H_2 liquido a $T = 20\ K$ per produrre neutroni *freddi* con energia 2 meV e lunghezza d'onda $\lambda = 7\ 10^{-10}\ m$.

In una collisione elastica di una particella di massa m e impulso p_0 ($p_0 \ll mc^2$) con una particella di massa M a riposo, l'impulso nel centro di massa è $p^* = \frac{Mp_0}{M+m}$ e la velocità del centro di massa è $\frac{p_0}{M+m}$ (Fig.1.41). L'energia cinetica dopo la collisione è

$$E = \frac{(\vec{p}^{\,*} + \vec{p}^{\,\prime})^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m}\ \frac{M^2 + 2Mm\cos\theta^* + m^2}{(M+m)^2}$$

dove θ^* è l'angolo di diffusione nel centro di massa. In una collisione di un neutrone con un nucleo di massa Am l'energia cinetica è

$$E = \frac{A^2 + 2A\cos\theta^* + 1}{(A+1)^2}\ E_0 = \left(\frac{1+\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2}\cos\theta^*\right) E_0$$

con $\alpha = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$. L'angolo di diffusione è

$$p \sin\theta = p^* \sin\theta^* \qquad\qquad \cos\theta = \frac{A + \cos\theta^*}{(A^2 + 2A\cos\theta^* + 1)^{1/2}}$$

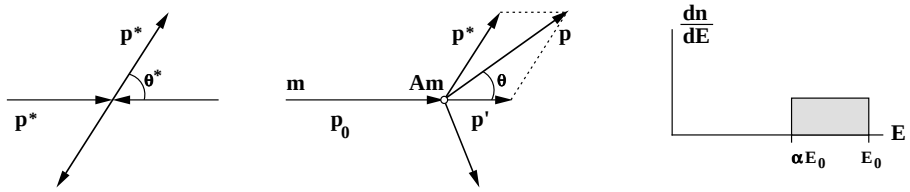


Figure 1.41: Collisione di un neutrone di massa m e impulso p_0 con un nucleo di massa Am nel centro di massa e nel laboratorio

Per energie cinetiche $E_0 \sim 2\ MeV$ la distribuzione angolare nel centro di massa è uniforme, $\frac{dn}{d\cos\theta^*} = \frac{1}{2}$, e l'energia dopo la collisione è compresa tra $E_{min} = \alpha E_0$, quando $\theta^* = \pi$, e $E_{max} = E_0$, quando $\theta^* = 0$, con distribuzione uniforme

$$\frac{dn}{dE} = \frac{dn}{d\cos\theta^*}\ \frac{d\cos\theta^*}{dE} = \frac{1}{(1-\alpha)E_0}$$

L'energia dei neutroni viene degradata nelle successive collisioni in modo esponenziale e per calcolare il numero medio di collisioni necessarie a raggiungere l'equilibrio a energia kT conviene introdurre il *decremento logaritmico* $\ln E_o/E$ che ha valor medio [27]

$$\xi = \langle \ln \frac{E_o}{E} \rangle = \int_E^{E_o} \ln \frac{E_o}{E}\ \frac{dE}{(1-\alpha)E_o} = -\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \ln x\ dx = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A+1}{A-1}$$

$\xi = 1$ per Idrogeno, $\xi \simeq 2/A$ per $A \gg 1$. Il numero medio di collisioni per moderare un neutrone di energia E_o è

$$\bar{n} = \frac{1}{\xi} \ln \frac{E_o}{E}$$

Se $E_o = 2\ MeV$ e $E = kT_{amb} = 25\ meV$ in diversi moderatori si ha

	H	D	He	C	O	...	U
ξ	1.0	0.73	0.43	0.16	0.12		0.084
$\bar{n}$	18	25	43	115	152		2170

Se v è la velocità dei neutroni, il numero di collisioni in un intervallo di tempo δt è $\frac{v\delta t}{\lambda_{el}}$, dove λ_{el} è il cammino libero medio per collisioni elastiche $\lambda_{el} = \frac{A}{N_o \rho \sigma_{el}}$. La sezione d'urto elastica dei neutroni dipende debolmente dall'energia, σ_{el} varia nell'intervallo $1 \div 5\ barn$ per i nuclei leggeri. Il numero di collisioni nell'intervallo di tempo dt in cui l'energia è diminuita di dE è

$$\frac{1}{\xi}\ d\ln\frac{E_o}{E} = -\frac{1}{\xi}\ \frac{dE}{E} = -\frac{2}{\xi}\ \frac{dv}{v} = \frac{vdt}{\lambda_{el}}$$

[27] $\int \ln x\ dx = x \ln x - x$

Integrando questa relazione si ha

$$-\int_{v_o}^{v} \lambda_{el}\ \frac{dv}{v^2} = \langle\lambda_{el}\rangle \frac{v_o - v}{v_o v} = \frac{\xi \Delta t}{2} \qquad\qquad \Delta t = \frac{2\langle\lambda_{el}\rangle}{\xi v} \qquad \text{per } v_o \gg v$$

La velocità di neutroni con energia cinetica $E_o = 2\ MeV$ è $v_o = 2.0\ 10^7\ m/s$ mentre la velocità di neutroni con $E = kT_{amb}$ è $v = 2.2\ 10^3\ m/s$. Il tempo per termalizzare neutroni energetici in acqua è $\Delta t \simeq 10^{-5}\ s$ e aumenta notevolmente ($\sim \sigma_{el}/\xi$) nei moderatori con nuclei più pesanti.

Durante questo tempo i neutroni diffondono nel moderatore e in parte vengono assorbiti. La densità di neutroni ha una distribuzione gaussiana in funzione della distanza dal bersaglio e l'estensione della sorgente, Δr, dipende dalla sezione d'urto elastica, dalla sezione d'urto di assorbimento e dal decremento di energia $\ln E_o/E$. Per neutroni termici in acqua si ha $\Delta r \simeq 8\ cm$; Δr aumenta notevolmente con il peso atomico del moderatore. L'energia ha una distribuzione di Maxwell-Boltzmann alla temperatura del moderatore. I neutroni vengono inviati dalla sorgente alle aree sperimetali mediante *guide* cave con le pareti realizzate con opportuni materiali in cui i neutroni vengono trasmessi per riflessione totale (l'indice di rifrazione dei neutroni dipende dalla lunghezza d'onda $\lambda(E)$ e dalla ampiezza di diffusione elastica $f(E)$ con le pareti della guida).

In esperimenti in cui i neutroni vengono diffusi in modo elastico la velocità viene misurata dopo il campione in esame dal tempo di volo dei neutroni prendendo come riferimento l'istante in cui il fascio di protoni urta il bersaglio della sorgente. Se L è la distanza tra il bersaglio e l'esperimento, l'errore nella misura della velocità dipende dal tempo di termalizzazione, Δt, e dall'estensione della sorgente, Δr,

$$\Delta v = v \left[\left(\frac{\Delta r}{L}\right)^2 + \left(\frac{v \Delta t}{L}\right)^2 \right]^{1/2}$$

se $\Delta r = 10\ cm$, $\Delta t = 10\ \mu s$ per neutroni termici e $L = 10\ m$, si ha $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta v}{v} \simeq 10^{-2}$.

1.4 Interazioni tra particelle e materia

Le particelle cariche nell'attraversare i materiali sono soggette a interazioni elettromagnetiche con gli elettroni e i nuclei atomici. A causa di queste interazioni le particelle perdono parte dell'energia cinetica e cambiano direzione. I principali effetti sono

- perdita di energia per ionizzazione ed eccitazione degli atomi;
- diffusione coulombiana nel campo dei nuclei atomici;
- irraggiamento nel campo dei nuclei atomici.

La radiazione elettromagnetica può convertire parte o tutta la sua energia per interazione con gli atomi e i nuclei atomici. I principali effetti sono

- effetto fotoelettrico;
- effetto Compton;
- produzione di coppie elettrone-positrone.

Questi effetti, che verranno trattati in modo approssimato, sono importanti per studiare le tecniche di rivelazione di particelle cariche e di fotoni e per capire come vengono effettuati gli esperimenti nel campo della fisica nucleare e subnucleare.

• Interazioni delle particelle cariche

1.4.1 Perdita di energia per ionizzazione

Consideriamo un atomo, costituito dal nucleo di carica Ze e Z elettroni, e una particella di carica ze, massa $M \gg m_e$ e velocità $\vec{v}$ (Fig.1.42) e facciamo l'ipotesi che la velocità sia abbastanza grande da poter considerare l'elettrone quasi fermo durante la collisione. Facciamo anche l'ipotesi che l'impulso trasferito durante la collisione sia piccolo in modo che la particella non sia deflessa.

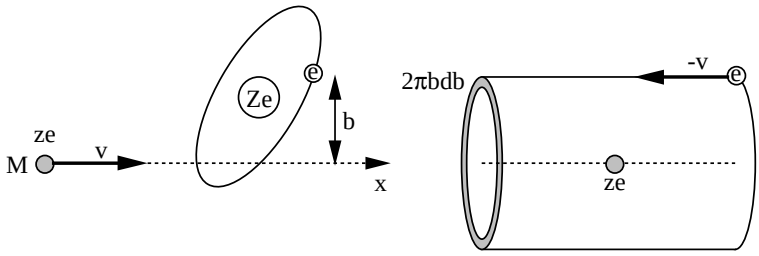


Figure 1.42: Interazione coulombiana tra particella e elettroni atomici

La forza tra la particella e l'elettrone è $e\vec{\mathcal{E}}$ dove $\vec{\mathcal{E}}$ è il campo elettrico generato dalla particella. Consideriamo l'interazione nel *riferimento solidale con la particella* in cui l'elettrone si muove con velocità $-\vec{v}$. L'impulso trasferito all'elettrone $\Delta\vec{p}' = \int \vec{F}' dt'$ è, per simmetria lungo la direzione del moto, dato dalla componente trasversa del campo elettrico

$$p'_e = \int e\mathcal{E}'_\perp dt' = \int e\mathcal{E}'_\perp \frac{dx'}{v} \approx \frac{e}{v}\int \mathcal{E}'_\perp dx'$$

dove abbiamo approssimato che la velocità della particella sia costante durante una collisione. Se b è il parametro d'urto e se consideriamo un cilindro con l'asse coincidente con la direzione della particella e raggio pari al parametro d'urto, il flusso del campo elettrico attraverso la superficie del cilindro è

$$\Phi(\vec{\mathcal{E}}') = \int_{S'} \vec{\mathcal{E}}' \cdot \vec{n}'\ dS' = 2\pi b \int \mathcal{E}'_\perp dx' = \frac{ze}{\epsilon_o}$$

L'impulso trasferito all'elettrone è

$$p'_e = \frac{e}{v}\frac{ze}{2\pi\epsilon_o b} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon b^2}\frac{2b}{v}$$

cioè pari al prodotto della forza coulombiana a distanza b per un *tempo d'urto* $\Delta t' = 2b/v$. L'impulso trasferito è invariante poiché *nel riferimento dell'elettrone* la componente trasversa del campo elettrico della particella si espande $E_\perp = \gamma E'_\perp$ e il tempo d'urto si contrae $\Delta t = \Delta t'/\gamma$. Nell'ipotesi $p_e \ll m_e c$, l'energia cinetica dell'elettrone, è

$$E_e = \frac{p_e^2}{2m_e} = \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_o b}\right)^2 \frac{2}{m_e v^2} = 2z^2\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o\ m_e c^2}\right)^2 \frac{(m_e c^2)^2}{b^2\ m_e v^2} = 2\ m_e c^2\ \frac{z^2}{\beta^2}\ \frac{r_e^2}{b^2}$$

Questa è l'energia perduta dalla particella in un singolo urto. Se n_e è il numero di elettroni per unità di volume, il numero di urti nel tratto di percorso $d\ell$ con parametro d'urto compreso tra b e $b + db$ è $n_e\ 2\pi b db d\ell$ e l'energia perduta è

$$\frac{d^2E}{dbd\ell} = n_e\ r_e^2\ m_e c^2\ \frac{4\pi b}{b^2}\ \frac{z^2}{\beta^2}$$

L'energia perduta per unità di percorso si ottiene integrando questa relazione tra i limiti minimo e massimo del parametro d'urto

$$\frac{dE}{d\ell} = \int 4\pi\ n_e\ r_e^2\ m_e c^2\ \frac{z^2}{\beta^2}\ \frac{db}{b} = 4\pi\ n_e\ \ r_e^2\ m_e c^2\ \frac{z^2}{\beta^2}\ \ln\frac{b_{max}}{b_{min}}$$

- Valori grandi del parametro d'urto corrispondono a tempi d'urto grandi. Se $\Delta t = b/\gamma v$ è maggiore dell'inverso delle frequenze tipiche ω_e degli elettroni atomici non è possibile il trasferimento di energia dalla particella all'elettrone. Quindi assumiamo $b_{max} \approx \gamma v/\langle\omega_e\rangle$.

- Il parametro d'urto non può essere minore della *dimensione* dell'elettrone vista dalla particella incidente. La lunghezza d'onda di de Broglie dell'elettrone è $\lambda = \hbar/p$ e l'elettrone ha nel riferimento della particella impulso $p = m_e c\beta\gamma$. Quindi assumiamo $b_{min} \approx \hbar/m_e\beta\gamma c$.

Se il materiale ha numero atomico Z, peso atomico A e densità ρ, il numero di elettroni per unità di volume è $n_e = N_o Z\rho/A$. La formula della perdita di energia per unità di percorso è stata derivata da Bohr nel 1915. Il risultato che otteniamo differisce da questa solo nel termine logaritmico

$$\textit{formula di Bohr} \qquad \frac{dE}{d\ell} = 4\pi\ r_e^2 m_e c^2\ \frac{N_o Z\rho}{A}\ \frac{z^2}{\beta^2}\ \ln\frac{m_e c^2\beta^2\gamma^2}{\hbar\langle\omega_e\rangle} \qquad [eV\ cm^{-1}]$$

e dipende dai parametri del materiale, dal quadrato della carica della particella ed è funzione solo della velocità della particella βc. La formula di Bohr dipende linearmente dalla densità ed è conveniente esprimere lo spessore del materiale $\Delta\ell$ $[cm]$ come $\Delta x = \rho\Delta\ell$ $[g\ cm^{-2}]$. Tenendo conto del valore

$$C = \ 4\pi\ r_e^2\ m_e c^2\ N_o = 0.30\ MeV/g\ cm^{-2}$$

la perdita di energia per unità di percorso è

$$\frac{dE}{dx} = C\ \frac{Z}{A}\ \frac{z^2}{\beta^2}\ \ln\ \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\langle I \rangle} \qquad [MeV/g\ cm^{-2}]$$

dove $\langle I \rangle = \hbar \langle \omega_e \rangle$ è il *potenziale medio di ionizzazione*. Nel modello atomico di Thomas-Fermi (appendice 4.17) $\langle I \rangle$ è approssimativamente uguale a Z volte quello dell'atomo di idrogeno ($m_e c^2 / \langle I \rangle \approx 3.6\ 10^4 / Z$), quindi la perdita di energia per ionizzazione ha una piccola dipendenza dal tipo di atomo: $dE/dx \propto (Z/A)\ \ln(costante/Z)$.

La formula di Bohr è derivata in modo classico ed è una approssimazione molto buona per particelle di massa $M \gg m_e$. Un calcolo più accurato è stato fatto da Bethe e Bloch nel 1930 tenendo conto di effetti quantistici

$$\textit{formula di Bethe-Bloch} \qquad \frac{dE}{dx} = C\ \frac{Z}{A}\ \frac{z^2}{\beta^2}\ \left(\ln\ \frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\langle I \rangle} - \beta^2 \right)$$

Per elettroni e positroni il termine logaritmico nella formula di Bethe-Bloch va modificato per tener conto del fatto che particella e bersaglio hanno massa uguale e che, per gli elettroni, sono particelle identiche.

La formula di Bethe-Bloch indica che la perdita di energia per unità di percorso di una particella carica è proporzionale a $1/\beta^2$ per $\beta \ll 1$, ha un minimo per $\beta \approx 0.9$ e ha un andamento crescente come $\ln \gamma^2$ per $\beta \to 1$. In realtà per valori grandi di γ i valori sperimentali si discostano da questo andamento asintotico e risulta $dE/dx \to costante$, e questo effetto è maggiore nei materiale a densità elevata. In effetti il valore b_{max} aumenta linearmente con γ e per valori grandi di γ l'integrazione si estende a valori del parametro d'urto molto maggiori delle dimensioni atomiche. In questo caso il campo elettrico della particella tende a polarizzare gli atomi del materiale e gli elettroni con grandi parametri d'urto sentono l'azione del campo elettrico parzialmente schermato e contribuiscono meno alla perdita di energia. Questo *effetto densità* è stato studiato da Fermi nel 1940 che ha introdotto nel termine logaritmico della formula di Bethe-Bloch alcune correzioni che dipendono dalla costante dielettrica del materiale ϵ_r e che sono importanti per velocità $\beta > 1/\sqrt{\epsilon_r}$.

La Fig.1.43 mostra l'andamento della perdita di energia per unità di percorso in diversi materiali in funzione di $\beta\gamma = p/Mc$ per particelle di carica $z = 1$.

La sezione d'urto di collisione inelastica tra una particella e gli atomi si deriva dall'espressione del parametro d'urto in funzione dell'energia dell'elettrone

$$b^2 = 2 r_e^2\ \frac{z^2}{\beta^2}\ \frac{m_e c^2}{E_e} \qquad\qquad d\sigma = 2\pi b db = 4\pi r_e^2\ \frac{z^2}{\beta^2}\ \frac{m_e c^2\ dE_e}{E_e^2}$$

La sezione d'urto differenziale è

$$\frac{d\sigma}{dE_e} = 2\pi r_e^2\ \frac{z^2}{\beta^2}\ \frac{m_e c^2}{E_e^2}$$

Va notato che gli urti con i nuclei atomici hanno un effetto molto minore. Infatti l'impulso trasferito è Z volte maggiore ma l'energia trasferita al nulcleo per urto è

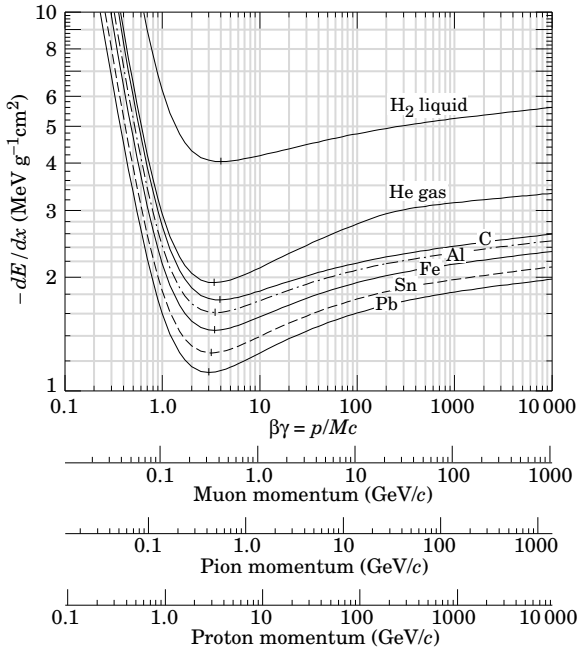


Figure 1.43: $(dE/dx)_{ion}$ in diversi materiali in funzione di $\beta\gamma$ per particelle di carica $z = 1$ (S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004)

molto più piccola perché $M_{nucleo} \gg m_e$. Inoltre il fattore Z è compensato dal fatto che ci sono Z elettroni per nucleo. Quindi il contributo dei nuclei alla perdita di energia è trascurabile.

1.4.2 Fluttuazioni della perdita di energia per ionizzazione

La perdita di energia per ionizzazione in un materiale di spessore ℓ è un processo statistico che avviene con successive collisioni con gli elettroni degli atomi del mezzo. Il numero di collisioni nel tratto $d\ell$ con trasferimento di energia nell'intervallo $E_e \div E_e + dE_e$ è

$$f(E_e)dE_e d\ell = \frac{NZ\rho}{A}\ d\ell\ \frac{d\sigma}{dE_e}\ dE_e = \frac{NZ\rho}{A}\ 2\pi r_e^2 mc^2\ \frac{z^2}{\beta^2}\ \frac{dE_e}{E_e^2}\ d\ell = \frac{C}{2}\frac{Z\rho}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\ \frac{dE_e}{E_e^2}\ d\ell$$

L'energia ceduta in una singola collisione è caratterizzata dalla funzione di distribuzione $f(E_e)$ e varia in un ampio intervallo dalla minima energia di eccitazione degli atomi del mezzo al valore massimo; per una particella di massa $M \gg m$ e energia $E \ll M^2c^2/m$: $E_e^{max} = 2mc^2\beta^2\gamma^2$ (appendice4.6).

La perdita di energia per unità di percorso misurato in $g^{-1}cm^2$ ($dx = \rho d\ell$) è

$$\frac{dE}{dx} = C\ \frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\ \left(\ln\frac{2mc^2\beta^2\gamma^2}{\langle I\rangle} - \beta^2\right)$$

e l'energia perduta in media in uno spessore x è

$$\overline{\Delta} = 2\left(\ln\frac{2mc^2\beta^2\gamma^2}{\langle I\rangle} - \beta^2\right)\ \xi \qquad \text{con} \qquad \xi = \frac{C}{2}\frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\ x$$

L'energia perduta effettivamente nello spessore x fluttua attorno al valor medio $\overline{\Delta}$ ed è caratterizzata dalla funzione di distribuzione $f(x,\Delta)$. La determinazione di questa funzione è complicata dal fatto che, se l'energia della particella incidente è grande, questa può perderne una frazione anche molto elevata in una singola collisione.

La trattazione delle fluttuazioni è stata fatta originariamente da Bohr con l'ipotesi che l'energia perduta nelle collisioni sia molto minore dell'energia della particella incidente E_o. Il numero di collisioni con trasferimento di energia E_e nello spessore x è $f(E_e)dE_e = (\xi/x)dE_e/E_e^2$. Nell'ipotesi $E_e \ll E_o$ possiamo interpretare il valore di energia ξ come quello per cui si ha in media una sola collisione con perdita di energia $E_e \geq \xi$ nello spessore x

$$x\int_\xi^{E_e^{max}} f(E_e)dE_e \simeq \xi\int_\xi^\infty \frac{dE_e}{E_e^2} = 1$$

Le altre ipotesi fatte da Bohr sono:

- lo spessore x è sufficientemente piccolo in modo che risulti $\xi \ll E_e^{max}$;
- lo spessore x è sufficientemente grande in modo da poter mediare su un grande numero di collisioni.

In questo caso la funzione di distribuzione è gaussiana

$$f(x,\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ e^{-(\Delta-\overline{\Delta})^2/2\sigma^2}$$

con varianza

$$\sigma^2 = \int f(E_e)\ E_e^2\ dE_e\ dx = \frac{C}{2}\ \frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\ (E_e^{max} - E_e^{min})\ x \simeq C\ \frac{Z}{A}\ z^2mc^2\ x$$

La trattazione generale è stata fatta da Lev Landau (per questo sono chiamate *fluttuazioni di Landau*) considerando sia le perdite di energia $E_e < \xi$, che sono più frequenti e seguono la distribuzione gaussiana, sia le perdite di energia $E_e > \xi$ molto meno frequenti e quindi soggette a fluttuazioni poissoniane. Ne risulta una distribuzione $f(x,\Delta)$ asimmetrica caratterizzata da un *valore di picco* $\Delta_p < \overline{\Delta} = \int f(x,\Delta)\Delta d\Delta$. La Fig.1.44 mostra la distribuzione di Δ/x per mesoni π di impulso 500 MeV in spessori sottili di Silicio ($Z/A = 0.498$; $\rho = 2.33\ gcm^{-3}$). In questo caso, per $\beta\gamma = 3.5$, si ha $dE/dx = 1.66\ MeV/gcm^{-2}$.

La distribuzione di Landau è espressa in funzione della variabile adimensionale $\lambda = (\Delta - \Delta_p)/\xi$ ed è normalizzata in modo che sia $\int \Phi(\lambda)d\lambda = \int f(x,\Delta)d\Delta$. La distribuzione è mostrata in Fig.1.45 insieme alla funzione di distribuzione di Moyal

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-(\lambda+e^{-\lambda})/2}$$

che è una buona approssimazione nel caso di spessori non molto sottili.

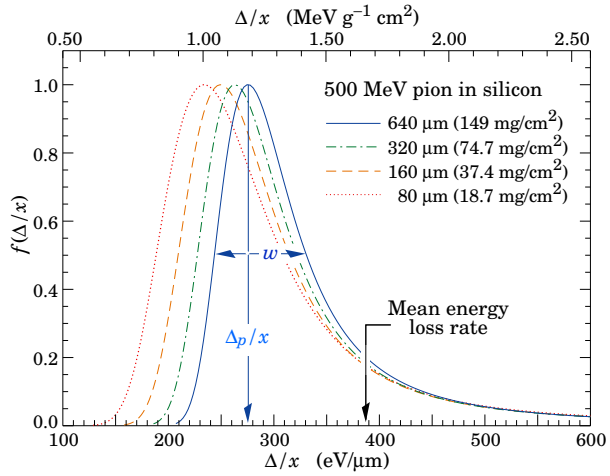


Figure 1.44: Distribuzione del rapporto Δ/x in diversi spessori di Silicio (S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004)

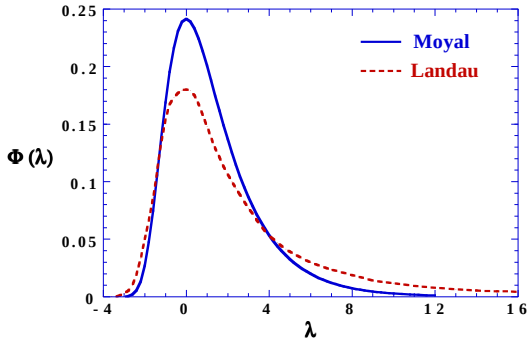


Figure 1.45: Distribuzioni di Landau e di Moyal

1.4.3 Percorso residuo

Nell'attraversare un materiale, le particelle cariche con massa $M > m_e$ perdono energia prevalentemente per ionizzazione. Se l'energia trasferita in media nelle collisioni è molto minore dell'energia inziale, occorrono moltissime collisioni perché la particella perda tutta l'energia cinetica e si arresti nel materiale. Il percorso residuo, chiamato usualmente *range*, dipende dalla carica elettrica e dall'energia della particella e dalle proprietà del materiale

$$R = \int_0^R dx = \int_{E_o}^0 \frac{dE}{dE/dx}$$

Poiché dE/dx e l'energia sono funzioni della velocità β, $dE/dx = z^2 f(\beta, Z, A)$, $dE = Mc^2\gamma^3\beta d\beta$, il range è funzione della velocità iniziale β_o. Per particelle di carica e massa diverse si ha la relazione

$$R = \int_{\beta_o}^0 \frac{Mc^2\gamma^3\beta d\beta}{z^2 f(\beta, Z, A)} = \frac{Mc^2}{z^2}\ F(\beta_o, Z, A) \qquad \frac{z^2}{Mc^2}\ R = F(\beta_o, Z, A)$$

La Fig.1.46 mostra l'andamento del rapporto R/Mc^2 in diversi materiali in funzione di $\beta\gamma = p/Mc$ per particelle di carica $z = 1$.

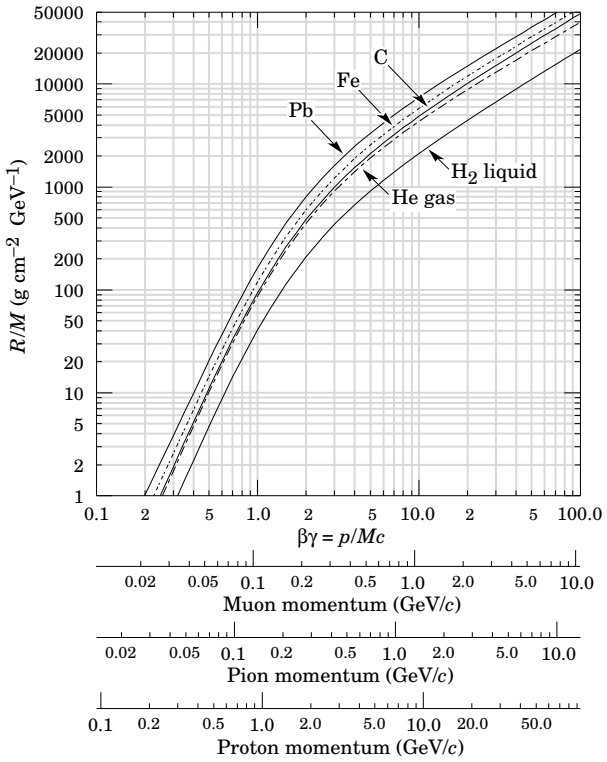


Figure 1.46: Rapporto R/Mc^2 in diversi materiali in funzione di $\beta\gamma$ per particelle di carica $z = 1$ (S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004)

Le fluttuazioni della perdita di energia si riflettono in fluttuzioni del range $\delta x = [dE/dx]^{-1}\delta\Delta$, dove $\delta\Delta$ è la fluttuazione della perdita di energia nel percorso dx. Se il range è sufficientemente grande, la perdita di energia ha una distribuzione gaussiana con varianza $\sigma^2_\Delta = \langle(\delta\Delta)^2\rangle$ proporzionale allo spessore di materiale attraversato ($d\sigma^2_\Delta/dx = (CZ/A)z^2mc^2$). In questo caso il range ha una distribuzione gaussiana con varianza

$$\sigma^2_R = \langle(\delta x)^2\rangle = \int_0^R \frac{d\sigma^2_R}{dx}\,\frac{dx}{(dE/dx)^2} \simeq \frac{\sigma^2_\Delta}{\langle R\rangle}\int_{E_o}^0 \frac{dE}{(dE/dx)^3}$$

1.4.4 Radiazione Čerenkov

L'emissione di radiazione Čerenkov da parte di una particella carica è un effetto legato alle proprietà dielettriche del materiale e avviene quando la velocità della particella è maggiore della velocità di propagazione della luce nel materiale che attraversa. Questo fenomeno è stato osservato da Čerenkov nel 1934 e spiegato da Frank e Tamm [28] nel 1937.

[28] premi Nobel per la fisica nel 1958

In un materiale con costante dielettrica relativa ϵ e indice di rifrazione n il campo elettrico prodotto dalla particella si propaga con velocità $c/[\epsilon(\omega)]^{1/2} = c/n(\omega)$. Il campo elettrico della particella polarizza gli atomi del materiale e la polarizzazione segue il moto della particella senza apprezzabile scambio di energia se la velocità della particella è $\beta c \ll c/n(\omega)$. Se invece $\beta c > c/n(\omega)$ il materiale che si polarizza lungo la traiettoria della particella emette radiazione. La radiazione è coerente sulla superficie di un cono con asse la direzione della particella (Fig.1.47) e apertura angolare

$$\cos\theta_c = \frac{c/n(\omega)}{\beta c} = \frac{1}{\beta n(\omega)}$$

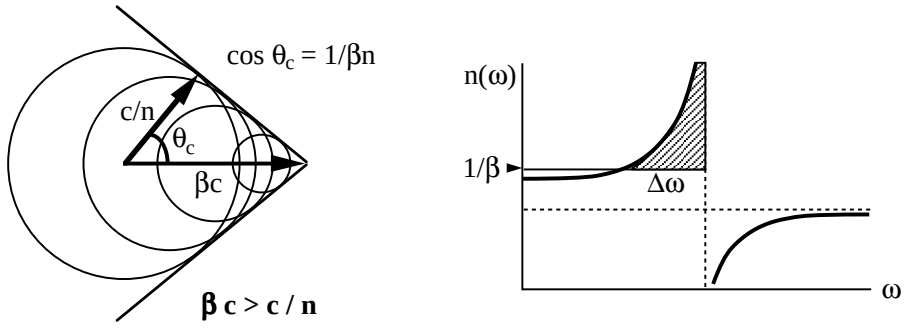


Figure 1.47: Effetto Čerenkov

L'energia emessa per unità di percorso e unità di frequenza da una particella con carica elettrica ze è

$$\frac{d^2E}{dxd\omega} = \frac{z^2e^2}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{\omega}{c^2}\,\left[1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right] = z^2\,\frac{\alpha\hbar\omega}{c}\,\sin^2\theta_c(\omega)$$

e il numero di fotoni emessi con energia $\hbar\omega$ è

$$\frac{d^2n}{dxd\omega} = \frac{z^2\alpha}{c}\,\sin^2\theta_c(\omega)$$

Il numero di fotoni emessi per unità di percorso si ottiene integrando nell'intervallo di frequenza $\Delta\omega$ in cui $n(\omega)$ è positivo, $\omega < \omega_o$, ed è soddisfatta la condizione per l'effetto Čerenkov $1/\beta < n(\omega) < n(\omega_o)$

$$\frac{dn}{dx} = \frac{z^2\alpha}{c}\int_{\Delta\omega}\sin^2\theta_c(\omega)\;d\omega \approx \frac{z^2\alpha}{c}\;\langle\sin^2\theta_c\rangle\;\Delta\omega$$

L'intervallo di frequenza per cui queste condizioni sono soddisfatte nei materiali trasparenti alla radiazione è nel visibile e ultravioletto con $\hbar\Delta\omega \approx 2\ eV$ e il numero medio di fotoni emessi per unità di percorso è

$$\langle\frac{dn}{dx}\rangle \approx 600\ fotoni\ cm^{-1}\cdot z^2\sin^2\theta_c$$

L'emissione di radiazione Čerenkov non contribuisce apprezzabilmente alla perdita di energia della particella poichè $dE/dx \approx z^2\sin^2\theta_c\ [keV\ cm^{-1}]$. L'effetto Čerenkov ha importanti applicazioni nella rivelazione di particelle cariche e nella misura della loro velocità.

1.4.5 Radiazione di transizione

Un altro fenomeno legato alle proprietà dielettriche del materiale è l'emissione di radiazione prodotta da una particella carica relativistica, $\beta \approx 1$, quando passa da un materiale ad un altro con diversa costante dielettrica. La *radiazione di transizione* è stata studiata da Franck e Ginsburg nel 1946. Consideriamo una particella di carica elettrica q che si muove nel vuoto nella direzione z con velocità βc e incide normalmente sulla superficie di un materiale di indice di rifrazione $n(\omega)$ (Fig.1.48). Il campo elettrico della particella in un punto $\vec{r}'$ a distanza ρ' dalla linea di volo ha componenti

$$E_L = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\gamma\beta ct}{[\rho'^2 + (\gamma\beta ct)^2]^{3/2}} \qquad E_T = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\gamma\rho'}{[\rho'^2 + (\gamma\beta ct)^2]^{3/2}}$$

e polarizza il materiale. La polarizzazione nel punto r' è tanto più intensa quanto minore è la distanza ρ' e produce un campo di radiazione (appendice 4.7) che si propaga con velocità di fase $c/n(\omega)$

$$A(\vec{r}) \approx \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{ik'r}}{r} e^{-ik'\hat{r}\cdot\vec{r}'} \qquad k' = \frac{\omega\ n(\omega)}{c}$$

La radiazione emessa ad angolo polare θ nel piano $z - x$ con frequenza ω ha una

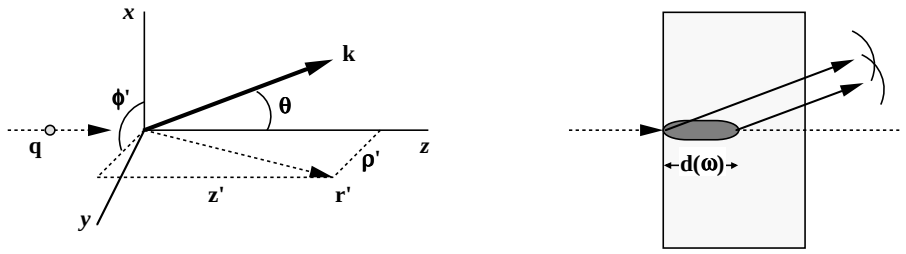


Figure 1.48: Emissione di radiazione di transizione

differenza di fase rispetto alla particella

$$\Delta\phi \approx kz' - (k'z'\cos\theta + k'\rho'\sin\theta\cos\phi') = (k - k'\cos\theta)z' - k'\rho'\sin\theta\cos\phi'$$

con $k = \omega/\beta c$. Lo spettro di frequenza si estende fino all'inverso del tempo d'urto $\Delta t = \rho'/\gamma\beta c$: $\omega \approx 1/\Delta t = \gamma\beta c/\rho'$. Quindi radiazione coerente può essere emessa se sono soddisfatte le due condizioni

$$\frac{\omega n(\omega)}{c} \frac{\gamma\beta c}{\omega} \sin\theta < 1 \qquad \theta < \frac{1}{\gamma\beta n(\omega)}$$

$$\left(\frac{\omega}{\beta c} - \frac{\omega n(\omega)}{c} \cos\theta\right) z' < 1 \qquad z' < \frac{c}{\omega} \frac{1}{1/\beta - n(\omega)\cos\theta}$$

La prima condizione implica che la radiazione è emessa in avanti ($\theta < 1/\gamma$), la seconda che la radiazione è emessa in una regione, detta *zona di formazione*, immediatamente a valle della superficie del materiale. La radiazione è emessa con

frequenze maggiori della frequenza di plasma ω_p del materiale. Per un materiale di densità $\approx 1\ g\ cm^{-3}$ si ha tipicamente $\hbar\omega_p \approx 20\ eV$ e l'emissione si estende dall'ultravioletto alla regione dei raggi X.

Approssimando $\beta^{-1} \approx 1 + 1/2\gamma^2$, $n(\omega) \approx 1 - \omega_p^2/2\omega^2$, $\cos\theta \approx 1$, la zona di formazione della radiazione di transizione

$$d(\omega) = \frac{c}{\omega}\ \frac{1}{1/\beta - n(\omega)} = \frac{2\gamma c}{\omega_p}\ \frac{1}{\omega/\gamma\omega_p + \gamma\omega_p/\omega} = \frac{2\gamma c}{\omega_p}\ \frac{1}{\nu + 1/\nu} \qquad\qquad \nu = \frac{\omega}{\gamma\omega_p}$$

ha il valore massimo per $\nu = 1$: $d_{max} = \gamma c/\omega_p \approx \gamma \cdot 10\ nm$. L'energia irraggiata per unità di frequenza da una particella di carica elettrica ze è

$$\frac{dE}{d\nu} = \frac{z^2\alpha}{\pi}\ \gamma\ \hbar\omega_p\ [(1 + 2\nu^2)\ ln(1 + 1/\nu^2) - 2]$$

L'energia totale irraggiata è

$$E = \int \frac{dE}{d\nu}\ d\nu \approx \frac{z^2\alpha}{3}\ \gamma\ \hbar\omega_p \approx z^2\ \gamma \cdot 0.05\ eV$$

Quindi anche per una particella ultrarelativistica questa energia è molto piccola e non contribuisce alla perdita di energia. Questo effetto è comunque di notevole interesse perché permette di identificare le particelle con valori di γ elevati e, se si conosce la massa, di misurarne l'energia $E = \gamma mc^2$.

1.4.6 Diffusione coulombiana multipla

Nell'attraversare un materiale una particella carica perde energia nelle collisioni con gli elettroni atomici senza cambiare apprezzabilmente direzione mentre viene deflessa nelle collisioni elastiche con i nuclei atomici senza perdita apprezzabile di energia cinetica. La sezione d'urto di interazione col campo elettrico del nucleo (capitolo ???) è fortemente piccata a piccoli angoli di diffusione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2(zZ)^2\ \frac{(m_e c^2)^2}{4p^2v^2\sin^4\theta/2}$$

Se lo spessore del materiale non è piccolo, la particella subisce molte collisioni in cui è predominante l'effetto di diffusione ad angoli piccoli (Fig.1.49). Se $n_N = N_o\rho/A$ è il numero di nuclei per unità di volume, il numero di collisioni per unità di percorso in cui la particella è diffusa nell'angolo solido $d\Omega$ è

$$d^2n = n_N\ d\sigma\ dx = 8\pi r_e^2\ (zZ)^2\ \frac{(m_e c^2)^2}{p^2v^2}\ \frac{\theta d\theta dx}{\theta^4}$$

dove abbiamo approssimato $\sin^4\theta/2 \approx \theta^4/16$, $d\Omega \approx \theta d\theta d\phi$ e abbiamo integrato sull'angolo azimutale ϕ. Nell'ipotesi che le successive collisioni siano indipendenti, è

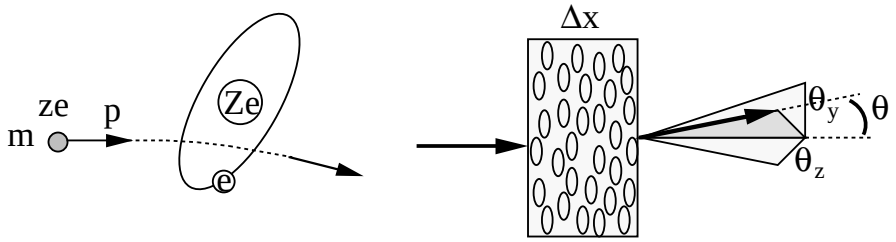


Figure 1.49: Diffusione coulombiana multipla

ragionevole assumere che la distribuzione nell'angolo di diffusione sia gaussiana. Il valore quadratico medio dell'angolo di diffusione per unità di percorso è

$$\theta_s^2 = \frac{d\langle\theta^2\rangle}{dx} = \int \theta^2 \, \frac{d^2n}{d\theta dx} \, d\theta = 8\pi r_e^2 \, \frac{N_o\rho}{A} \, (zZ)^2 \, \frac{(m_e c^2)^2}{p^2v^2} \int \frac{\theta^2 d\theta}{\theta^3}$$

$$\theta_s^2 = 8\pi \, r_e^2 \, \frac{N_o\rho}{A} \, (zZ)^2 \, \frac{(m_e c^2)^2}{p^2v^2} \, \ln \, \frac{\theta_{max}}{\theta_{min}}$$

La relazione tra l'angolo di diffusione e il parametro d'urto (capitolo ???) è

$$\tan\theta/2 = zZ \, \frac{m_e c^2}{Mv^2} \frac{r_e}{b}$$

e quindi, nell'approssimazione di piccoli angoli, possiamo sostituire $\theta_{max}/\theta_{min}$ con b_{max}/b_{min} . Dato che il rapporto compare in un logaritmo una stima approssimata non comporta errori di rilievo.

- Se il parametro d'urto è maggiore delle dimensioni atomiche la carica del nucleo è schermata da quella degli elettroni e il campo elettrico si annulla; quindi assumiano $b_{max} \approx \langle r_{atomo}\rangle$. Nel modello atomico di Thomas-Fermi (appendice 4.17) il raggio medio della distribuzione di carica nell'atomo è $\langle r_{atomo}\rangle \approx (r_e/\alpha^2)Z^{-1/3}$.

- Se il parametro d'urto è minore delle dimensioni del nucleo, la carica *efficace* diminuisce e quindi anche la sezione d'urto (capitolo ???); quindi assumiano $b_{min} \approx \langle r_{nucleo}\rangle$. La fenomenologia dei nuclei atomici (capitolo ???) mostra che il raggio medio della distribuzione di carica nel nucleo è $\langle r_{nucleo}\rangle \approx r_e A^{1/3}/2$.

Con queste scelte si ha

$$\frac{\theta_{max}}{\theta_{min}} = \frac{2}{\alpha^2}\left(\frac{Z}{A}\right)^{1/3} Z^{-2/3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\left(\frac{Z}{A}\right)^{1/6} Z^{-1/3}\right)^2 \approx (183 \; Z^{-1/3})^2$$

e l'*angolo quadratico medio per unità di percorso* si esprime

$$\theta_s^2 = 16\pi \, r_e^2 \, \frac{N_o\rho}{A} \, (zZ)^2 \, \frac{(m_e c^2)^2}{p^2v^2} \, \ln 183 \; Z^{-1/3}$$

$$\theta_s^2 = \left(\frac{4\pi(m_e c^2)^2}{\alpha}\right)\left(\frac{z}{pv}\right)^2\left(4r_e^2\alpha\ \frac{N_o Z^2\rho}{A}\ \ln 183\ Z^{-1/3}\right)$$

Il primo termine ha dimensioni $[energia^2]$: $E_s = m_e c^2[4\pi/\alpha]^{1/2} \approx 21\ MeV$. Il terzo termine ha le dimensioni $[cm^{-1}]$ e definiamo il

$$\textit{cammino di radiazione} \qquad \frac{1}{X_o} = 4r_e^2\alpha\ \frac{N_o Z^2\rho}{A}\ \ln 183\ Z^{-1/3}$$

Integrando su uno spessore finito di materiale, $\langle\theta^2\rangle = \int \theta_s^2\ dx$, l'angolo medio di diffusione coulombiana multipla

$$\sqrt{\langle\theta^2\rangle} = z\ \frac{E_s}{pv}\ \sqrt{\frac{x}{X_o}}$$

è proporzionale alla carica elettrica, inversamente proporzionale all'impulso e dipende dalla radice quadrata dello spessore di materiale misurato in cammini di radiazione. Il cammino di radiazione, così chiamato perché è la lunghezza caratteristica dei processi di irraggiamento, è inversamente proporzionale al numero atomico Z e alla densità del materiale. Se si misura la traiettoria di una particella in un piano, nella approssimazione di angoli piccoli, $\langle\theta^2\rangle = \langle\theta_x^2\rangle + \langle\theta_y^2\rangle$, l'angolo medio *proiettato* sul piano è

$$\sqrt{\langle\theta_{proj}^2\rangle} = \sqrt{\frac{\langle\theta^2\rangle}{2}} \approx z\ \frac{14\ MeV}{pv}\ \sqrt{\frac{x}{X_o}}$$

In realtà la distribuzione misurata ha delle code non gaussiane dovute a collissioni con grandi angoli di deflessione e a effetti di correlazione che sono riprodotti con calcoli più accurati.

1.4.7 Irraggiamento

Nelle collisioni elastiche con i nuclei atomici una particella carica viene accelerata e quindi emette radiazione elettromagnetica. La potenza emessa è proporzionale al quadrato dell'accelerazione (appendice4.7). Poiché la forza coulombiana non dipende dalla massa, la potenza è inversamente proporzionale al quadrato della massa. Il fenomeno dell'irraggiamento, detto anche *bremsstrahlung*, è molto più importante per gli elettroni che per le altre particelle. Per particelle più pesanti diventa non trascurabile solo per valori di $\gamma \gg 1$. Facciamo quindi l'ipotesi $\beta \approx 1$ e che la velocità della particella non cambi apprezzabilmente durante la collisione col nucleo. Tratteremo il fenomeno sulla base di considerazioni semplici e in modo approssimato. La trattazione accurata dell'irraggiamento di elettroni nel campo dei nuclei

$$e^-\ \mathcal{N} \to \mathcal{N}\ e^-\ \gamma$$

è stata fatta da Bethe e Heitler nel 1934 tenendo conto degli effetti quantistici.

Consideriamo una particella di massa M, carica ze, con velocità $\vec{v}$ e parametro d'urto b rispetto ad un nucleo di carica Ze e calcoliamo la potenza emessa per

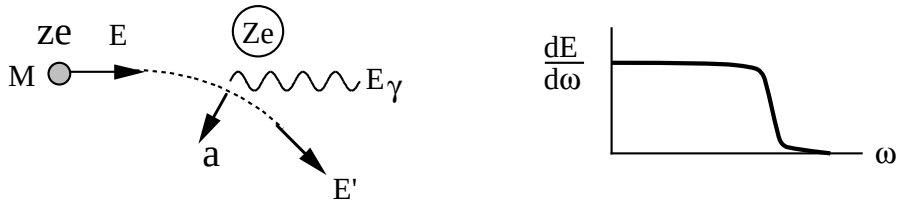


Figure 1.50: Irraggiamento nel campo di un nucleo

irraggiamento nel riferimento della particella, O', dove la componente trasversa del campo elettrico del nucleo appare espansa del fattore γ (Fig.1.50). Abbiamo visto che in questo riferimento l'impulso trasferito è dato dal prodotto della componente trasversa del campo elettrico per un tempo d'urto pari a $2b/\gamma v$. Se la particella è soggetta ad una accelerazione a', la potenza irraggiata (appendice 4.7) è

$$a' = \gamma \, \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o b^2} \, \frac{1}{M} \qquad\qquad W' = \frac{2}{3} \, \frac{(ze)^2}{4\pi\epsilon_o} \, \frac{a'^2}{c^3} = \gamma^2 \, \frac{2}{3} \, \frac{z^4 Z^2 e^6}{(4\pi\epsilon_o)^3} \, \frac{1}{b^4 M^2 c^3}$$

L'energia emessa durante il tempo d'urto $\Delta t' = 2b/\gamma v$ è

$$\Delta E' = \int W' dt' = \gamma \, \frac{4}{3} \, \frac{z^4 Z^2 e^6}{(4\pi\epsilon_o)^3} \, \frac{1}{b^3 M^2 c^3 v}$$

Lo spettro di frequenza di un fenomeno impulsivo di durata $\Delta t' = 2b/\gamma v$ è approssimativamente uniforme fino alla frequenza di taglio $\omega'_c = \gamma v/2b$ (Fig.1.50) e quindi l'energia irraggiata per unità di frequenza è

$$\frac{dE'}{d\omega'} \approx \frac{\Delta E'}{\omega'_c} = \frac{8}{3} \, \frac{z^4 Z^2 e^6}{(4\pi\epsilon_o)^3} \, \frac{1}{b^2 M^2 c^3 v^2}$$

Lo spettro di frequenza $dE/d\omega$ è una quantità invariante perché energia e frequenza si trasformano allo stesso modo. Nel laboratorio la frequenza della radiazione è trasformata per effetto Doppler

$$\omega = \gamma\omega'(1 - \beta\cos\theta') \qquad\qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(\cos\theta' - \beta)}$$

e, tenendo conto che la distribuzione angolare della radiazione nel riferimento della particella è approssimativamente uniforme (appendice 4.7), troviamo che

- lo spettro di *energia irraggiata per unità di frequenza*

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{8}{3} \, z^4 Z^2 \, r_e^2 \, \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o} \, \frac{m_e^2}{M^2} \, \frac{1}{\beta^2 c} \, \frac{1}{b^2}$$

  è approssimativamente uniforme fino alla frequenza massima $\omega_c \approx \beta\gamma^2 c/2b$;

- la radiazione è emessa ad angoli piccoli, $\theta \approx 1/\gamma$, e l'angolo di emissione non dipende dalla frequenza.

L'energia irraggiata viene emessa sotto forma di quanti, i fotoni, con energia $E_\gamma = \hbar\omega$. Il numero di fotoni irraggiati per intervallo unitario di energia è

$$\frac{dn}{dE_\gamma} = \frac{1}{E_\gamma}\,\frac{dE}{d\hbar\omega}$$

In un materiale con $n_N = N_o\rho/A$ nuclei per unità di volume, il numero di collissioni per unità di percorso con parametro d'urto compreso tra b e $b+db$ è $2\pi n_N b db d\ell$. Il numero di fotoni irraggiati per intervallo unitario di energia e per unità di percorso si ottiene integrando sui possibili valori del parametro d'urto

$$\frac{d^2n}{dE_\gamma d\ell} = \frac{1}{E_\gamma}\frac{8\pi}{3}\,\frac{z^4}{\beta^2}\,r_e^2\,\alpha\,\frac{m_e^2}{M^2}\,\frac{N_o Z^2\rho}{A}\,\ln\frac{b_{max}}{b_{min}}$$

Nel fissare i limiti di integrazione del parametro d'urto occorre tener conto delle diverse possibili situazioni di schermaggio della carica del nucleo da parte degli elettroni atomici. La distribuzione del numero di fotoni emessi si esprime ($x = \rho\ell$)

$$\frac{d^2n}{dE_\gamma dx} = \frac{z^4}{\beta^2}\,\frac{m_e^2}{M^2}\,4r_e^2\alpha\,\frac{N_o Z^2}{A}\,\frac{F(E,E_\gamma)}{E_\gamma}$$

dove E è l'energia della particella e $F(E,E_\gamma)$ è una funzione che tiene conto dello schermaggio. L'energia emessa per unità di percorso si ottiene integrando la relazione precedente

$$\frac{dE}{dx} = \int_o^E \frac{d^2n}{dE_\gamma dx}\,E_\gamma\,dE_\gamma = \frac{z^4}{\beta^2}\,\frac{m_e^2}{M^2}\,4r_e^2\alpha\,\frac{N_o Z^2}{A}\,\int_o^E F(E,E_\gamma)\,dE_\gamma$$

Poiché per particelle con massa $M \gg m_e$ la probabilità di irraggiamento è molto piccola, limitiamoci a considerare l'irraggiamento da parte di *elettroni relativistici* ($z = 1$, $M = m_e$, $\beta \approx 1$). In questo caso

- per energia $m_e c^2 \ll E \ll m_e c^2 Z^{-1/3}/\alpha$ la carica del nucleo non è schermata e l'integrale vale
$$\int_o^E F(E,E_\gamma)\,dE_\gamma = \left(\ln\frac{2E}{m_e c^2} - \frac{1}{3}\right)E$$
- per energia $E \gg m_e c^2 Z^{-1/3}/\alpha$ la carica del nucleo è parzialmente schermata e l'integrale vale
$$\int_o^E F(E,E_\gamma)\,dE_\gamma = \left(\ln 183Z^{-1/3} + \frac{1}{18}\right)E$$

Quindi la perdita di energia per unità di percorso aumenta con l'energia e, per energia elevata, è approssimativamente proporzionale a E. Ricordando la definzione del cammino di radiazione, che abbiamo ottenuto assumendo $b_{min} \approx r_{nucleo}$ e $b_{max} \approx r_{atomo}$, si ha

$$\frac{dE}{dx} = 4r_e^2\alpha\frac{N_o Z^2}{A}\,\left(\ln 183Z^{-1/3} + \frac{1}{18}\right)E \approx \frac{E}{X_o}$$

Nell'attraversare un materiale di cammino di radiazione X_o un elettrone dissipa la sua energia iniziale E_o con andamento esponenziale: $E(x) = E_o e^{-x/X_o}$.

In questa trattazione molto approssimata abbiamo trovato che la distribuzione in energia irraggiata è uniforme. In realtà questa conclusione non è corretta, ma è una discreta approssimazione per elettroni di energia elevata. Con questa approssimazione, cioè considerando $F(E, E_\gamma) \approx \langle F(E, E_\gamma) \rangle \approx \ln 183 Z^{-1/3}$, la sezione d'urto di irraggiamento per elettroni di alta energia è

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = 4r_e^2 \alpha \; Z^2 \; \frac{F(E, E_\gamma)}{E_\gamma} \approx \frac{4r_e^2 \alpha}{E_\gamma} \; Z^2 \; \ln 183 Z^{-1/3}$$

È interessante notare che la sezione d'urto è proporzionale alla sesta potenza della carica elettrica (alla terza potenza della costante α) e su questo torneremo più avanti.

• Interazioni dei fotoni

1.4.8 Effetto fotoelettrico

Fotoni di energia maggiore dell'energia di legame degli elettroni atomici vengono assorbiti dagli atomi che vengono ionizzati. Gli elettroni sono emessi con energia cinetica

$$K_e = E_\gamma - E_{legame}$$

e il nucleo atomico assorbe parte dell'impulso del fotone. La sezione d'urto del processo

$$\gamma \; \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+ \; e^-$$

decresce approssimativamente come E_γ^{-3} e mostra delle discontinuità in corrispondenza delle energie degli orbitali atomici $\ldots M, \; L, \; K$ dove si aprono i canali di assorbimento. Una trattazione rigorosa dell'effetto fotoelettrico è difficile perché richiede la conoscenza delle funzioni d'onda degli stati atomici. Per energia maggiore dell'energia di legame degli orbitali K, la sezione d'urto di assorbimento dei raggi X è approssimativamente

$$\sigma_{p.e.} \approx \sigma_T \; 4\alpha^4 Z^5 \left(\frac{m_e c^2}{E_\gamma} \right)^3$$

dove $\sigma_T = (8\pi/3) r_e^2$ è la sezione d'urto di Thomson. La sezione d'urto ha una forte dipendenza dal numero atomico Z: la probabilità del singolo processo di assorbimento è proporzionale a Z^4 e vi è un altro fattore Z per tener conto del numero di elettroni. Il coefficiente di assorbimento per effetto fotoelettrico in un materiale con n_A atomi per unità di volume è

$$\mu_{p.e.} = n_A \; \sigma_{p.e.} = \frac{N_o \rho}{A} \; \sigma_{p.e.}$$

1.4.9 Effetto Compton

Per fotoni con energia molto maggiore dell'energia di legame degli elettroni atomici, questi si possono considerare liberi. L'effetto Compton rappresenta il processo elementare di diffusione elastica

$$\gamma\ e^- \rightarrow \gamma\ e^-$$

Nel riferimento dell'elettrone un fotone di energia E viene diffuso ad angolo polare θ con energia E' (appendice 4.6)

$$E' = \frac{E}{1 + (E/m_e c^2)(1 - \cos\theta)}$$

La differenza tra la lunghezza d'onda della radiazione diffusa e quella della radiazione incidente dipende solo dall'angolo di emissione

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

questa fu l'osservazione che fece Compton [29] e misurò la *lunghezza d'onda Compton dell'elettrone*: $\lambda_c = h/m_e c$. L'elettrone acquista energia cinetica K_e ed è emesso ad angolo θ_e

$$K_e = E\ \frac{(E/m_e c^2)(1 - \cos\theta)}{1 + (E/m_e c^2)(1 - \cos\theta)} \qquad \tan\theta_e = \frac{1}{(1 + E/m_e c^2)\tan\theta/2}$$

l'energia dell'elettrone è massima quando il fotone è diffuso all'indietro, $\theta = \pi$. Se l'energia è $E \gg m_e c^2$ il fotone cede la maggior parte della sua energia all'elettrone.

La sezione d'urto è stata calcolata da Klein e Nishina nel 1928

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\left(\frac{E'}{E}\right)^2\left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2\theta\right)$$

Per piccoli valori dell'energia, $E \ll m_e c^2$, $E' \rightarrow E$, la sezione d'urto ha come limite la sezione d'urto di Thomson $d\sigma/d\Omega = (r_e^2/2)(2 - \sin^2\theta)$. È interessante notare che la sezione d'urto dell'effetto Compton, come la sezione d'urto di Rutherford, è proporzionale alla quarta potenza della carica elettrica (al quadrato della costante α). La sezione d'urto totale è

$$\sigma_C = 2\pi r_e^2\ \left[\frac{2}{\varepsilon^2}\left(1 - \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\ \ln(1+2\varepsilon)\right) + \frac{1}{2\varepsilon}\ \ln(1+2\varepsilon) + \frac{1+\varepsilon}{(1+2\varepsilon)^2}\right]$$

Con $\varepsilon = E/m_e c^2$. Per $\varepsilon \gg 1$ ha l'andamento asintotico

$$\sigma_C \approx \pi r_e^2\ \frac{m_e c^2}{E}\ \left(\frac{1}{2} + \ln\frac{2m_e c^2}{E}\right)$$

Il coefficiente di assorbimento per effetto Compton in un materiale con n_e atomi per unità di volume è

$$\mu_C = n_e\ \sigma_C = \frac{N_o Z \rho}{A}\ \sigma_C$$

[29] premio Nobel per la fisica nel 1927

1.4.10 Produzione di coppie

Quando l'energia è sufficientemente elevata, un fotone può essere assorbito convertendo la sua energia nella massa di una coppia particella-antiparticella nel campo elettrico di un nucleo. Il rinculo del nucleo assicura la conservazione dell'impulso. In realtà questo effetto è importante solo per produzione di coppie elettrone-positrone che può avvenire se l'energia del fotone è $E > 2m_e c^2$. Considerando che la corrente di un elettrone è equivalente a quella di un positrone con impulso opposto e che, come sarà chiarito più avanti, l'interazione elettromagnetica è invariante per inversione temporale, ci possiamo convincere che il processo di produzione di coppie

$$\gamma \, \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \; e^+ \; e^-$$

ha molte analogie con il processo di irraggiamento da parte di un elettrone nel campo del nucleo (Fig.1.51), $e^- \; \mathcal{N} \rightarrow e^- \; \mathcal{N} \; \gamma$.

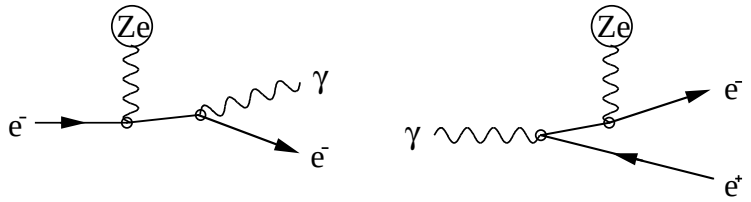


Figure 1.51: Irraggiamento e produzione di coppie elettrone-positrone nel campo di un nucleo

Molte delle considerazioni fatte per l'irraggiamento sono valide anche per la produzione di coppie. Il bilancio di energia e impulso nel processo è

$$E = K' + K'' + 2m_e c^2 + K_N \qquad\qquad \vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}'' + \vec{p}_N$$

e possiamo trascurare l'energia cinetica del nucleo poiché $p_N \approx m_e c$, quindi si ha $E' = K' + m_e c^2 = E - E''$.

La sezione d'urto differenziale per produzione di coppie e^+e^- è proporzionale al quadrato della carica del nucleo e si esprime

$$\frac{d\sigma}{dE'} = 4\alpha r_e^2 \; Z^2 \; \frac{F(E, E')}{E'}$$

dove E è l'energia del fotone, E' è l'energia di una delle due particelle prodotte e $F(E, E')$ è una funzione che tiene conto dei limiti di integrazione sul parametro d'urto e dello schermaggio del campo elettrico del nucleo. L'angolo medio di produzione di elettroni e positroni rispetto alla direzione del fotone è $\theta \approx m_e c^2/E$. La sezione d'urto si ottiene integrando la relazione precedente

$$\sigma_{p.p.} = 4\alpha r_e^2 \; Z^2 \int_o^{E-2mc^2} \frac{F(E, E')}{E'} \; dE'$$

- per energia $2m_ec^2 \ll E \ll m_ec^2Z^{-1/3}/\alpha$ la carica del nucleo non è schermata e l'integrale vale

$$\int_o^{E-2mc^2} \frac{F(E,E')}{E'}\, dE' = \frac{7}{9}\, \ln\frac{2E}{m_ec^2} - \frac{109}{54}$$

- per energia $E \gg m_ec^2Z^{-1/3}/\alpha$ la carica del nucleo è parzialmente schermata e l'integrale vale

$$\int_o^{E-2mc^2} \frac{F(E,E')}{E'}\, dE' = \frac{7}{9}\, \ln 183Z^{-1/3} - \frac{1}{54}$$

La sezione d'urto di produzione di coppie e^+e^-, ha la soglia a $E = 2m_ec^2$, cresce lentamente con il logaritmo dell'energia del fotone e diventa approssivamente costante a energia $E \gg m_ec^2Z^{-1/3}/\alpha$. Il coefficiente di assorbimento in un materiale che contiene n_N nuclei per unità di volume è $\mu_{p.p.} = (N_o\rho/A)\sigma_{p.p.}$ e, dalla definizione di cammino di radiazione, per fotoni di energia elevata è

$$\mu_{p.p.} \approx 4\alpha r_e^2\, \frac{N_oZ^2\rho}{A}\, \frac{7}{9}\, \ln 183Z^{-1/3} = \frac{7}{9\, X_o}$$

Quindi un fotone di energia elevata ha una probabilità di conversione pari a $e^{-7x/9X_o}$ nell'attraversare un materiale di spessore x.

La sezione d'urto dei diversi processi con cui i fotoni interagiscono con gli atomi o con i nuclei (effetto fotoelettrico, effetto Compton e produzione di coppie) dipende dall'energia E_γ e dalle proprietà dei materiali (densità, numero atomico e peso atomico). La Fig.1.52 mostra la sezione d'urto totale (risultati sperimentali) e il risultato del calcolo dei diversi contributi alla sezione d'urto in funzione dell'energia in Carbonio e Piombo. La sezione d'urto per effetto fotoelettrico decresce rapidamente con l'aumentare dell'energia e si osservano le soglie di eccitazione degli elettroni dei diversi orbitali atomici, la sezione d'urto per produzione di coppie elettrone-positrone aumenta rapidamente dopo la soglia ($E_\gamma > 2m_e$) e poi diventa approssimativamente costante, mentre il contributo dell'effetto Compton è più importante nella regione di energia intermedia ($E_\gamma = 100\ keV \div 10\ MeV$).

Il coefficiente di assorbimento dei fotoni è la somma dei vari contributi $\mu_\gamma = \mu_{p.e} + \mu_C + \mu_{p.p}$. La lunghezza di attenuazione $\lambda = 1/\mu$, misurata in $g\ cm^{-2}$, è mostrata in Fig.1.53 in funzione dell'energia per diversi elementi.

1.4.11 Sciami elettrofotonici

Elettroni e positroni di energia $E \gg m_ec^2$ hanno elevata probabilità di emettere fotoni di bremsstrahlung $e^-\mathcal{N} \to \mathcal{N}e^-\gamma$; lo spessore di materiale che caratterizza questo processo è il cammino di radiazione, X_o. D'altra parte, fotoni di alta energia hanno elevata probabilità di convertire in coppie elettrone-positrone $\gamma\mathcal{N} \to \mathcal{N}e^+e^-$; lo spessore di materiale caratteristico è $7X_o/9$. In entrambe questi processi l'energia

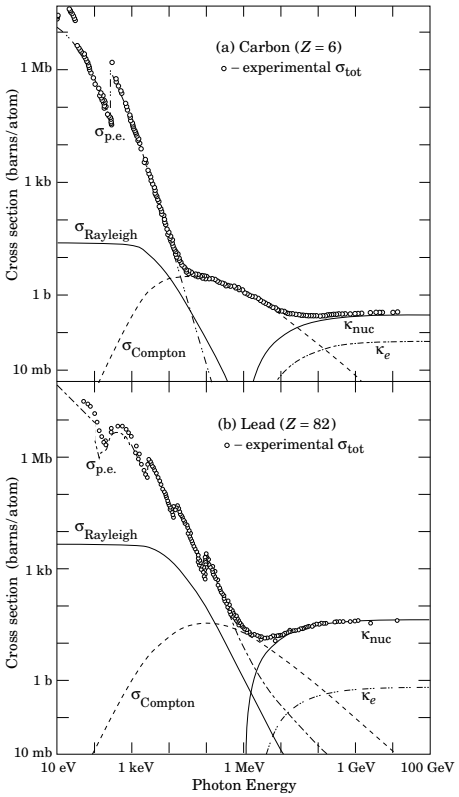


Figure 1.52: Sezione d'urto totale di fotoni in Carbonio e Piombo in funzione dell'energia (S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004)

cinetica della particella primaria, elettrone o fotone, è convertita in energia cinetica delle due particelle secondarie e non è ceduta agli atomi del materiale. Quindi un elettrone o un fotone di energia elevata dà origine ad un fenomeno moltiplicativo di produzione di elettroni, positroni e fotoni secondari che continua finché l'energia dei secondari non è così piccola da far prevalere i fenomeni dissipativi di ionizzazione ed eccitazione degli atomi. L'assorbimento di fotoni per effetto fotoelettrico è importante solo per energie inferiori al MeV. Per elettroni e positroni il fenomeno di ionizzazione è importante solo a energie di qualche decina di MeV.

Definiamo *energia critica* di un materiale l'energia per cui la perdita di energia per irraggiamento è uguale alla perdita di energia per ionizzazione

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = 4\alpha r_e^2 \ \frac{N_o Z^2}{A} \ E \ \ln 183 Z^{-1/3}$$

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion} = 4\pi r_e^2 \ m_e c^2 \ \frac{N_o Z}{A} \ \frac{1}{\beta^2} \ \left(\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\langle I \rangle} - \beta^2\right)$$

Per elettroni di alta energia, $\beta \approx 1$, $(dE/dx)_{ion}$ è approssimativamente costante e si ha

$$\frac{(dE/dx)_{rad}}{(dE/dx)_{ion}} \approx \frac{\alpha \ E \ ln 183 Z^{-1/3}}{\pi \ m_e c^2 \ ln[2m_e c^2 \gamma^2 / \langle I \rangle]} \approx \frac{ZE}{1600 \ m_e c^2}$$

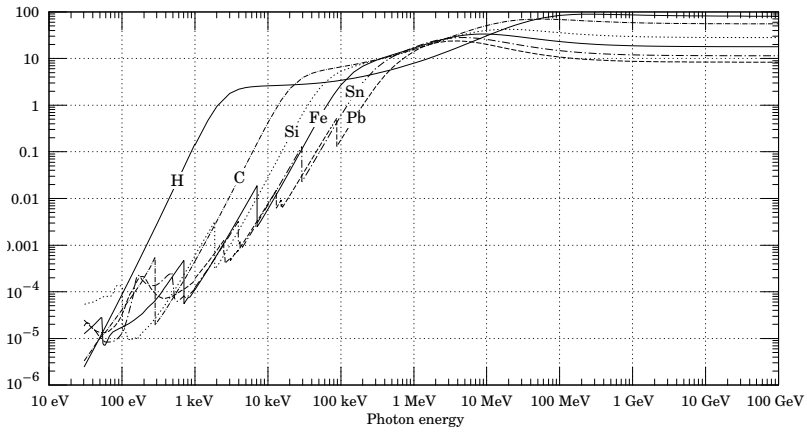


Figure 1.53: Lunghezza di assorbimento di fotoni in diversi elementi in funzione dell'energia (S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004)

$$\textit{energia critica} \qquad E_c \approx \frac{1600}{Z}\, m_e c^2$$

Gli *sciami elettrofotonici* sono stati osservati in raggi cosmici da Blackett e Occhialini nel 1933. Uno studio approfondito dello sviluppo degli sciami è stato fatto da Rossi e Greisen nel 1940. Per spiegare il fenomeno in modo qualitativo e approssimato facciamo le ipotesi:

- la particella primaria ha energia molto maggiore dell'energia critica;
- il coefficiente di assorbimento è lo stesso per elettroni e fotoni: consideriamo un cammino di radiazione *medio* $\bar{X}_o$;
- in ogni lunghezza di dimezzamento, $\bar{X}_o \ln 2$, una particella produce due secondari ($e^{\pm} \rightarrow e^{\pm}\,\gamma$ oppure $\gamma \rightarrow e^{+}\,e^{-}$) ciascuno con metà dell'energia;
- i secondari sono emessi ad angoli piccoli, $\theta \approx m_e c^2/E$, in avanti;
- i secondari non cedono energia al materiale se $E > E_c$.

Con queste ipotesi il numero di secondari aumenta con legge esponenziale se hanno energia sufficiente ad alimentare lo sviluppo dello sciame. Se E_o è l'energia della particella che inizia lo sciame, dopo uno spessore x di materiale si ha ($t = x/X_o$)

- *numero medio di secondari* $\qquad n_{sec}(t) = 2^t$
- *energia media dei secondari* $\qquad E_{sec}(t) = E_o/n_{sec}(t) = E_o/2^t$
- *massimo sviluppo dello sciame* $\qquad t = t_{max} = \frac{ln E_o/E_c}{ln 2}$
- *numero di secondari al massimo* $\qquad n_{sec}(t_{max}) = E_o/E_c$

Quando lo sciame ha raggiunto il massimo sviluppo, allo spessore t_{max}, gli elettroni e i positroni hanno energia media $E \approx E_c$ e iniziano a dissipare la loro energia in collisioni inelastiche con gli atomi del materiale e il numero di secondari decresce esponenzialmente con il coefficiente di assorbimento μ definito dalla sezione d'urto di ionizzazione. Quindi lo sviluppo longitudinale di uno sciame elettrofotonico ha un andamento crescente fino allo spessore t_{max} e poi un decadimento esponenziale. Il numero di secondari è usualmente parametrizzato nella forma

$$n_{sec}(x) = a\ (x/X_o)^b\ e^{-\mu x}$$

e il numero totale di secondari prodotti

$$n_{tot} = \int_o^\infty n_{sec}(x)\ dx$$

è proporzionale all'energia della particella primaria.

Nei fenomeni moltiplicativi di bremsstrahlung e produzione di coppie l'angolo di emissione dei secondari, $\theta \approx m_e c^2/E$, è minore dell'angolo medio di diffusione coulombiana multipla in uno spessore $\bar{X}_o$, $\langle\theta_s\rangle \approx 21\ MeV/E$. Quindi lo sviluppo laterale dello sciame è determinato dalla diffusione coulombiana dei secondari carichi e la dimensione tipica di uno sciame nel piano trasverso è

$$\langle r_\perp \rangle \approx \frac{21\ MeV}{E_c}\ X_o$$

detto *raggio di Molière*.

1.5 Metodi di rivelazione delle particelle

Gran parte dei metodi di rivelazione delle radiazioni sono basati sulla perdita di energia per ionizzazione delle particelle cariche nell'attraversare spessori di materiale. In questo caso, gli elettroni e gli ioni prodotti lungo il percorso sono la sorgente del segnale che rivela il passaggio della particella. Il numero di coppie di ioni i^+e^- per unità di percorso è chiamato *ionizzazione specifica* ed è il rapporto tra la perdita di energia per ionizzazione, $(dE/dx)_{ion}$, e l'energia necessaria per produrre una coppia i^+e^-. Questa dipende dal materiale ed è tipicamente $20 \div 30\ eV$. I metodi usati per rivelare fotoni dipendono dalla loro energia: a bassa energia, $E < 100\ keV$, si rivelano gli elettroni emessi per effetto fotoelettrico, per $E \approx 1\ MeV$ si sfrutta l'effetto Compton e ad alta energia il meccanismo di produzione di coppie e^+e^- e la capacità di iniziare sciami elettrofotonici. I metodi per rivelare neutroni sono basati sulle loro interazioni nucleari: ad energia sufficientemente elevata si rivelano le particelle cariche prodotte nelle reazioni nucleari, a bassa energia si usano materiali con nuclei leggeri cui i neutroni cedono energia cinetica per urto. I vari metodi sono essenzialmente basati sui processi studiati nel capitolo ???. I parametri importanti sono la ionizzazione specifica, per le particelle cariche, e il coefficiente di assorbimento per fotoni e neutroni.

Le caratteristiche principali di un rivelatore sono:

- *il potere risolutivo temporale*: la capacità di definire l'istante di passaggio della particella; per alcuni rivelatori si parla di *tempo di sensibilità* che è l'intervallo di tempo in cui il rivelatore è in grado di rivelare la particella;
- *il potere risolutivo spaziale*: la capacità di localizzare il passaggio della particella;
- *l'efficienza* di rivelare la particella;
- *il tempo di recupero* necessario per tornare in efficienza dopo aver registrato una particella.

Alcuni rivelatori hanno bisogno di un comando esterno, comunemente chiamato *trigger*, per essere in grado di rivelare una particella. Questo viene fornito da rivelatori con un potere risolutivo temporale adatto e con risposta rapida.

Nel seguito diamo un elenco dei pricipali metodi per rivelare le particelle senza entrare nel dettaglio, ma per fornire informazione sufficiente a capire gli esperimenti. Alcuni rivelatori hanno un *interesse storico* per l'importante contributo alla conoscenza nel campo della fisica nucleare e subnucleare, ma non vengono più utilizzati. Molti rivelatori sono chiamati *camere*: è una brutta traduzione dall'inglese ma è di uso corrente.

1.5.1 Rivelatori di tracce

Un rivelatore di tracce è usato per misurare molti punti vicini lungo il passaggio di una particella carica per ricostruirne la traiettoria.

Camera a nebbia

La camera a nebbia, detta anche *camera di Wilson* [30] che ideò la tecnica e realizzò la prima nel 1912, ha avuto un ruolo fondamentale nei primi studi dei raggi cosmici. Il principio di funzionamento è basato sulla proprietà di un *gas sovrasaturo*, in totale assenza di polveri, di produrre goccioline dove sono presenti ioni a seguito di una rapida espansione. Se l'espansione avviene entro un breve intervallo di tempo rispetto al passaggio di una particella ionizzante, le goccioline si formano attorno agli ioni prodotti. Il tempo di sensibilità è tipicamente di $10 - 100\ ms$. In molti esperimenti l'espansione della camera a nebbia è fatta in modo *asincrono*. Il tempo di sensibilità è comunque abbastanza lungo perché si possa utilizzare un comando esterno. La posizione delle goccioline viene registrata illuminando e fotografando la camera a nebbia subito dopo l'espansione. Il ritardo deve essere sufficientemente breve perché le goccioline non diffondano nel gas. La risoluzione spaziale dipende dalle dimensioni e dalla diffusione delle goccioline ed è tipicamente $\approx 0.5\ mm$. Il tempo di recupero necessario perché dopo un'espansione il gas sia nelle condizioni di rivelare il passaggio di un'altra particella è di alcuni secondi.

[30] premio Nobel per la fisica nel 1927

Camera a diffusione

Il principio di funzionamento della camera a diffusione è lo stesso della camera a nebbia, ma non ha bisogno di espansione perché le condizioni di gas sovrasaturo per la formazione di goccioline attorno agli ioni vengono mantenute con un delicato procedimento di diffusione del vapore all'interno della camera. La camera a diffusione ha il vantaggio di funzionare in modo continuo e, poiché non è necessario espandere il gas, di poter funzionare a pressione. La camera a diffusione è stata utilizzata in esperimenti con fasci di particelle prodotti da acceleratori. La risoluzione spaziale è $\approx 0.5\ mm$ ed è limitata dai moti convettivi della diffusione del vapore all'interno della camera.

Camera a bolle

Il materiale sensibile in una camera a bolle è un liquido in cui la pressione idrostatica è mantenuta per un breve intervallo di tempo più bassa della tensione di vapore. In queste condizioni il *liquido surriscaldato* non bolle spontaneamente, le bolle si possono formare solo se c'è un aumento locale di temperatura; questo è prodotto dall'energia rilasciata da particelle ionizzanti. L'energia necessaria per produrre le condizioni di crescita di una bolla è tipicamente $10 \div 100\ eV$. La camera a bolle è stata ideata da Glaser [31] che realizzò la prima nel 1952. La camera a bolle funziona in modo ciclico: nello stato di riposo si ha $p > p_{vap}$; una rapida espansione porta la camera nella condizione di funzionamento in cui $p < p_{vap}$; segue una rapida compressione per tornare nella condizione di riposo. Nella condizione di funzionamento il tempo di sensibilità è di circa 10 ms, la durata del ciclo è tipicamente una frazione di secondo.

Le camere a bolle sono state usate in esperimenti presso acceleratori con il ciclo di operazione sincronizzato con l'estrazione del fascio in modo che questo attraversi la camera durante il periodo di sensibilità, le tracce formate dalle bollicine vengono illuminate e fotografate entro un intervallo di tempo di qualche ms sufficiente a far formare le bolle, ma prima che queste siano troppo grandi per non degradare la risoluzione spaziale che è tipicamente di 0.3 mm. Il liquido della camera a bolle costituisce anche il bersaglio: camere a bolle usate con idrogeno e deuterio liquido hammo permesso di studiare le reazioni di particelle con protoni e neutroni. Liquidi nobili e liquidi organici più pesanti sono usati per aumentare la densità del bersaglio e quindi la luminosità di un esperimento.

Emulsioni nucleari

Béquerel per primo osservò nel 1896 che le emulsioni fotografiche sono sensibili alle radiazioni. Da allora si è cercato di capire la natura di questo fenomeno e di sviluppare metodi di rivelazione basati sulle emulsioni fotografiche. Emulsioni capaci di rivelare tracce di particelle di bassa energia e altamente ionizzanti, come i raggi α,

[31] premio Nobel per la fisica nel 1960

sono state utilizzate dal 1925. Nel 1939 Powell [32] in collaborazione con i laboratori Ilford realizzò le prime emulsioni sensibili a particelle al minimo di ionizzazione.

Le emulsioni nucleari sono costituite da grani di bromuro di argento, $AgBr$, di dimensioni della frazione di μm distribuiti in una gelatina con una densità di alcuni grani/10 μm. La particella ionizzante produce lungo il suo percorso elettroni che tendono a trasformare i grani in Ag metallico. Questa trasformazione viene completata quando, dopo l'esposizione, l'emulsione viene sottomessa al processo chimico dello *sviluppo* per cui i grani di Ag, non trasparenti, riproducono la traccia della particella nella emulsione. Le emulsioni sono preparate in lastre dello spessore di $300 \div 500$ μm e della dimensione di circa 200 cm^2 e, una volta sviluppate, vengono osservate al microscopio.

Le emulsioni nucleari non hanno alcuna risoluzione temporale poiché sono sensibili dal momento della produzione al momento dello sviluppo e durante questo periodo vanno tenute ain condizioni di bassa umidità, bassa temperatura e, possibilmente, schermate da sorgenti di radiazione che non si vuol rivelare. Hanno d'altra parte un'ottima risoluzione spaziale data dalla dimensione dei grani impressionati, ≈ 1 μm, e dalla loro distanza, < 10 μm. Con emulsioni nucleari si può determinare la ionizzazione specifica di una particella, misurando la densità di grani impressionati, e la direzione della particella, ossevando l'aumento della diffusione coulombiana multipla dovuto alla perdita di energia lungo il percorso.

Camera a scintilla

La camera a scintilla, sviluppata negli anni '50, è costuita da lastre conduttrici piane, tipicamente distanziate di 1 cm, connesse atlernativamente a massa e ad un generatore impulsivo di tensione. Tra le lastre vi è un gas nobile che viene ionizzato dal passaggio di una particella carica. Se immediatamente dopo il passaggio della particella, prima che avvenga la ricombinazione degli ioni, si applica un campo elettrico di $\approx$ 10 kV/cm gli elettroni vengono fortemente accelerati e innescano una scarica lungo la traccia di ionizzazione lasciata dalla particella. L'impulso di tensione deve essere comandato da rivelatori rapidi entro il tempo di sensibilità, che è ≈ 0.5 μs, e deve essere breve, < 0.1 μs, per limitare l'energia e quindi la dimensione della scarica. Le scintille sono facilmente visibili e possono essere fotografate. La risoluzione spaziale è definita dalla dimensione della scarica ed è tipicamente < 1 mm per tracce normali agli elettrodi e peggiora leggermente per tracce inclinate. Vi è un tempo di recupero di circa 1 ms per eliminare la ionizzazione residua prodotta dalla scarica.

Camera a streamer

Nella camera a streamer, come nella camera a scintilla, il mezzo sensibile è un gas nobile che viene ionizzato dal passaggio di una particella carica. In questo caso i due elettrodi sono più distanti tra loro e il campo elettrico, $\approx$ 20 kV/cm,

[32] premio Nobel per la fisica nel 1950

viene eccitato per un tempo molto breve $\approx 10\ ns$. In questo breve intervallo di tempo gli elettroni sono fortemente accelerati e producono altri elettroni secondari di ionizzazione che emettono radiazione, ma l'energia non è sufficiente a innescare la scarica. La radiazione emessa lungo la traccia di ionizzazione è visibile e può essere fotografata. Anche in questo caso c'è bisogno di un comando esterno: più breve è il ritardo migliore è la risoluzione spaziale, tipicamente $< 1\ mm$.

1.5.2 Scintillatori

Alcuni materiali emettono *luce di scintillazione* quando sono attraversati da particelle ionizzanti. Questo fenomeno, osservato da Crookes nel 1903, fu utilizzato per rivelare le particelle α nell'esperimento di Rutherford. Il metodo di rivelazione della luce di scintillazione è stato reintrodotto nella sperimentazione in fisica nucleare da Curan e Baker nel 1944.

Una particella ionizzante eccita le molecole del materiale e queste si diseccitano emettendo radiazione di fluorescenza. Se le caratteristiche dei livelli atomici o molecolari sono tali che la diseccitazione avviene attraverso stati intermedi, la radiazione non viene riassorbita e il materiale è trasparente alla luce di fluorescenza emessa. Per effetto degli stati intermedi i materiali scintillanti hanno usualmente una componente con tempo di decadimento rapida e una più lenta. Esistono numerosi materiali scintillanti sotto forma di cristalli organici e inorganici, materiali plastici e liquidi che emettono luce di scintillazione nel visibile con tempi di decadimento $10^{-9} \div 10^{-8}\ s$. L'energia necessaria per produrre un fotone è tipicamente $10\ eV$.

La luce emessa viene convogliata mediante *guide di luce* e inviata sul fotocatodo di un *fotomoltiplicatore* dove viene convertita per effetto fotoelettrico con efficienza quantica tipicamente 20%; i *fotoelettroni* prodotti sul fotocatodo vengono accelerati e moltiplicati con opportuni campi elettrici in pochi ns con un fattore di guadagno $10^6 \div 10^8$. La risoluzione temporale di uno scintillatore è $\approx 1\ ns$ e la risposta può essere usata per fornire il trigger ad altri rivelatori. La risoluzione spaziale è definita dalle dimensioni del rivelatore. Il tempo di recupero è quello necessario a eliminare la carica accumulata dagli elettrodi (dinodi) del fotomoltiplicatore ed è molto piccolo, tipicamente $< 10\ ns$.

1.5.3 Rivelatori Čerenkov

La *luce Čerenkov* prodotta in un materiale di indice di rifrazione n da una particella con velocità $\beta > 1/n$ è emessa in modo istantaneo ad un angolo $\cos\theta_c = 1/\beta n$ rispetto alla linea di volo della particella. Il materiale può esser solido, liquido o gassoso; in un gas si può scegliere l'indice di rifrazione regolando la pressione. Il numero di fotoni emessi per unità di percorso è circa un fattore 30 minore che nel caso degli scintillatori e questo implica una lunghezza adeguata del materiale radiatore e un elevata efficienza quantica del fotorivelatore. Convogliando la luce emessa sul fotocadoto di uno o più fotomoltiplicatori si può selezionare una particella carica con

velocità maggiore della soglia di emissione. La risoluzione temporale di un rivelatore Čerenkov è circa 1 ns e la risposta può essere usata per fornire il trigger ad altri rivelatori. La risoluzione spaziale è definita dalle dimensioni del rivelatore. Il tempo di recupero è molto piccolo.

Oltre a rivelatori a soglia, si possono costruire *rivelatori Čerenkov differenziali*: sfruttando l'angolo di emissione si può misurare direzione e velocità di una particella carica.

1.5.4 Camere a ionizzazione

In questo tipo di rivelatori la carica elettrica prodotta per ionizzazione da una particella carica viene raccolta con opportuni campi elettrici. Il materiale può essere gas, liquido o solido. Le cariche prodotte migrano verso gli elettrodi seguendo le linee di forza del campo. Un parametro importante è la *velocità di deriva* delle cariche prodotte nel materiale che è molto diversa per ioni e per elettroni.

Camera a fili

In una camera a fili il materiale è un gas e l'anodo è costituito da fili che hanno la duplice funzione di produrre il campo elettrico e di amplificare la carica di ionizzazione. I gas tipicamente usati sono miscele di gas nobili e di idrocarburi in cui una particella con $z = 1$ al minimo di ionizzazione rilascia ≈ 30 coppie i^+e^- per cm a pressione atmosferica. La velocità di deriva degli elettroni dipende dal tipo di gas, dalla pressione e dal campo elettrico ed è tipicamente $\approx 5\ cm/\mu s$ a pressione atmosferica nelle regioni in cui $E \approx 1\ kV/cm$. La velocità di deriva degli ioni positivi è circa 10^4 volte maggiore.

Nelle vicinanze del filo il campo elettrico ha l'andamento $\sim 1/r$ e, se il raggio del filo è piccolo, gli elettroni sono fortemente accelerati e producono elettroni secondari formando un effetto *valanga*. Il fattore di moltiplicazione dipende dal gas, dalla pressione e dal campo elettrico e distingue diversi regimi di operazione di un rivelatore a fili. Se il fattore di moltiplicazione è inferiore a $\approx 10^6$, il numero di elettroni secondari è approssimativamente proporzionale alla carica di ionizzazione (*camera a fili proporzionale*). Per valori maggiori il rivelatore funziona in regime saturato in cui il numero di elettroni secondari è approssimativamente costante (il contatore realizzato da Geiger e Müller nel 1928 è un esempio). La moltiplicazione avviene nella regione di poche decine di μm attorno al filo in un intervallo di tempo di qualche ns e il segnale in corrente in un rivelatore proporzionale è tipicamente di qualche μA.

Le camere a fili, sviluppate da Charpack [33] nel 1967, possono essere costruite in diverse configurazioni geometriche con l'anodo costituito da piani metallici, griglie di fili, tubi, ... La risoluzione temporale è definita dal tempo di raccolta della carica: se consideriamo come esempio un piano di fili anodici distanziati di 1 cm dal catodo e di 1 cm tra loro questa è $\approx 100\ ns$ e la risoluzione spaziale è $\approx 3\ mm$. Il filo è

[33] premio Nobel per la fisica nel 1992

sempre attivo, ma per effetto della densità di carica dovuta alla moltiplicazione, il campo elettrico si riduce per un breve tratto lungo il filo: quindi il recupero è un effetto locale.

Camera a deriva

Una camera a fili in cui si misura il tempo di deriva degli elettroni di ionizzazione rispetto ad un riferimento temporale esterno si chiama camera a deriva. Il segnale di riferimento temporale può essere fornito da un altro rivelatore (ad esempio scintillatori) o, in esperimenti presso acceleratori, da un segnale sincronizzato con il passaggio del fascio. In questo rivelatore la distanza tra il catodo e i fili anodici può essere grande: fino a $\approx 10\ cm$. La posizione della particella è misurata dal tempo di deriva se si conosce la velocità di deriva degli elettroni di ionizzazione. La risoluzione spaziale è definita dagli effetti di diffusione degli elettroni durante la migrazione verso l'anodo e dalla precisione con cui è nota la velocità di deriva ed è tipicamente $100 - 200\ \mu m$. Disponendo opportunamente i piani di fili si costruiscono rivelatori di tracce del tipo discusso in precedenza con tempo di recupero trascurabile. Le prestazioni di un rivelatore a gas di questo tipo migliorano con la pressione: aumenta la ionizzazione specifica e diminuisce la diffusione degli elettroni nel gas.

Camera a ionizzazione a liquido

L'utilizzo di un liquido in una camera a ionizzazione ha due vantaggi: la ionizzazione specifica è molto maggiore che in un gas e la diffusione delle cariche durante la migrazione verso gli elettrodi è molto minore. La maggiore densità ha però due inconvenienti: è molto difficile raggiungere le condizioni per la moltiplicazione a valanga ed è necessaria una bassissima concentrazione di impurità elettronegative per ottenere un segnale. Per queste ragioni nelle camere a ionizzazione a liquido si utilizzano liquidi nobili (Ar, Kr, Xe) a bassa temperatura e il campo elettrico è realizzato con elettrodi piani paralleli. In questi liquidi la velocità di deriva degli elettroni è costante $\approx 0.5\ cm/\mu s$ in un ampio intervallo del campo elettrico ($\approx 10\ kV/cm$). In assenza di impurità elettronegative, il segnale indotto sugli elettrodi dal moto degli elettroni è proporzionale alla ionizzazione prodotta dalla particella. La risoluzione temporale è definita dal tempo di raccolta della carica. La risoluzioni spaziale è definita dalle dimensioni degli elettrodi che possono essere opportunamente segmentati. Il campo elettrico è sempre attivo e, poiché non c'è moltiplicazione, il tempo di recupero in questo rivelatore è praticamente inesistente.

Camera a ionizzazione a semiconduttore

La camera a ionizzazione a semiconduttore è realizzata con una giunzione polarizzata inversamente completamente svuotata. I materiali usati sono Si, Ge o $GaAs$ con elevata resistività per limitare la corrente attraverso la giunzione. In Silicio, che è il materiale più comunemente usato, lo spessore della zona di svuotamento,

tipicamente $200 \div 400\ \mu m$, si ottiene con una differenza di potenziale di circa $200\ V$. L'energia necessaria per produrre una coppia elettrone-lacuna è circa $3\ eV$. Con una densità $2.3\ g/cm^3$, il numero di cariche prodotte da una particella con $z = 1$ al minimo di ionizzazione è circa $3\ 10^4\ e$. La velocità di deriva è approssimativamente uguale per elettroni e lacune, $\approx 5\ cm/\mu s$. Il segnale di carica indotta sugli elettrodi della giunzione ha un tempo di formazione di $\approx 1\ ns$. I rivelatori a semiconduttore hanno quindi ottima risoluzione temporale. La risoluzione spaziale è definita dalle dimensioni dagli elettrodi, che non le moderne tecniche sviluppate per i circuiti integrati, possono essere molto piccoli: si ottengono comunemente risoluzioni di $\approx 10\ \mu m$. Anche in questo caso il tempo di recupero è praticamente inesistente.

1.5.5 Metodi di misura delle variabili cinematiche

Negli esperimenti si misurano le variabili cinematiche delle particelle: direzione, impulso, velocità, energia, massa, ... I metodi di misura dipendono dagli obiettivi e dalle condizioni del particolare esperimento.

Misura di carica elettrica

I metodi di rivelazione delle particelle che abbiamo illustrato dipendono dal quadrato della carica elettrica che è un multiplo intero della carica elementare e. Quindi qualunque sia il metodo di misura c'è una dipendenza dalla carica elettrica. Il segno della carica è misurato dal moto in campi elettrici o magnetici.

Misura di impulso

L'impulso di una particella carica si misura dalla curvatura della traiettoria in campo magnetico. La componente dell'impulso normale alla direzione del campo è $p_n = 0.3\ zB(\ell)\rho$ (in unità GeV, Tesla, metro) dove ρ è il raggio di curvatura, ze è la carica elettrica e ℓ è la coordinata lungo la traiettoria. Consideriamo l'esempio di impulso elevato, cioè raggio di curvatura grande e angolo di deflessione piccolo, e particelle con $z = 1$.

- Se la misura è fatta con un rivelatore di tracce *interno* ad un campo magnetico uniforme la sagitta dell'arco di circonferenza è inversamente proporzionale all'impulso

$$(\rho - s)^2 + (\ell/2)^2 = \rho^2 \qquad s = \frac{\ell^2}{8\rho} \qquad \frac{1}{p_n} = \frac{4\ s}{0.3 \int B(\ell)\ell d\ell}$$

  se l'errore di misura della sagitta è δs, la risoluzione in impulso è

$$\frac{\delta p_n}{p_n} = p_n\ \frac{4\ \delta s}{0.3 \int B(\ell)\ell d\ell}$$

- Se la misura è fatta con rivelatori *esterni* al campo magnetico, l'angolo di deflessione è
$$\theta = \frac{\ell}{\rho} \qquad\qquad \frac{1}{p_n} = \frac{\theta}{0.3 \int B(\ell) d\ell}$$
se si utilizzano due rivelatori di spessore D ciascuno con risoluzione angolare $\delta\theta = \delta s/D$, la risoluzione è
$$\frac{\delta p_n}{p_n} = \frac{\delta\theta}{\theta} = p_n \, \frac{\sqrt{2}\, \delta s/D}{0.3 \int B(\ell) d\ell}$$

In entrambe i casi la precisione è definita dal potere risolutivo spaziale e peggiora con l'aumentare dell'impulso: $\delta p/p \propto p$. Oltre agli errori strumentali occorre tener conto della diffusione coulombiana multipla della particella carica lungo il percorso. In un tratto di lunghezza ℓ la particella viene deflessa con dispersione angolare $\delta\theta = (14\ MeV/p\beta c)(\ell/X_o)^{1/2}$ e questo produce un errore sulla misura dell'impulso
$$\frac{\delta p_n}{p_n} = \frac{\delta\theta}{\theta} = \frac{14\ MeV}{\beta c\ 0.3 \int B(\ell) d\ell} \left[\frac{\ell}{X_o}\right]^{1/2}$$
Quindi, in generale, la risoluzione di una misura di impulso dipende dai due effetti non correlati: risoluzione spaziale dei rivelatori e diffusione coulombiana multipla
$$\frac{\delta p}{p} = \left[A_m\ p^2 + A_s\right]^{1/2}$$

Misura di velocità

Misure di velocità si possono effettuare con rivelatori Čerenkov, con misure di tempo di volo, oppure misurando la ionizzazione specifica che è funzione solo di β:

- se si misura l'angolo di emissione della radiazione Čerenkov, $\cos\theta = 1/n\beta$, la risoluzione è $\delta\beta/\beta = \tan\theta\ \delta\theta$;
- se si misura il tempo di volo con due rivelatori che hanno risoluzione temporale δt posti a distanza L, la risoluzione è $\delta\beta/\beta = \sqrt{2}\ (\beta c/L)\ \delta t$;
- misure di ionizzazione specifica si possono fare campionando la perdita di energia per ionizzazione di una particella più volte lungo il suo percorso. Dato l'andamento di dE/dx in funzione di β, la sensibilità è molto maggiore per velocità minori del valore di minima ionizzazione.

Se è noto l'impulso, una misura di velocità può determinare la massa della particella. La sensibilità della misura peggiora all'umentare dell'impulso, quando cioè $\beta \to 1$
$$p = m\beta c\gamma \qquad\qquad \frac{\delta m}{m} = \frac{\delta(\beta\gamma)}{\beta\gamma} = \frac{\gamma^3 \delta\beta}{\beta\gamma} = \frac{1}{1-\beta^2}\ \frac{\delta\beta}{\beta}$$

Misura di energia

Se sono note due grandezze tra massa, velocità e impulso è nota anche l'energia: $E = mc^2\gamma = pc/\beta$. Una misura diretta di γ si può fare con rivelatori sensibili alla radiazione di transizione. Questo è un metodo di misura difficile perché l'intensità della radiazione di transizione è bassa e la rivelazione dei raggi X non è molto efficiente. Per fotoni o elettroni si sfrutta lo sviluppo di sciami elettrofotonici. Un rivelatore capace di contenere tutto lo sviluppo di uno sciame e di misurare la ionizzazione dei secondari è chiamato *calorimetro*. La grandezza caratteristica dello sviluppo di uno sciame è la lunghezza di radiazione e lo spessore di materiale necessario per assorbire l'energia di uno sciame aumenta lentamente con il logaritmo dell'energia: quindi l'energia della particella primaria è assorbita in un numero limitato di lunghezze di radiazione. Materiali con densità e Z elevati hanno una piccola lunghezza di radiazione e possono assorbire gli sciami in dimensioni contenute. Un calorimetro può essere *omogeneo* o *a campionamento*. Il primo è realizzato con cristalli scintillanti oppure con vetri di elevata densità che emettono radiazione Čerenkov. Il secondo è realizzato alternando strati di assorbitore con strati di rivelatore costituiti di scintillatori, o rivelatori a gas, o camere a ionizzazione a liquido, o rivelatori a semiconduttore. Poiché il numero di secondari è proporzionale all'energia della particella primaria, $N = \sum n_{sec} = \kappa E$ e lo sviluppo dello sciame è un fenomeno statistico, la risoluzione in energia dovuta alle fluttuazioni del numero di secondari ($\delta N = \sqrt{N}$, migliora con l'energia

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{\delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{\kappa E}}$$

Misura di massa

Se è nota la carica elettrica di una particella, se ne può misurare la massa studiando il moto in campi elettrici e magnetici: è il metodo usato nel famoso esperimento di Thomson. Questo è il principio di funzionamento degli *spettrometri di massa* con cui si misurano le masse dei nuclei atomici. Per particelle relativistiche occorrono campi elettrici troppo elevati e la massa si può determinare misurando due variabili cinematiche tra velocità, impulso e energia. Nelle reazioni nucleari in cui si produce una particella, la sua massa è determinata dal bilancio energetico della reazione, cioè dalla conservazione dell'energia e dell'impulso. La massa di una particella instabile si determina misurando l'impulso dei sui prodotti di decadimento. Se, ad esempio, una particella di massa M decade in due particelle di massa m_1 e m_2 note, e si misurano gli impulsi $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$, la massa è pari all'energia totale delle due particelle, detta anche *massa invariante*

$$P^2 = M^2 = (P_1 + P_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2\cos\theta \qquad (c = 1)$$

Supponiamo, per semplificare i calcoli, che nel riferimento in cui si effettua la misura $p \gg m$ ($E \approx p$)

$$M^2 - m_1^2 - m_2^2 \approx 2p_1p_2\ (1 - \cos\theta) = 4p_1p_2\ \sin^2\theta/2$$

$$2MdM = 4p_1p_2\ \sin^2\theta/2\left(\frac{dp_1}{p_1}+\frac{dp_2}{p_2}+\frac{d\theta}{\tan\theta/2}\right)$$

Se $\delta p_1 \approx \delta p_2$ e $\delta\theta_1 \approx \delta\theta_2$ sono gli errori di misura degli impulsi e degli angoli delle due particelle e non sono correlati, la risoluzione della misura di massa è

$$\frac{\delta M}{M} = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{M^2}\left[\left(\frac{\delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\delta\theta}{2\tan\theta/2}\right)^2\right]^{1/2}$$

Misura di vita media

Molti nuclei e molte particelle sono instabili e decadono con *vita media* τ definita dalla legge di decadimento $N(t) = N_o e^{-t/\tau}$. Come vedremo più avanti, le misure di vita media si estendono in un intervallo di 40 ordini di grandezza e vi sono diversi metodi di misura.

Se τ è molto grande rispetto alla durata della misura Δt ($\Delta t/\tau \ll 1$), la vita media si determina contando il numero di decadimenti N_d nell'intervallo di tempo Δt se si conosce la popolazione del campione

$$N_d = N(t) - N(t+\Delta t) \approx N(t)\ \frac{\Delta t}{\tau} \qquad\qquad \tau = \frac{N}{N_d}\ \Delta t$$

Questo è il metodo di misura per deterninare la vita media della maggior parte dei nuclei radioattivi. La risoluzione è determinata dall'errore statistico, $\sqrt{N_d}$ e, soprattutto, dalla stima della popolazione del campione.

Se τ è confrontabile con la durata della misura ed è possibile conoscere l'istante in cui la particella è prodotta, la vita media si determina misurando la distribuzione dei tempi di decadimento

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N_o}{\tau}\ e^{-t/\tau}$$

Questa misura è possibile se la risoluzione temporale δt è molto minore di τ. Date le caratteristiche dei rivelatori che abbiamo esaminato, la risoluzione ottenibile in una misura di tempo non è migliore di circa $10^{-9}\ s$, questo fissa il limite di sensibilità di questo metodo di misura. Va tenuto conto però che la vita media τ di una particella che ha velocità $\beta \approx 1$ nel laboratorio è misurata come $\gamma\tau$ da un orologio fisso nel laboratorio e questo effetto tende a ridurre il limite dovuto alla risoluzione δt.

La vita media di una particella in moto nel laboratorio si può determinare misurando la distanza tra il punto di produzione e il punto di decadimento se si conosce la velocità. Se la particella ha velocità βc la vita media nel laboratorio è $\gamma\tau$ e la funzione di distribuzione della distanza percorsa nel laboratorio è

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dt}\ \frac{dt}{dx} = \frac{N_o}{\gamma\tau}\ e^{-x/\beta c\gamma\tau}\ \frac{1}{\beta c} = \frac{N_o}{\lambda}\ e^{-x/\lambda}$$

dove $\lambda = \beta\gamma c\tau = (p/m)c\tau$ è il valor medio del percorso della particella prima di decadere. Con un rivelatore che ha una risoluzione spaziale $\delta x \approx 30\ \mu m$ si possono misurare vite medie $\tau \approx 10^{-13}/\beta\gamma\ s$.

Per particelle instabili con vita media molto più piccola, questa si può determinare con misure della *larghezza di decadimento* $\Gamma = \hbar/\tau$ che è legata all'intensità della interazione reponsabile del decadimento. Il valore di Γ si può determinare da misure della massa invariante dei prodotti di decadimento della particella oppure da misure di sezione d'urto in cui è prodotta la particella.

1.6 Leggi di conservazione e simmetrie

Un sistema di particelle è definito dai suoi possibili stati $|\psi_n\rangle$ e l'evoluzione temporale è definita dall'operatore hamiltoniano H secondo l'equazione di Schrödinger. Spesso la forma della hamiltoniana non è nota a priori, ma si possono ricavare informazioni studiando l'evoluzione del sistema e, in particolare, individuando le grandezze fisiche che sono conservate. Se una grandezza fisica è conservata, esiste una proprietà di simmetria della hamiltoniana. Viceversa, ad una proprietà di simmetria della hamiltoniana corrisponde una legge di invarianza nell'evoluzione del sistema. Questo è il *teorema di Noether*. Ad esempio, l'osservazione sperimentale della conservazione dell'impulso in un sistema isolato di particelle definisce la forma della hamiltoniana classica della particella libera che è invariante per trasformazioni di Galileo (o di Lorentz). Viceversa l'ipotesi del principio di relatività, la simmetria rispetto a tutti i sistemi di riferimento inerziali, implica la conservazione dell'impulso (o del 4-impulso) in un sistema isolato.

Un insieme di particelle non interagenti è descritto dagli stati stazionari della hamiltoniana di particella libera, $H_o = \Sigma_i\ H_{oi}$. Se questo sistema interagisce per un intervallo di tempo limitato con un altro sistema descritto dalla hamiltoniana $H'_o = \Sigma_j\ H'_{oj}$, l'interazione è descritta dagli elementi di matrice della hamiltoniana di interazione, H_I, tra lo stato iniziale e finale che assumiamo siano sovrapposizioni di autostati della hamiltoniana $H_o + H'_o$. Se nel processo di interazione osserviamo la conservazione di alcune grandezze fisiche, possiamo definire alcune proprietà di simmetria dell'operatore H_I. Viceversa, se ipotizziamo alcune proprietà di simmetria dell'operatore H_I, possiamo prevedere la conservazione di alcune grandezze fisiche.

Gli stati di un sistema di particelle sono definiti da *numeri quantici* che corrispondono agli autovalori delle grandezze fisiche quantizzate. Alcune, come la carica elettrica, il momento angolare, l'energia, ..., hanno un analogo classico, altre non hanno un analogo classico e verranno definite sulla base delle leggi di conservazione osservate nelle interazioni di sistemi di particelle.

1.6.1 Statistica di un sistema di particelle

Le particelle caratterizzate dagli stessi numeri quantici sono indistinguibili. Un sistema di due *particelle identiche* esiste in due stati, $|1,2\rangle$ e $|2,1\rangle$. Per l'identità delle due particelle, le densità di probabilità dei due stati sono uguali. L'operatore di scambio, $P_\leftrightarrow$ agisce sugli stati

$$P_\leftrightarrow|1,2\rangle = \alpha|2,1\rangle \qquad\qquad P_\leftrightarrow|2,1\rangle = \alpha|1,2\rangle$$

con $|\alpha| = 1$ in entrambe i casi perché le particelle sono identiche, e inoltre

$$(P_{\leftrightarrow})^2|1,2\rangle = |1,2\rangle$$

Quindi $P_{\leftrightarrow}$ ha autovalori ± 1 e commuta con la hamiltoniana del sistema di due particelle identiche. Quindi lo stato di due particelle identiche è *simmetrico* oppure *antisimmetrico* rispetto allo scambio $1 \leftrightarrow 2$

$$|2,1\rangle = \pm\, |1,2\rangle$$

- le particelle che sono in stati simmetrici rispetto allo scambio $1 \leftrightarrow 2$ seguono la statistica di Bose-Einstein e sono chiamati *bosoni*;
- le particelle che sono in stati antisimmetrici rispetto allo scambio $1 \leftrightarrow 2$ seguono la statistica di Fermi-Dirac e sono chiamati *fermioni*;

Un importante *teorema di Pauli* (1940) stabilisce la relazione tra la statistica dei sistemi di particelle identiche e lo spin delle particelle

- i bosoni hanno spin intero: $0,\ 1\hbar,\ 2\hbar, \ldots$;
- i fermioni hanno spin semi-intero: $\hbar/2,\ 3\hbar/2, \ldots$;

Quindi, se due particelle identiche sono nello stesso stato (hanno gli stessi numeri quantici) sono necessariamente bosoni. Invece, due fermioni identici non possono esistere nello stesso stato (non possono avere gli stessi numeri quantici). Questo è il *principio di esclusione* di Wolfgang Pauli [34]. Ne risulta che i fermioni sono identificabili dallo stato e che quindi si può definire il numero di fermioni di un sistema. L'equazione di Dirac, che descrive il moto di fermioni di spin 1/2 (appendice 4.18), prevede che per ogni fermione di massa m, carica elettrica q, momento magnetico μ, ..., esista un *anti-fermione* con massa uguale, carica elettrica $-q$, momento magnetico $-\mu$, ... Poiché il numero di fermioni è osservabile, possiamo definire un *numero quantico fermionico* che si conserva in ogni interazione. Il numero fermionico è definito per convenzione positivo per i fermioni (elettrone, protone, neutrone, ...) e negativo per gli antifermioni (antielettrone, antiprotone, antineutrone, ...). Il numero fermionico di un sistema di fermioni (e anti-fermioni) è la somma algebrica dei numeri fermionici.

1.6.2 Grandezze fisiche conservate

Consideriamo la grandezza osservabile, F, rappresentata dall'operatore hermitiano F. Il risultato di una misura dell'osservabile quando il sistema è nello stato $|\psi\rangle$ corrisponde al valore aspettato $\langle F\rangle = \langle\psi|F|\psi\rangle$. Se il sistema è descritto dalla hamiltoniana H, la variazione nel tempo di $\langle\psi|F|\psi\rangle$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|F|\psi\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|HF|\psi\rangle + \langle\psi|\frac{\partial F}{\partial t}|\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|FH|\psi\rangle = \langle\psi|\ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\ [F,H]\ |\psi\rangle$$

[34] premio Nobel per la fisica nel 1945

è nulla se l'operatore F non dipende dal tempo, come assumeremo nel seguito, e se commuta con la hamiltoniana, $[F, H] = 0$. Quindi se F è invariante, gli operatori F e H hanno un sistema di autostati comuni

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \qquad\qquad F|\psi_n\rangle = f_n|\psi_n\rangle$$

Se la hamiltoniana non è nota, ma si è verificato sperimentalmente che alcune grandezze F_k sono conservate nell'interazione, si può ipotizzare una forma della hamiltoniana come combinazione degli operatori F_k. Se però non si hanno sufficienti informazioni sperimentali, si possono cercare delle grandezze invarianti facendo ipotesi sulle proprietà di simmetria della hamiltoniana di interazione.

1.6.3 Trasformazioni unitarie

Per studiare le proprietà di simmetria di un sistema che ha autostati della hamiltoniana $|\psi_n\rangle$, consideriamo un operatore U indipendente dal tempo che trasformi un autostato in un altro autostato

$$U|\psi\rangle \ = |\psi'\rangle$$

La trasformazione U deve conservare la densità di probabilità

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\ U^+U\ |\psi\rangle$$

Quindi l'operatore U è unitario, $U^+U = I,\ \ U^{-1} = U^+$, e definisce una *trasformazione unitaria*. Poiché gli stati $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ sono autostati della hamiltoniana H, la trasformazione unitaria U commuta con la hamiltoniana

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = H|\psi'\rangle = HU|\psi\rangle \qquad\qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U|\psi\rangle = UH|\psi\rangle$$

In generale la trasformazione non rappresenta una grandezza fisica osservabile, quindi l'operatore U non è necessariamente hermitiano.

- Se l'operatore U *è hermitiano*, rappresenta un'osservabile che si conserva nell'interazione. Poiché una trasformazione unitaria hermitiana applicata due volte a uno stato ($U^2 = U^+U = I$) riproduce lo stato iniziale, l'osservabile U ha autovalori ± 1

  $$U|\psi\rangle = u|\psi\rangle \qquad\qquad U^2|\psi\rangle = u^2|\psi\rangle = |\psi\rangle \qquad\qquad u = \pm 1$$

  e rappresenta una *trasformazione discreta*. L'operatore di scambio $P_\leftrightarrow$ è un esempio di trasformazione discreta.

- Se l'operatore U *non è hermitiano*, possiamo esprimere la trasformazione in termini di operatori hermitiani nella forma

  $$U = e^{i\alpha G}$$

dove α è una generica costante o una funzione *reale*. Infatti la condizione di unitarietà comporta

$$U^+U = e^{-i\alpha^* G^+} e^{i\alpha G} = e^{i\alpha(G-G^+)} = I \qquad \forall\ \alpha \qquad \Rightarrow \qquad G^+ = G$$

L'operatore G, detto *generatore della trasformazione*, rappresenta un'osservabile che si conserva nell'interazione. Poiché il valore del parametro α non è fissato a priori, una trasformazione unitaria non hermitiana rappresenta una *trasformazione continua*.

Trattiamo nel seguito alcune trasformazioni unitarie legate a leggi di invarianza della hamiltoniana. Altre saranno trattate più avanti quando avremo approfondito la conoscenza sulle proprietà dei nuclei e delle particelle.

Trasformazioni continue

Una trasformazione continua si può considerare come limite per $n \to \infty$ di una successione di trasformazioni infinitesime

$$\delta U = 1 + i\ \delta\alpha\ G \qquad\qquad \delta\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{n}$$

$$U = (1 + i\ \delta\alpha_1\ G) \cdot (1 + i\ \delta\alpha_2\ G) \ldots = \lim_{n\to\infty} \left(1 + i\ \frac{\alpha}{n}\ G\right)^n = e^{i\alpha G}$$

Per individuare i generatori di una trasformazione finita è conveniente in alcuni casi considerare una trasformazione infinitesima.

Traslazione

Una *traslazione infinitesima* in una coordinata spaziale trasforma lo stato $|\psi\rangle$ nel punto x nello stato nel punto $x + \delta x$

$$U|\psi(x)\rangle = |\psi(x + \delta x)\rangle = |\psi(x)\rangle + \delta x\ \frac{\partial}{\partial x}|\psi(x)\rangle = \left(1 + \delta x\ \frac{\partial}{\partial x}\right)|\psi(x)\rangle$$

Il generatore della traslazione è l'*operatore impulso*, $p_x = -i\hbar\partial/\partial x$. Una traslazione finita nello spazio è definita dall'operatore

$$U(\Delta\vec{r}) = e^{(i/\hbar)\Delta\vec{r}\cdot\vec{p}}$$

Quindi le componenti dell'impulso, p_k, generano la simmetria per traslazione degli stati, ovvero la simmetria della hamiltoniana rispetto a traslazioni delle coordinate spaziali corrisponde alla conservazione dell'impulso.

Rotazione

Una *rotazione infinitesima* in un piano trasforma lo stato $|\psi(\phi)\rangle$, nello stato $|\psi(\phi+\delta\phi)\rangle$. Per una rotazione infinitesima attorno all'asse z le coordinate nel piano $x-y$ si trasformano

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi \\ \delta\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \delta\phi\ y \\ \delta\phi\ x + y \end{pmatrix}$$

$$U|\psi(\phi)\rangle = |\psi(\phi+\delta\phi)\rangle = |\psi(\phi)\rangle + \delta\phi \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) |\psi(\phi)\rangle = \left(1 + \frac{i\delta\phi}{\hbar} L_z \right) |\psi(\phi)\rangle$$

Il generatore della rotazione attorno all'asse z è l'*operatore momento angolare*, $L_z = -i\hbar(x\partial/\partial y - y\partial/\partial x)$. Una rotazione finita attorno all'asse $\hat{n}$ è definita dall'operatore

$$U(\Delta\alpha) = e^{(i/\hbar)\Delta\alpha\hat{n}\cdot\vec{L}}$$

Le componenti del momento angolare, L_k, generano la simmetria per rotazione degli stati, ovvero la simmetria della hamiltoniana rispetto a rotazioni attorno ad un asse $\hat{n}$ corrisponde alla conservazione del modulo $\vec{L}^2$ e della componente L_n del momento angolare.

Rotazioni nello spazio vettoriale a due dimensioni

Per un sistema che può esistere solo in due stati, questi sono combinazioni lineari degli autostati delle *matrici di Pauli*

$$|\psi\rangle = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Le matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_k^2 = I$$

sono gli operatori che descrivono gli stati dei fermioni di spin $s = \hbar/2$ e costituiscono una base completa nello spazio vettoriale a due dimensioni: sono i generatori della *simmetria unitaria in due dimensioni SU(2)* (appendice 4.12). Una rotazione finita attorno all'asse k è definita dall'operatore

$$U(\Delta\alpha) = e^{i\Delta\alpha\ s_k} = e^{(i/\hbar)\Delta\alpha\ \sigma_k/2}$$

Le matrici di Pauli, σ_k, generano la simmetria SU(2) per rotazioni nello spazio a due dimensioni, ovvero la simmetria della hamiltoniana rispetto a trasformazioni di SU(2) corrisponde alla conservazione del modulo $|\vec{s}|$ e della componente s_z dello *spin* (di un sistema che può esistere in due stati).

Trasformazioni di gauge

L'evoluzione temporale dello stato di una particella libera è definita dalla soluzione dell'equazione del moto

$$\psi(\vec{r},t) = e^{(i/\hbar)(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$$

Se la particella ha carica elettrica q, la hamiltoniana di interazione con il campo elettromagnetico (appendice 4.13) modifica l'evoluzione dello stato per un fattore di fase

$$\psi_I(\vec{r},t) = e^{(i/\hbar)[(\vec{p}-q\vec{A})\cdot\vec{r}-(E-qV)t]} = e^{(i/\hbar)(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\ e^{(-iq/\hbar)(\vec{A}\cdot\vec{r}-Vt)}$$

Le componenti del potenziale elettromagnetico sono definite a meno di una *trasformazione di gauge* (appendice 4.7)

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha \qquad\qquad V' = V - \frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

dove $\alpha(\vec{r},t)$ è una qualunque funzione scalare reale. Quindi la fase dello stato potrebbe essere modificata localmente per un fattore arbitrario e questo non permetterebbe di osservare alcun fenomeno di coerenza.

La carica elettrica q è un'osservabile. Consideriamo la trasformazione unitaria generata dall'*operatore carica elettrica*

$$U(\vec{r},t) = e^{(i/\hbar)\alpha(\vec{r},t)q}$$

Applicando questa trasformazione, lo stato iniziale viene modificato

$$U\psi_I(\vec{r},t) = e^{(i/\hbar)\alpha q}\ \psi_I(\vec{r},t) = e^{(-iq/\hbar)(\vec{A}\cdot\vec{r}-Vt-\alpha)}\ \psi(\vec{r},t)$$

per un fattore di fase che elimina la dipendenza dalla funzione arbitraria $\alpha(\vec{r},t)$. Infatti la variazione della fase

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{r}-Vt-\alpha) = \vec{A} - \vec{\nabla}\alpha \qquad\qquad -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}\cdot\vec{r}-Vt-\alpha) = V + \frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

è solo legata alla scelta del potenziale. Quindi la trasformazione di gauge del potenziale elettromagnetico assicura la simmetria degli stati di interazione per una trasformazione di fase che corrisponde alla conservazione della carica elettrica, e viceversa: un numero quantico q conservato assicura la simmetria della hamiltoniana per una trasformazione di gauge unitaria $U = e^{i\alpha(\vec{r},t)q}$.

Se α è *costante*, la trasformazione si dice *globale* in quanto è la stessa in tutti i punti dello spazio-tempo. Se invece, come nell'esempio dell'interazione col campo elettromagnetico, α è una funzione del punto nello spazio-tempo, la trasformazione si dice *locale*. Il principio di relatività richiede che la trasformazione di gauge sia locale poiché non è possibile trasmettere informazione tra due punti dello spazio-tempo a velocità infinita.

1.6.4 Leggi di conservazione additive

Le trasformazioni unitarie continue hanno la forma $U = e^{i\alpha G}$ dove G è un operatore hermitiano che rappresenta un'osservabile. Se il sistema è composto da più particelle, la trasformazione applicata allo stato $|1, 2, \ldots, n\rangle$ ha autovalori $G_1, G_2, \ldots, G_n$

$$U|1, 2, \ldots, n\rangle = e^{i\alpha G}|1, 2, \ldots, n\rangle = e^{i\alpha(G_1+G_2+\ldots+G_n)}|1, 2, \ldots, n\rangle$$

Quindi per una trasformazione unitaria continua generata dall'operatore G che commuta con la hamiltoniana, la somma degli autovalori si conserva

$$G_1 + G_2 + \ldots + G_n = costante$$

e la legge di conservazione è *additiva*, tenendo conto che per *somma* va intesa l'operazione di addizione caratteristica dell'operatore G. Per un operatore scalare, come la carica elettrica, è la somma algebrica, per un operatore vettoriale, come l'impulso, è la somma vettoriale, per l'operatore momento angolare è la legge di composizione dei momenti angolari, etc.

Esempio

Esaminiamo come esempio il processo di *bremsstrahlung*

$$e^- \mathcal{N} \to e^- \mathcal{N} \gamma$$

Lo stato iniziale è costituito da un elettrone e un nucleo, lo stato finale dall'elettrone, dal nucleo e da un fotone. Non concosciamo ancora la struttura dei nuclei, quindi supponiamo sia il nucleo dell'atomo di idrogeno, il protone, che è un fermione di spin 1/2;

- conservazione del 4-impulso $\quad P_e + P_p = P'_e + P'_p + P'_\gamma$
- conservazione del momento angolare $\quad \vec{s}_e + \vec{s}_p + \vec{L}_{ep} = \vec{s}'_e + \vec{s}'_p + \vec{L}'_\gamma + \vec{L}'_{ep}$ dove $\vec{s}_i$ sono gli spin e $\vec{L}$ sono i momenti angolari orbitali;
- la carica elettrica nello stato iniziale è $q_e + q_p = 0$ e si conserva nello stato finale (il fotone ha carica nulla);
- il numero fermionico nello stato iniziale è $f_e + f_p = +1 + 1 = 2$ e si conserva nello stato finale (il fotone è un bosone).

Per il processo di *produzione di coppie elettrone-positrone*

$$\gamma \mathcal{N} \to e^- e^+ \mathcal{N}$$

lo stato iniziale è costituito da un fotone e un protone, lo stato finale dal protone, un elettrone e un positrone che sono l'uno l'antiparticella dell'altro;

- si conserva il 4-impulso e il momento angolare;
- la carica elettrica nello stato iniziale è $q_p = +1$ e si conserva nello stato finale (elettrone e positrone hanno carica opposta);
- il numero fermionico nello stato iniziale è $f_p = +1$ e si conserva nello stato finale (elettrone e positrone hanno numero fermionico opposto).

1.6.5 Leggi di conservazione moltiplicative

Trasformazioni discrete

Le trasformazioni unitarie hermitiane possono rappresentare osservabili che commutano con la hamiltoniana. Le osservabili hanno autovalori ± 1 e per questo le trasformazioni sono dette discrete. Se il sistema è composto da più particelle, la trasformazione applicata allo stato $|1, 2, \ldots, n\rangle$ ha autovalori $U_1, U_2, \ldots, U_n$

$$U|1, 2, \ldots, n\rangle = (U_1 \cdot U_2 \ldots U_n)|1, 2, \ldots, n\rangle$$

Quindi per una trasformazione unitaria continua generata dall'operatore U che commuta con la hamiltoniana, il prodotto degli autovalori si conserva

$$U_1 \; U_2 \ldots U_n = costante$$

e la legge di conservazione è *moltiplicativa*.

1.6.6 Parità

La trasformazione di *parità* inverte le coordinate spaziali di uno stato

$$P\psi(\vec{r}, t) = \psi(-\vec{r}, t)$$

Un autostato dell'operatore P ha autovalori

$$P\psi(\vec{r}, t) = \pm\psi(\vec{r}, t)$$

e possiamo definire il numero quantico parità di uno stato, positiva o negativa, e la *parità intrinseca di una particella*. La trasformazione $\vec{r} \to -\vec{r}$ equivale alle trasformazioni $\theta \to \pi - \theta$, $\phi \to \pi + \phi$ (va notato che questa trasformazione non si può ottenere con successive rotazioni attorno ai tre assi di un sistema di riferimento). La trasformazione di parità corrisponde ad una *riflessione* seguita da una rotazione di π attorno all'asse normale al piano di riflessione.

Se uno stato è espresso in funzione di autostati del momento angolare, le proprietà delle armoniche sferiche, $Y_{lm}(\theta, \phi)$, sotto trasformazione di parità danno indicazioni sulla parità dello stato

$$P \; Y_{lm}(\theta, \phi) = Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l \; Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Se uno stato è autostato del momento angolare con autovalore $\hbar l$, la parità è $(-1)^l$.

Per capire quali sono le caratteristiche che la hamiltoniana deve avere perché sia simmetrica rispetto alla trasformazione di parità è utile esaminare l'azione dell'operatore parità su alcune osservabili;

- un *vettore polare* (raggio vettore, velocità, impulso, campo elettrico, dipolo elettrico, ...) si inverte

$$P\ \vec{r} = -\ \vec{r} \qquad\qquad P\ \frac{d\vec{r}}{dt} = -\ \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- un *vettore assiale* (momento angolare, spin, campo magnetico, dipolo magnetico, ...) rimane invariato

$$P\ \vec{r} \wedge \vec{p} = +\ \vec{r} \wedge \vec{p} \qquad\qquad P\ \vec{s} = +\ \vec{s}$$

- uno *scalare* (energia, prodotto scalare di vettori polari, prodotto scalare di vettori assiali, ...) rimane invariato

$$P\ r = P\ (\vec{r} \cdot \vec{r})^{1/2} = +\ r \qquad\qquad P\ \vec{d} \cdot \vec{E} = +\ \vec{d} \cdot \vec{E}$$

- uno *pseudoscalare* (prodotto scalare di un vettore polare e un vettore assiale, elicità, ...) si inverte

$$P\ \vec{r} \cdot \vec{\mu} = -\ \vec{r} \cdot \vec{\mu} \qquad\qquad P\ \vec{s} \cdot \vec{p} = -\ \vec{s} \cdot \vec{p}$$

La parità commuta con la hamiltoniana di particella libera $H = [m^2 + p^2]^{1/2}$, e si conserva in un sistema di particelle non interagenti. Commuta anche con la hamiltoniana di interazione elettromagnetica, $H = [m^2 + (p - qA)^2]^{1/2} + qV$, e si conserva nelle interazioni elettromagnetiche. Vedremo più avanti un esempio di interazione, l'interazione debole, in cui la parità *non* si conserva. La parità di un sistema di particelle è definita dalla parità intrinseca di ogni particella e dallo stato di momento angolare. Se la parità si conserva in una interazione, possiamo definire la parità delle particelle prodotte nello stato finale conoscendo la parità dello stato iniziale.

Definiamo la parità intrinseca delle particelle che conosciamo: elettrone, protone, neutrone e fotone. Poiché il numero fermionico si conserva, la parità dei fermioni non è in effetti un'osservabile ed è definita in modo convenzionale

$$P(e^-) = P(p) = P(n) = +1$$

Secondo l'equazione di Dirac la parità dei corrispondenti antifermioni è definita negativa (appendice 4.18)

$$P(e^+) = P(\bar{p}) = P(\bar{n}) = -1$$

Il fotone è emesso e assorbito dall'operatore campo elettromagnetico (appendice 4.13) che è caratterizzato dal vettore di polarizzazione e dagli operatori scalari di creazione e distruzione dell'oscillatore armonico. Quindi il fotone è autostato di un operatore vettoriale e ha *parità intrinseca negativa*

$$P|\gamma\rangle = -\ |\gamma\rangle$$

1.6.7 Coniugazione di carica

La trasformazione coniugazione di carica cambia lo stato di una particella nella corrispondente antiparticella invertendo il segno della carica elettrica, del momento magnetico e del numero fermionico. Se, ad esempio, $|e\rangle$ è lo stato di un elettrone rappresentato da massa, impulso, spin, carica elettrica, momento magnetico, numero fermionico, ...

$$|e\rangle = |m,\ \vec{p},\ \vec{s},\ -e,\ -2(e\hbar/2m)\vec{s},\ +f, \ldots\rangle$$

lo stato coniugato di carica, il positrone, è definito dai numeri quantici

$$C|e\rangle = |\bar{e}\rangle = |m,\ \vec{p},\ \vec{s},\ +e,\ +2(e\hbar/2m)\vec{s},\ -f, \ldots\rangle$$

Se consideriamo una particella di carica q e l'azione degli operatori carica elettrica e coniugazione di carica

$$Q\ |q\rangle = q\ |q\rangle \qquad\qquad C\ |q\rangle = |-q\rangle$$

risulta che questi *non commutano*, infatti

$$C\ Q\ |q\rangle = q\ C\ |q\rangle = q\ |-q\rangle \qquad\qquad Q\ C\ |q\rangle = C\ |-q\rangle = -q\ |-q\rangle$$

e lo stesso avviene per il momento magnetico e il numero fermionico. Quindi solo gli stati con carica, momento magnetico, numero fermionico (e altri numeri quantici che studieremo più avanti) nulli possono essere autostati della coniugazione di carica. Sono autostati il fotone e lo stato elettrone-positrone; non è autostato il neutrone perché ha momento magnetico e numero fermionico non nulli.

Il campo elettromagnetico è generato da cariche e da correnti elettriche e si inverte per azione della coniugazione di carica. L'energia elettromagnetica dipende dai quadrati q^2 e $\vec{A}^2$ e dal prodotto $q\vec{A}$ ed è invariante per inversione della carica. Ne concludiamo che la hamiltoniana dell'interazione elettromagnetica è invariante per coniugazione di carica, ovvero C è una simmetria della hamiltoniana di interazione, e che l'operatore campo elettromagnetico, $\vec{A}$, si inverte per coniugazione di carica. Quindi il fotone ha autovalore della coniugazione di carica negativo

$$C\ |\gamma\rangle = -\ |\gamma\rangle$$

1.6.8 Inversione temporale

La trasformazione di inversione temporale inverte la direzione del tempo, $t \to -t$, nell'evoluzione di uno stato, cioè *inverte la direzione del moto*. Sotto trasformazione di inversione temporale

- l'impulso, il momento angolare, lo spin, la densità di corrente, il momento magnetico, il campo magnetico, ... *si invertono*, mentre
- le coordinate spaziali, la carica elettrica, il campo elettrico, l'energia, ... *sono invariati*.

Le equazioni del moto classiche, in assenza di forze non conservative, sono invarianti per inversione temporale. Infatti le equazioni della meccanica e dell'elettromagnetismo dipendono dalla derivata seconda rispetto al tempo. L'equazione di Schrödinger dipende dalla derivata prima rispetto al tempo e la trasformazione $|\psi(\vec{r},t)\rangle \rightarrow |\psi(\vec{r},-t)\rangle$ *non conserva* la forma dell'equazione del moto

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\vec{r},t)\rangle = H|\psi(\vec{r},t)\rangle \qquad \Rightarrow \qquad -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\vec{r},-t)\rangle = H|\psi(\vec{r},-t)\rangle$$

che si conserva invece per la trasformazione $T =$ *inversione del tempo* $\times$ *coniugazione complessa*

$$|\psi'(\vec{r},t)\rangle = T|\psi(\vec{r},t)\rangle = |\psi(\vec{r},-t)\rangle^* \qquad\qquad T\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Questa relazione *non* è un'equazione agli autovalori e quindi la trasformazione T *non rappresenta un'osservabile*, ma ha importanti proprietà nell'evoluzione degli stati di un sistema.

Consideriamo alcune proprietà degli stati di un sistema per inversione temporale

- un autostato della hamiltoniana di particella libera rimane invariato

$$T\ e^{(i/\hbar)(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} = e^{(i/\hbar)(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$$

- il prodotto scalare di due stati si trasforma

$$\langle f'|i'\rangle = \langle f|\ T^+T\ |i\rangle = \langle f|i\rangle^* = \langle i|f\rangle$$

  questa relazione definisce una *trasformazione anti-unitaria*;

- se la hamiltoniana di interazione H_I è invariante per inversione temporale, l'elemento di matrice della transizione $|i'\rangle \rightarrow |f'\rangle$ è uguale a quello della transizione inversa $|f\rangle \rightarrow |i\rangle$

$$\langle f'|H_I|i'\rangle = \langle f|T^+H_IT|i\rangle = \langle f|H_I|i\rangle^* = \langle i|H_I|f\rangle$$

Esempio

Se consideriamo come esempio i processi di *bremsstrahlung* e di *produzione di coppie elettrone-positrone*, troviamo alcune importanti relazioni

- la simmetria della interazione elettromagnetica per coniugazione di carica assicura l'uguaglianza degli elementi di matrice dei processi

$$e^-\ p \rightarrow e^-\ p\ \gamma \qquad\qquad e^+\ \bar{p} \rightarrow e^+\ \bar{p}\ \gamma$$

- la simmetria della interazione elettromagnetica per parità definisce una relazione tra i momenti angolari degli stati iniziale e finale; per $e^- p \to e^- p\gamma$

  $$P(e)\ P(p)\ (-1)^L = P(e)\ P(p)\ P(\gamma)\ (-1)^{L'}\ (-1)^{\ell} \qquad (-1)^L = (-1)^{L'+\ell+1}$$

  dove L è l'autovalore del momento angolare relativo di elettrone e protone e ℓ è il momento angolare del fotone; e analogamente per il processo $\gamma p \to e^+ e^- p$

  $$P(\gamma)\ P(p)\ (-1)^L = P(e^+)\ P(e^-)\ P(p)\ (-1)^{L'}\ (-1)^{\ell} \qquad (-1)^L = (-1)^{L'+\ell}$$

- la simmetria della interazione elettromagnetica per inversione temporale e per coniugazione di carica assicura che, a parità di energia nel centro di massa, l'elemento di matrice del processo $e^- p \to e^- p\gamma$ è uguale a quello del processo $p\gamma \to e^-\ e^+\ p$.

1.6.9 Momento di dipolo elettrico

La tabella riassume le proprietà di simmetria di alcune grandezze per le trasformazioni discrete di parità, coniugazione di carica e inversione temporale.

grandezza		C	P	T
coordinate spaziali	$\vec{r}$	$+\vec{r}$	$-\vec{r}$	$+\vec{r}$
impulso	$\vec{p}$	$+\vec{p}$	$-\vec{p}$	$-\vec{p}$
spin	$\vec{s}$	$+\vec{s}$	$+\vec{s}$	$-\vec{s}$
elicita'	$\vec{s}\cdot\vec{p}$	$+\vec{s}\cdot\vec{p}$	$-\vec{s}\cdot\vec{p}$	$+\vec{s}\cdot\vec{p}$
carica elettrica	q	$-q$	$+q$	$+q$
densita' di corrente	$\vec{j}$	$-\vec{j}$	$-\vec{j}$	$-\vec{j}$
campo elettrico	$\vec{E}$	$-\vec{E}$	$-\vec{E}$	$+\vec{E}$
campo magnetico	$\vec{B}$	$-\vec{B}$	$+\vec{B}$	$-\vec{B}$

L'invarianza dell'interazione elettromagnetica per trasformazione di parità o di inversione temporale ha come conseguenza che uno stato con parità definita abbia momento di dipolo elettrico statico nullo. Stati con momento di dipolo elettrico non nullo sono necessariamente sovrapposizioni di stati con parità diversa. Uno stato non degenere ha parità definita mentre il momento di dipolo elettrico si inverte per trasformazione di parità

$$P|\psi(\vec{r})\rangle = \pm|\psi(-\vec{r})\rangle \qquad P\ q\vec{r} = -q\vec{r}$$

quindi il valore aspettato del momento di dipolo è l'integrale di una funzione dispari

$$\langle\psi(\vec{r})|\ q\vec{r}\ |\psi(\vec{r})\rangle = \int \psi^*(\vec{r})\ q\vec{r}\ \psi(\vec{r})\ d\vec{r} = 0$$

L'argomento si può generalizzare considerando l'interazione con un campo elettromagnetico esterno. Se la particella ha spin nullo, ha una struttura simmetrica e

non può avere un momento di dipolo. Se ha spin, questo definisce la direzione di quantizzazione di un vettore e l'interazione col campo esterno è del tipo

$$H_I = -\rho_m \ \hat{s} \cdot \vec{B} - \rho_e \ \hat{s} \cdot \vec{E}$$

L'interazione magnetica è rappresentata dal prodotto scalare di due vettori assiali che si comportano allo stesso modo per tasformazioni di parità $(+\ +)$ e di inversione temporale $(-\ -)$ ed è invariante. L'interazione elettrica cambia segno per trasformazione di parità e di inversione temporale

$$P \ \hat{s} \cdot \vec{E} = \hat{s} \cdot (-\vec{E}) \qquad\qquad T \ \hat{s} \cdot \vec{E} = (-\hat{s}) \cdot \vec{E}$$

Quindi l'invarianza di H_I richiede che ρ_e sia nullo. Una verifica stringente di questa previsione si ottiene dai risultati sperimentali delle misure dei momenti di dipolo elettrico dei nuclei e delle particelle. Ad esempio, il neutrone ha carica elettrica nulla, ma ha un momento magnetico non nullo prodotto da una densità di magnetizzazione estesa su una dimensione di $\sim 10^{-13}\ cm$. Per avere momento di dipolo elettrico nullo, si deve annullare l'integrale lungo l'asse di quatizzazione della distribuzione delle cariche in moto che producono il momento magnetico. Il limite sperimentale sul valore del momento di dipolo elettrico del neutrone è $\langle e\vec{r} \rangle_n < e \times 10^{-25}\ cm$.

1.6.10 Il positronio

Il positronio è lo stato legato elettrone-positrone analogo allo stato dell'atomo di idrogeno. Il positronio si forma per cattura di positroni emessi nei decadimenti β^+ dei nuclei (capitolo ???) e la sezione d'urto è inversamente proporzionale alla velocità relativa v_{ee} per cui vi è elevata probabilità che avvenga nello stato fondamentale $1S$. I livelli di energia del positronio sono simili a quelli dell'atomo di idrogeno, ma la distanza tra i livelli è minore di un fattore 2 perché la massa ridotta del sistema legato è

$$m_{ee} = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2} \qquad\qquad m_{ep} = \frac{mM}{m+M} \approx m$$

L'energia dello stato fondamentale e il raggio dell'orbita di Bohr sono

$$E_{1S} = \frac{\alpha^2 mc^2}{4} = \frac{13.6}{2}\ eV \qquad\qquad r_{1S} = \frac{2a_o}{\alpha^2} = 2 \times 0.53\ 10^{-8}\ cm$$

Il positronio è uno stato con carica e numero fermionico nulli e può decadere in stati di due o più fotoni

$$e^+\ e^- \to \gamma\ \gamma \qquad\qquad e^+\ e^- \to \gamma\ \gamma\ \gamma$$

Il primo processo, che è il più probabile, è quello su cui si basa uno dei metodi più accurati di indagine tomografica, la *Positron-Emission-Tomography*: si somministra una sostanza radioattiva β^+ che ha la prorietà di fissarsi nelle zone del corpo da esaminare e si misura la densità dei punti sorgente di emissione di due fotoni collineari di energia $E_\gamma = mc^2$.

Per esaminare le proprietà di simmetria del positronio, consideriamo l'elettrone e il positrone come due particelle identiche in diversi stati di carica elettrica. Lo stato di due fermioni identici dipende dalle coordinate, dagli spin e dagli stati di carica

$$|e_1\ e_2\rangle = |\vec{r}_1\ \vec{r}_2\rangle\ |\vec{s}_1\ \vec{s}_2\rangle\ |q_1\ q_2\rangle$$

ed è antisimmetrico rispetto allo scambio $1 \leftrightarrow 2$.

- Lo scambio delle coordinate spaziali $\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2$ corrisponde alla trasformazione di parità
$$P(e^+e^-) = (-1)^L$$

- Lo stato di spin è il risultato della combinazione di due spin 1/2 e si ottengono quattro stati $|\vec{S}, S_z\rangle$, $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = 1$, con $S_z = +1, 0, -1$; oppure $\vec{S} = 0$, con $S_z = 0$
$$\begin{array}{lcl} |1,+1\rangle & = & |+1/2;+1/2\rangle \\ |1,\ \ 0\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+1/2;-1/2\rangle \ + \ \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-1/2;+1/2\rangle \\ |1,-1\rangle & = & |-1/2;-1/2\rangle \end{array}$$
$$|0,\ \ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+1/2;-1/2\rangle \ - \ \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-1/2;+1/2\rangle$$
Lo *stato di tripletto*, $S = 1$, è simmetrico rispetto allo scambio $\vec{s}_1 \leftrightarrow \vec{s}_2$, mentre lo *stato di singoletto*, $S = 0$, è antisimmetrico. La simmetria è $(-1)^{S+1}$.

- Lo scambio delle cariche corrisponde alla trasformazione coniugazione di carica e il positronio può esistere in due autostati uno simmetrico, con $C = +1$, e uno antisimmetrico, con $C = -1$, rispetto allo scambio $q_1 \leftrightarrow q_2$

La simmetria dello stato è

$$(-1)^L\ (-1)^{S+1}\ C = -1$$

Il positronio nello stato fondamentale ha $L = 0$ e l'autovalore C si conserva nel decadimento per interazione elettromagnetica

$$e^+e^- \to \gamma\gamma \qquad C = C_\gamma^2 = +1 \qquad \Rightarrow \qquad (-1)^{S+1} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad S = 0$$

$$e^+e^- \to \gamma\gamma\gamma \qquad C = C_\gamma^3 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad (-1)^{S+1} = +1 \qquad \Rightarrow \qquad S = 1$$

Quindi il positronio nello stato di singoletto ${}^1S_0$ decade $e^+e^- \to \gamma\gamma$, mentre nello stato di tripletto ${}^3S_1$ decade $e^+e^- \to \gamma\gamma\gamma$.

I due stati hanno energia leggermente diversa per effetto dell'interazione tra i momenti magnetici che rimuove la degenerazione dello stato $1S$. Poiché $\vec{\mu} \parallel \vec{s}$ la hamiltoniana di interazione si può esprimere nella forma $H_I = \kappa\ \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$. Gli autovalori relativi ai due stati sono

$$\vec{S}^2 = \vec{s}_1^{\,2} + \vec{s}_2^{\,2} + 2\ \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \qquad \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \frac{S(S+1) - s(s+1) - s(s+1)}{2} = \frac{S(S+1)}{2} - \frac{3}{4}$$

$$H_I(S=0) = -\frac{3\kappa}{4} \qquad H_I(S=1) = +\frac{\kappa}{4} \qquad \Delta E = \kappa$$

Il valore sperimentale è $E(^3S_1) - E(^1S_0) = 8.4\ 10^{-4}\ eV$. A temperatura ambiente, $kT \gg \Delta E$, i due stati sono popolati in rapporto $3:1$ definito dalle molteplicità $2S+1$.

1.6.11 Il teorema CPT

La hamiltoniana dell'interazione elettromagnetica (appendice 4.13) è derivata dalle equazioni dell'elettromagnetismo ed è invariante per le tre trasformazioni discrete C, P e T. Si è verificato sperimentalmente con buona accuratezza che anche la hamiltoniana dell'interazione nucleare è invariante per le trasformazioni C, P e T. La hamiltoniana dell'interazione debole, reponsabile del decadimento β dei nuclei, non è invariante né per la trasformazione C né per la trasformazione P.

Un importante *teorema* formulato indipendentemente da *Schwinger, Lüders e Pauli* (1952) stabilisce, sotto ipotesi molto generali, che la hamiltoniana di un sistema è invariante per l'azione di una trasformazione prodotto delle tre trasformazioni C, P e T in qualunque ordine di successione. Una conseguenza dell'invarianza della hamiltoniana sotto l'azione della trasformazione CPT è che i valori della massa, momento magnetico e vita media di una particella e della corrispondente antiparticella sono uguali. Questa uguaglianza è verificata con grande precisione dai risultati sperimentali.

1.7 Processi elettromagnetici

Nel capitolo ??? abbiamo esaminato alcuni processi elettromagnetici elementari sulla base delle conoscenze di meccanica e elettromagnetismo classici. Ora esaminiamo alcuni processi elementari che interessano nuclei e particelle sulla base della hamiltoniana di interazione elettromagnetica e del calcolo perturbativo della probabilità di transizione.

1.7.1 Emissione e assorbimento di fotoni

Consideriamo un sistema in un volume di normalizzazione V costituito di particelle di massa m_i e carica elettrica q_i descritto dalla hamiltoniana H_o. Gli autostati del sistema sono

$$\psi_n(\vec{r},t) = u_n(\vec{r})\ e^{-iE_nt/\hbar}$$

e, in assenza di cariche elettriche esterne e in approssimazione non relativistica, l'interazione con il campo elettromagnetico è rappresentata dalla hamiltoniana

$$H_i = -\sum_i \frac{q_i}{m_i}\ \vec{A}(\vec{r},t)\cdot\vec{p}_i$$

Il campo elettromagnetico è rappresentato in termini degli operatori di emissione e assorbimento di fotoni (appendice 4.13)

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_o\omega}\right)^{1/2} \sum_k \sum_s \hat{\epsilon}_s(\vec{k}) \left[a_s(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a_s^+(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

Per effetto dell'interazione, il sistema passa dallo stato inizale $|i\rangle$ con energia E_i allo stato finale $|f\rangle$ con energia E_f e il campo elettromagnetico dallo stato $|n_i\rangle$ allo stato $|n_f\rangle$ emettendo o assorbendo fotoni di impulso $\hbar\vec{k}$ e energia $\hbar\omega$. La probabilità di transizione per unità di tempo si calcola con la *regola d'oro di Fermi* (appendice 4.15)

$$d\dot{P}_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar} \; |\langle f|H_I|i\rangle|^2 \; dN_f$$

Per *una particella* l'elemento di matrice della hamiltoniana di interazione è

$$\langle f|H_I|i\rangle = -\frac{q}{m}\int_R \psi_f^*(\vec{r}) \; \vec{A}\cdot\vec{p}\;\psi_i(\vec{r}) \; d\vec{r}$$

dove R è la regione di spazio in cui $\psi(\vec{r}) \neq 0$. Il campo elettromagnetico si può sviluppare in serie di multipoli (appendice 4.8)

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1 + i\vec{k}\cdot\vec{r} - \frac{(\vec{k}\cdot\vec{r})^2}{2} + \ldots$$

I contributi dei vari termini dello sviluppo al calcolo dell'elemento di matrice hanno valori $\approx (kR)^n = (E_\gamma R/\hbar c)^n \ll 1$. Infatti per un sistema atomico $E_\gamma R \approx 1\ eV \times 10^{-8}\ cm$ e per un sistema nucleare $E_\gamma R \approx 1\ MeV \times 10^{-13}\ cm$: in entrambe i casi $E_\gamma R \ll \hbar c = 2\ 10^{-11}\ MeV\ cm$. Ci si può quindi limitare ai primi termini dello sviluppo in serie.

1.7.2 Transizione di dipolo elettrico

L'elemento di matrice al *primo ordine* nello sviluppo in multipoli è

$$-\frac{q}{m}\left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_o\omega}\right)^{1/2} \sum_k \sum_s \int u_f^* \; e^{iE_f t/\hbar} \; \langle n_f|\hat{\epsilon}_s\cdot\vec{p}\;[a_s e^{-i\omega t} + a_s^+ e^{i\omega t}]|n_i\rangle \; u_i \; e^{-iE_i t/\hbar} \; d\vec{r} =$$

$$= -\frac{q}{m}\left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_o\omega}\right)^{1/2} \sum_k \sum_s \int u_f^* \; \hat{\epsilon}_s\cdot\vec{p}\;[e^{i(E_f-E_i-\hbar\omega)t/\hbar} + e^{i(E_f-E_i+\hbar\omega)t/\hbar}] \; u_i \; d\vec{r}$$

Calcolando il valor medio nel tempo, il primo termine ha valore non nullo per $E_f = E_i + \hbar\omega$ e rappresenta l'*assorbimento* di un fotone di energia $\hbar\omega$, mentre il secondo termine ha valore non nullo per $E_f = E_i - \hbar\omega$ e rappresenta l'*emissione* di un fotone di energia $\hbar\omega$. La trattazione è equivalente e quindi possiamo esaminare uno solo dei due casi

$$\overline{\langle f|H_I|i\rangle} = -\frac{q}{m}\left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_o\omega}\right)^{1/2} \int \sum_s (u_f^* \; \vec{p}\; u_i)\cdot\hat{\epsilon}_s \; d\vec{r} \quad \delta(E_f - E_i + \hbar\omega)$$

Per calcolare l'integrale osserviamo che gli operatori $\vec{p}$ e $\vec{r}$ sono coniugati, $i\hbar\vec{p} = m\,[\vec{r}, H_o]$, e che $u_i(\vec{r})$, $u_f(\vec{r})$ sono autofunzioni della hamiltoniana H_o

$$\langle u_f|\ \vec{p}\ |u_i\rangle = \frac{m}{i\hbar}\ \langle u_f|\ \vec{r}H_o - H_o\vec{r}\ |u_i\rangle = \frac{im}{\hbar}\ (E_f - E_i)\ \langle u_f|\ \vec{r}\ |u_i\rangle$$

quindi l'elemento di matrice al primo ordine

$$\langle f|H_I|i\rangle = i\ \left(\frac{\hbar\omega}{2V\epsilon_o}\right)^{1/2} \sum_s\ \hat{\epsilon}_s \cdot \langle u_f|\ q\vec{r}\ |u_i\rangle$$

è proporzionale a $(\hbar\omega)^{1/2}$ e dipende dal prodotto scalare del versore polarizzazione e dell'*operatore dipolo elettrico*

$$\hat{\epsilon}_s \cdot q\vec{r} = qr\ \ \sin\theta\ \ \cos\phi$$

dove θ è l'angolo tra la direzione di emissione $\vec{k}$ e il dipolo $q\vec{r}$ e ϕ è l'angolo di polarizzazione nel piano normale a $\vec{k}$ (Fig.1.54). Il numero di stati finali del sistema

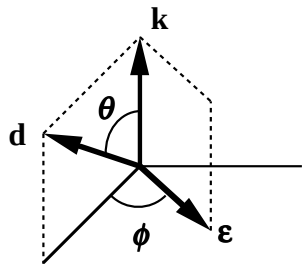


Figure 1.54: Emissione di radiazione di dipolo

costituito dalla particella di massa $m \gg \hbar\omega/c^2$ e il fotone emesso con impulso $\hbar\vec{k}$ è

$$dN = 2\ \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\ \hbar^3\ k^2\ dk\ d\cos\theta\ d\phi = \frac{2V}{(2\pi)^3\hbar}\ \frac{\omega^2}{c^3}\ dE\ d\cos\theta\ d\phi$$

(il fattore 2 tiene conto della somma $\sum_s$ sugli stati di polarizzazione finali). Quindi la probabilità per unità di tempo di emissione di un fotone di energia $\hbar\omega$, integrata sugli stati e angoli di polarizzazione ($\int \cos^2\phi\ d\phi = \pi$) è

$$d\dot{P}_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}\ \frac{\hbar\omega}{2V\epsilon_o}\ |\langle f|qr|i\rangle|^2\ \frac{2V}{(2\pi)^3\hbar}\ \frac{\omega^2}{c^3}\ \pi\ \sin^2\theta\ d\cos\theta = \frac{\omega^3}{\hbar c^3}\ \frac{|\langle f|qr|i\rangle|^2}{4\pi\epsilon_0}\ \sin^2\theta\ d\cos\theta$$

Integrando sull'angolo di emissione si ottiene la *vita media* dello stato $|i\rangle$ per *transizioni di dipolo elettrico*

$$\frac{1}{\tau} = \dot{P} = \frac{4}{3}\ \frac{\omega^3}{\hbar c^3}\ \frac{|\langle f|qr|i\rangle|^2}{4\pi\epsilon_0}$$

L'energia emessa per unità di tempo sotto forma di fotoni di energia $\hbar\omega$

$$W = \frac{\hbar\omega}{\tau} = \frac{4}{3}\,\frac{\omega^4}{c^3}\,\frac{|\langle f|qr|i\rangle|^2}{4\pi\epsilon_0}$$

ha la stessa espressione ottenuta per un dipolo elettrico oscillante a frequenza ω: il valore quadratico medio del dipolo classico, $\langle(q\vec{r})^2\rangle$, viene sostituito in meccanica quantistica dal quadrato dell'elemento di matrice della hamiltoniana di interazione tra gli stati inziale e finale.

1.7.3 Transizione al secondo ordine

L'elemento di matrice al *secondo ordine* nello sviluppo in multipoli è

$$-\frac{iq}{m}\left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_o\omega}\right)^{1/2}\sum_k\sum_s\int u_f^*\;\hat{\epsilon}_s\cdot\vec{p}\;[\vec{k}\cdot\vec{r}\;e^{i(E_f-E_i-\hbar\omega)t/\hbar} - \vec{k}\cdot\vec{r}\;e^{i(E_f-E_i+\hbar\omega)t/\hbar}]\;u_i\;d\vec{r}$$

Consideriamo solo il termine di emissione. L'integrale sulle funzioni d'onda

$$\sum_s\langle u_f|\;\vec{k}\cdot\vec{r}\;\;\hat{\epsilon}_s\cdot\vec{p}\;|u_i\rangle = \sum_s\langle u_f|\;\sum_{jl}\;k_j\;x_j\;p_l\;\epsilon_{sl}\;|u_i\rangle$$

si può scomporre in un termine antisimmetrico e un termine simmetrico

$$\frac{1}{2}\;\sum_s\langle u_f|\;\sum_{jl}\;k_j\;\epsilon_{sl}\;(\;[x_j\;p_l - x_l\;p_j] + [x_j\;p_l + x_l\;p_j]\;)\;|u_i\rangle$$

Transizione di dipolo magnetico

Il *primo termine* contiene l'operatore momento angolare, $\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p}$, e l'elemento di matrice si esprime

$$\frac{iq}{2m}\left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_o\omega}\right)^{1/2}\sum_s\;\langle u_f|(\vec{k}\wedge\hat{\epsilon}_s)\cdot\vec{L}|u_i\rangle = i\left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_o\omega}\right)^{1/2}\sum_s\;\vec{k}\wedge\hat{\epsilon}_s\cdot\;\langle u_f|\;\frac{q\vec{L}}{2m}\;|u_i\rangle$$

dove compare l'elemento di matrice dell'operatore *momento magnetico* $\vec{\mu} = q\vec{L}/2m$

$$\vec{k}\wedge\hat{\epsilon}_s\cdot\langle u_f|\;\vec{\mu}\;|u_i\rangle = k\;\langle u_f|\;\mu\;|u_i\rangle\;\sin\theta\;\sin\phi$$

con le stesse definizioni di sopra degli angoli. La densità degli stati finali è la stessa calcolata sopra, quindi la probabilità di emissione per unità di tempo, integrata sugli stati e sugli angoli di polarizzazione, è:

$$d\dot{P}_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}\;\frac{\hbar}{2V\epsilon_o\omega}\;\frac{\omega^2}{c^2}\;|\langle u_f|\;\mu\;|u_i\rangle|^2\sin^2\theta\;\frac{2V}{(2\pi)^3\hbar}\;\frac{\omega^2}{c^3}\;d\cos\theta =$$

$$= \frac{\omega^3}{\hbar c^5}\;\frac{|\langle u_f|\;\mu\;|u_i\rangle|^2}{4\pi\epsilon_o}\;\sin^2\theta\;d\cos\theta$$

La vita media per *transizioni di dipolo magnetico* e la potenza emessa sono

$$\frac{1}{\tau} = \frac{4}{3}\;\frac{\omega^3}{\hbar c^5}\;\frac{|\langle u_f|\;\mu\;|u_i\rangle|^2}{4\pi\epsilon_o} \qquad\qquad W = \frac{4}{3}\;\frac{\omega^4}{c^5}\;\frac{|\langle u_f|\;\mu\;|u_i\rangle|^2}{4\pi\epsilon_o}$$

Transizione di quadrupolo elettrico

Il *secondo termine*, utilizzando come sopra le leggi di commutazione $[x_j, p_l] = i\hbar\delta_{jl}$ diventa

$$\langle f|H_I|i\rangle = \frac{iq}{2m}\left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_o\omega}\right)^{1/2}\frac{m(E_f-E_i)}{i\hbar}\,\langle u_f|\sum_s\sum_{jl}\hat{\epsilon}_{sj}\;k_l\;(3x_jx_l - r^2\delta_{jl})|u_i\rangle$$

e, introducendo l'*operatore di quadrupolo elettrico* Q

$$Q_{jl} = q\;(3x_jx_l - r^2\delta_{jl})$$

con le proiezioni $Q_l^s = \sum_j \epsilon_{sj}Q_{jl}$; $\sum_s\sum_{jl}\epsilon_{sj}k_lQ_{jl} = \sum_s\sum_l k_lQ_l^s$, si ottiene

$$\langle f|H_I|i\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_o\omega}\right)^{1/2}\omega\;k\;\langle u_f|\;Q\;|u_i\rangle\;\cos\theta\;\cos\phi$$

dove θ è l'angolo tra la direzione del fotone emesso e l'asse che minimizza Q_{jl}. Introducento gli altri fattori, si ha la probabilità per unità di tempo di *transizione di quadrupolo elettrico*

$$d\dot{P}_{i\to f} = \frac{1}{4\pi}\;\frac{\omega^5}{\hbar c^5}\;\frac{|\langle u_f|\;Q\;|u_i\rangle|^2}{4\pi\epsilon_o}\;\cos^2\theta\;\cos^2\phi\;d\cos\theta\;d\phi$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{6}\;\frac{\omega^5}{\hbar c^5}\;\frac{|\langle u_f|\;Q\;|u_i\rangle|^2}{4\pi\epsilon_o}\qquad\qquad W = \frac{1}{6}\;\frac{\omega^6}{c^5}\;\frac{|\langle u_f|\;Q\;|u_i\rangle|^2}{4\pi\epsilon_o}$$

Come nei due casi precedenti, l'espressione quantistica si ottiene dall'espressione classica sostituendo il valore quadratico medio con il quadrato dell'elemento di matrice. Sulle proprietà di simmetria degli elementi di matrice e sulle regole di selezione torneremo più avanti quando saranno trattati i decadimenti radiativi nei nuclei e delle particelle.

1.7.4 Diffusione di fotoni da una carica elettrica

Come secondo esempio di processo elementare trattiamo la diffusione di un fotone da una carica libera, l'effetto Compton. Consideriamo un elettrone debolmente legato, $E_{legame} \ll \hbar\omega$, e un fotone di energia $\hbar\omega \ll m_ec^2$. In questo caso possiamo utilizzare l'approssimazione non relativistica della hamiltoniana di interazione trascurando effetti di spin dell'elettrone.

La transizione avviene dallo stato iniziale $|i\rangle = |\hat{\epsilon}, \vec{k}, \vec{p}\rangle$ allo stato finale $|f\rangle = |\hat{\epsilon}', \vec{k}', \vec{p}'\rangle$. Nel riferimento in cui l'elettrone è inizialmente a riposo ($p = 0$) il fotone di impulso $\vec{k}$ viene diffuso ad angolo polare θ con impulso $\vec{k}'$

$$k' = \frac{k}{1 + (k/m_ec)(1-\cos\theta)}$$

Il campo elettromagnetico assorbe il fotone $|\hat{\epsilon}, \vec{k}\rangle$ e emette il fotone $|\hat{\epsilon}', \vec{k}'\rangle$. Il termine della hamiltoniana di interazione è $H_I = e^2\ \vec{A}\cdot\vec{A}'/2m$ perché il termine $[e\ \vec{A}\cdot\vec{p}/m]^2$ è trascurabile a bassa energia. Considerando solo il primo termine dello sviluppo dell'esponenziale, $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \approx 1$, la hamiltoniana di interazione è

$$H_I = \frac{e^2}{2m}\ \frac{\hbar}{2V\epsilon_o(\omega\omega')^{1/2}}\ \sum_{ss'}\ \hat{\epsilon}_s\cdot\hat{\epsilon}_{s'}\ (a_{s'}\ e^{-i\omega' t} + a^+_{s'}\ e^{i\omega' t})\ (a_s\ e^{-i\omega t} + a^+_s\ e^{i\omega t})$$

Nell'elemento di matrice $\langle f|H_I|i\rangle$ l'operatore $a^+_{s'}a_s$ assorbe il fotone nello stato iniziale e emette il fotone nello stato finale. Il termine $e^{i(\omega-\omega')t}$ e l'analogo per le funzioni d'onda dell'elettrone danno la conservazione dell'energia

$$\overline{\langle f|H_I|i\rangle} = \frac{e^2}{2m}\ \frac{\hbar}{2V\epsilon_o(\omega\omega')^{1/2}}\ \Sigma_{ss'}\ \hat{\epsilon}_s\cdot\hat{\epsilon}_{s'}\ \delta(E_i - E_f)$$

L'energia nello stato finale è divisa tra il fotone e l'elettrone

$$E = k'c + mc^2 + \frac{kk'}{m}(1-\cos\theta) \qquad\qquad dE = \left[1 + \frac{k}{mc}(1-\cos\theta)\right] cdk' = \frac{kc}{k'}\ dk'$$

Otteniamo quindi il numero di stati finali

$$dN = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}\ k'^2\ dk'\ d\cos\theta\ d\phi = \frac{V}{4\pi^3\hbar^3}\ \frac{k'^3}{kc}\ dE\ d\cos\theta\ d\phi$$

e la probabilità di diffusione nell'unità di tempo

$$d\dot{P}_{i\to f} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o mc^2}\right)^2 \frac{c}{2V}\left(\frac{k'}{k}\right)^2 |\hat{\epsilon}\cdot\hat{\epsilon}'|^2\ d\cos\theta\ d\phi = \frac{r_e^2}{2}\ \frac{c}{V}\left(\frac{k'}{k}\right)^2 |\hat{\epsilon}\cdot\hat{\epsilon}'|^2\ d\cos\theta\ d\phi$$

Per calcolare $|\hat{\epsilon}\cdot\hat{\epsilon}'|^2$ consideriamo il vettore $\vec{k}$ parallelo all'asse z: la polarizzazione iniziale $\hat{\epsilon}_s$ è nel piano $x-y$. Il vettore $\vec{k}'$ ha componenti $(k'\sin\theta\cos\phi,\ k'\sin\theta\sin\phi,\ k'\cos\theta)$ e consideriamo due componenti di polarizzazione finale $\hat{\epsilon}' \perp \vec{k}'$

$$\epsilon'_1 = (\cos\theta\cos\phi,\ \cos\theta\sin\phi,\ -\sin\theta) \qquad\qquad \epsilon'_2 = (-\sin\phi,\ \cos\phi, 0)$$

Per $\epsilon_1 = (1,0,0)$ e $\epsilon_2 = (0,1,0)$ abbiamo

$$\hat{\epsilon} \parallel x\ \Rightarrow\ |\hat{\epsilon}\cdot\hat{\epsilon}'|^2 = \cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi \qquad \hat{\epsilon} \parallel y\ \Rightarrow\ |\hat{\epsilon}\cdot\hat{\epsilon}'|^2 = \cos^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\phi$$

Sommando sugli stati di polarizzazione otteniamo

$$\Sigma|\hat{\epsilon}\cdot\hat{\epsilon}'|^2 = 1 + \cos^2\theta \qquad\qquad d\dot{P}_{i\to f} = \frac{r_e^2}{2}\ \frac{c}{V}\left(\frac{k'}{k}\right)^2 (1+\cos^2\theta)\ d\cos\theta\ d\phi$$

Dividendo per il flusso iniziale, $\Phi_i = c/V$, si ottiene la sezione d'urto differenziale di effetto Compton in approssimazione non relativistica (particella di spin 0)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V}{c}\ \frac{d\dot{P}}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2 (2-\sin^2\theta)$$

che è il limite di bassa energia della sezione d'urto di Klein-Nishina (appendice 4.21)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} - \sin^2\theta\right)$$

Al limite $k \ll m_e c$, $k' \approx k$, si ottiene la sezione d'urto di Thomson.

1.7.5 Diffusione di Rutherford

Come terzo esempio di processo elementare consideriamo la diffusione di una particella di carica elettrica ze, massa m, impulso p e spin 0 nel campo coulombiano di una particella di carica elettrica Ze, massa M e spin 0. Se $p \ll mc$, in approssimazione non relativistica, la hamiltoniana della particella e la hamiltoniana di interazione coulombiana sono

$$H_o = \frac{p^2}{2m} \qquad\qquad H_I = U(\vec{r}) = \frac{zZ}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{e^2}{r}$$

Le autofunzioni della hamiltoniana H_o, normalizzate in un volume V sono

$$u_n(\vec{r}) = \frac{1}{V^{1/2}}\,e^{i\vec{k}_n\cdot\vec{r}} \qquad\qquad \vec{p}_n = \hbar\vec{k}_n$$

La transizione avviene dallo stato iniziale $|i\rangle = |\vec{k}\rangle$ allo stato finale $|f\rangle = |\vec{k'}\rangle$ caratterizzato dall'angolo polare θ e azimutale ϕ. L'*impulso trasferito* è $\Delta\vec{p} = \hbar\vec{q} = \hbar(\vec{k} - \vec{k'})$. L'elemento di matrice

$$\langle f|H_I|i\rangle = \int u_f^*(\vec{r})\; U(\vec{r})\; u_i(\vec{r})\; d\vec{r} = \frac{zZ}{V4\pi\epsilon_o}\int e^{-i\vec{k'}\cdot\vec{r}}\,\frac{e^2}{r}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,d\vec{r}$$

risulta indefinito in quanto è l'integrale di una funzione oscillante esteso all'infinito. Nella realtà non esistono cariche elettriche libere e il potenziale della carica Ze risulta in qualche modo schermato a distanza $r \gg R_{atomo}$. Cerchiamo la soluzione considerando un potenziale *schermato* del tipo

$$U(\vec{r}) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

che ci sarà utile più avanti. In questo caso l'integrale è

$$\int \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\,e^{-\mu r}}{r}\,d\vec{r} = \int e^{iqr\cos\alpha}\,\frac{e^{-\mu r}}{r}\,r^2\,dr\,d\cos\alpha\,d\phi = 2\pi\int\frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr}\,e^{-\mu r}\,r\,dr =$$

$$= \frac{2\pi}{iq}\int(e^{-(\mu - iq)r} - e^{-(\mu+iq)r})\,dr = \frac{2\pi}{iq}\left[\frac{1}{\mu - iq} - \frac{1}{\mu + iq}\right] = \frac{4\pi}{q^2 + \mu^2}$$

Il potenziale coulombiano si ottiene con il limite $\mu \to 0$ ($\mu \ll q$ cioè $\Delta p \gg \hbar\mu \approx \hbar/R_{atomo}$). Quindi l'elemento di matrice

$$\langle f|H_I|i\rangle = \frac{1}{V}\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{4\pi}{q^2}$$

è proporzionale al prodotto delle cariche elettriche e alla trasformata di Fourier del potenziale coulombiano che è il *propagatore del campo di interazione*. Nell'ipotesi $m \ll M$ possiamo trascurare il rinculo della particella M e abbiamo $|\vec{k'}| \approx |\vec{k}|$

$$q^2 = |\vec{k} - \vec{k'}|^2 = \vec{k}^2 + \vec{k'}^2 - 2\ \vec{k} \cdot \vec{k'} \approx 2\ k^2(1 - \cos\theta) = \frac{4p^2}{\hbar^2}\ \sin^2\theta/2$$

Calcolando il numero di stati finali

$$dN_f = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\ p'^2\ dp'\ d\cos\theta\ d\phi = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\ m\ p'\ dE_f\ d\cos\theta\ d\phi$$

otteniamo la probabilità di transizione per unità di tempo

$$d\dot{P}_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}\ \left(\frac{zZe^2}{V\epsilon_o}\right)^2\ \left(\frac{\hbar^2}{4p^2\sin^2\theta/2}\right)^2\ \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\ m\ p\ d\cos\theta\ d\phi =$$

$$= \frac{1}{V}\ \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o}\right)^2\ \frac{1}{4p^2 v\sin^4\theta/2}\ d\cos\theta\ d\phi$$

che, dividendo per il flusso incidente, $\Phi_i = v/V$, dà la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2\ (zZ)^2\ \frac{(m_e c^2)^2}{4p^2 v^2\sin^4\theta/2}$$

1.7.6 Fattore di forma elettrico

La sezione d'urto che abbiamo trovato descrive la diffusione da una *carica puntiforme*. Se la particella bersaglio ha una struttura con una densità di carica $Ze\rho(\vec{r'})$ in una regione di spazio R (Fig.1.55), l'elemento di matrice viene modificato

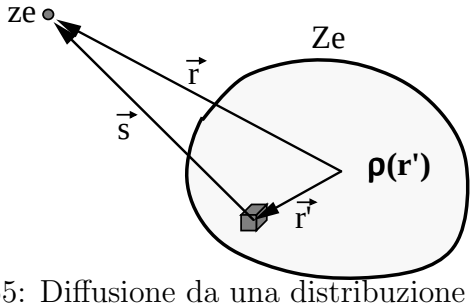


Figure 1.55: Diffusione da una distribuzione di carica

$$\langle f|H_I|i\rangle = \frac{zZe^2}{V 4\pi\epsilon_o}\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\ \int_R \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\ d\vec{r'}\ d\vec{r}$$

Cambiando la variabile di integrazione: $\vec{r} = \vec{r'} + \vec{s}$,

$$\langle f|H_I|i\rangle = \frac{zZe^2}{V 4\pi\epsilon_o}\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{s}}\int_R e^{i\vec{q}\cdot\vec{r'}}\ \frac{\rho(\vec{r'})}{s}\ d\vec{r'}\ d\vec{s} =$$

$$= \frac{zZe^2}{V4\pi\epsilon_o} \int \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{s}}}{s}\, d\vec{s} \int_R e^{i\vec{q}\cdot\vec{r'}}\ \rho(\vec{r'})\ d\vec{r'} = \frac{zZe^2}{V4\pi\epsilon_o}\ \frac{4\pi}{q^2}\ F_E(\vec{q})$$

La trasformata di Fourier della densità di carica è il

$$\textit{fattore di forma elettrico} \qquad\qquad F_E(\vec{q}) = \int_R e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\ \rho(\vec{r})\ d\vec{r}$$

con la normalizzazione

$$F_E(q=0) = \int_R \rho(\vec{r})\ d\vec{r} = 1$$

La sezione d'urto di diffusione dalla distribuzione di carica è uguale al prodotto della sezione d'urto di diffusione da una carica puntiforme Ze nel baricentro della distribuzione di carica per il quadrato del modulo del fattore di forma elettrico

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{punto} |F_E(\vec{q})|^2$$

Sviluppando l'esponenziale in serie di potenze dell'impulso trasferito

$$e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \sum_n\ \frac{(i\vec{q}\cdot\vec{r})^n}{n!} = \sum_n\ \frac{i^n}{n!}\left(\frac{\Delta\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)^n$$

si ottiene lo sviluppo del fattore di forma in funzione dei *momenti della distribuzione di carica*

$$F(\vec{q}) = 1 + i\int_R \vec{q}\cdot\vec{r}\ \rho(\vec{r})\ d\vec{r} - \frac{1}{2}\int_R (\vec{q}\cdot\vec{r})^2\ \rho(\vec{r})\ d\vec{r} + \ldots$$

Il potere risolutivo per studiare la distribuzione di carica di un sistema nucleare di dimensione R è tanto migliore quanto più grande è l'impulso trasferito: $\Delta p \approx 2\ p\ \sin(\theta/2) \gg \hbar/R$.

Se la distribuzione di carica ha *simmetria radiale*, $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, i momenti dispari della distribuzione di carica sono nulli. Il secondo termine corrisponde al secondo momento e definisce il *raggio quadratico medio* della distribuzione di carica

$$\frac{1}{2}\int q^2 r^2 \cos^2\theta\ \rho(r)\ r^2 dr d\Omega = \frac{2\pi}{3}\ q^2 \int_R r^4 \rho(r) dr = \frac{1}{6}\ q^2 \int_R r^2 \rho(\vec{r}) d\vec{r} = \frac{1}{6}\ q^2 \langle r^2\rangle$$

In questo caso il fattore di forma è funzione del quadrato dell'impulso trasferito

$$F(\vec{q}) = F(q^2) = 1 - \frac{1}{6}\ q^2\langle r^2\rangle + \frac{1}{120}\ q^4\langle r^4\rangle + \ldots$$

e il raggio quadratico medio della distribuzione di carica si ottiene dalla derivata del fattore di forma per $q^2 = 0$

$$\langle r^2\rangle = -6\left(\frac{\partial F}{\partial q^2}\right)_{q^2=0}$$

Esempio 1: distribuzione di carica uniforme

Per una distribuzione di carica uniforme in una sfera di raggio R

$$\rho(r) = \ \rho_o = \frac{3}{4\pi R^3} \qquad r \le R \qquad\qquad \rho(r) = 0 \qquad r > R$$

il fattore di forma è

$$\rho_o \int e^{iqr\cos\theta}\ r^2 dr d\cos\theta d\phi = \rho_o\ 2\pi \int \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr}\ r^2 dr = \rho_o\ \frac{4\pi}{q} \int_0^R \sin qr\ r dr$$

$$F(q^2) = \frac{3}{q^3R^3}\ (\sin qR - qR\ \cos qR) = 1 - \frac{q^2R^2}{10} + \frac{q^4R^4}{280} + \dots$$

Il raggio quadratico medio della distribuzione di carica è $\langle r^2\rangle = 3R^2/5$. Questo fattore di forma riproduce bene i risultati di misure di sezione d'urto di diffusione di elettroni da nuclei con peso atomico A grande.

Esempio 2: distribuzione di carica esponenziale

Per una distribuzione di carica $\rho(r) = \rho_o e^{-\mu r}$

$$\int \rho_o e^{-\mu r}\ r^2 dr d\cos\theta d\phi = \rho_o\ 4\pi\ \frac{2}{\mu^3} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \rho_o = \frac{\mu^3}{8\pi}$$

$$F(q) = \rho_o \int e^{iqr\cos\theta} e^{-\mu r}\ r^2 dr d\cos\theta d\phi = \rho_o\ 2\pi \int \frac{e^{-(\mu - iq)r} - e^{-(\mu+iq)r}}{iqr}\ r^2 dr =$$

$$= \rho_o\ \frac{2\pi}{iq}\left[\frac{1}{(\mu - iq)^2} - \frac{1}{(\mu+iq)^2}\right] = \rho_o\ \frac{8\pi\mu}{(q^2+\mu^2)^2}$$

$$F(q^2) = \frac{\mu^4}{(q^2+\mu^2)^2} = \frac{1}{(1+q^2/\mu^2)^2} = 1 - \frac{2q^2}{\mu^2} + \frac{3q^4}{\mu^4} + \dots$$

Il raggio quadratico medio della distribuzione di carica è $\langle r^2\rangle = 12/\mu^2$. Questo fattore di forma riproduce bene i risultati di misure di sezione d'urto di diffusione di elettroni da protoni e neutroni.

Esempio 3: distribuzione di carica gaussiana

La trasformata di Fourier di una distribuzione di carica gaussiana

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\ e^{-r^2/2\sigma^2}$$

con raggio quadratico medio $\langle r^2\rangle = 3\sigma^2$, è una funzione gaussiana

$$F(q^2) = e^{-q^2\sigma^2/2} = 1 - \frac{q^2\sigma^2}{2} + \frac{q^4\sigma^4}{8} + \dots$$

Il raggio quadratico medio della distribuzione di carica è $\langle r^2\rangle = 3\sigma^2$. Questo fattore di forma riproduce bene i risultati di misure di sezione d'urto di diffusione di elettroni da nuclei con peso atomico A piccolo (He, Li, Be, ...).

1.7.7 Diffusione di una carica da un dipolo magnetico

Se la particella bersaglio ha spin $\neq 0$, una particella di carica elettrica ze è soggetta al campo prodotto dal momento di dipolo magnetico $\vec{\mu}$ della particella bersaglio. Poichè il campo magnetico generato da un dipolo ha una dipendenza dalla distanza $\sim 1/r^3$, l'interazione è di intensità molto minore che nel caso del campo coulombiano che ha l'andamento $\sim 1/r^2$. L'intensità dell'interazione col momento magnetico è importante solo a piccole distanze, cioè per grandi impulsi trasferiti. Ci sono particelle neutre dotate di momento di dipolo magnetico (questo è il caso del neutrone) che hanno solo interazioni magnetiche.

Il potenziale prodotto da un dipolo magnetico a distanza r è

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

L'elemento di matrice di transizione tra lo stato $|\vec{p}\rangle$ e lo stato $|\vec{p'}\rangle$ è

$$\langle \vec{p'}|H_I|\vec{p}\rangle = -\frac{ze}{mV} \frac{\mu_o}{4\pi} \langle \vec{p'}| \frac{\vec{\mu} \wedge \vec{r}}{r^3} \cdot \vec{p} \, |\vec{p}\rangle$$

Osservando che $(\vec{\mu} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{p} = (\vec{p} \wedge \vec{\mu}) \cdot \vec{r}$, l'integrale diventa

$$\int e^{iqr\cos\theta} \frac{(\vec{p} \wedge \vec{\mu}) \cdot \vec{r}}{r^3} r^2 dr d\cos\theta d\phi = \langle (\vec{p} \wedge \vec{\mu}) \cdot \vec{q} \rangle \frac{4\pi i}{q^2}$$

Quindi, a parte un fattore angolare, l'elemento di matrice è

$$|\langle \vec{p'}| \, H_I \, |\vec{p}\rangle|^2 = \frac{z^2}{m^2V^2} \left(\frac{e\mu_o}{4\pi}\right)^2 \frac{16\pi^2 \, \mu^2 p^2}{q^2}$$

La probabilità di transizione nell'unità di tempo per interazione tra la carica ze e il momento magnetico della particella bersaglio $\mu = e\hbar/2M$

$$d\dot{P}_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar} z^2 \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_o c^2}\right)^2 \left(\frac{e\hbar}{2M}\right)^2 \frac{1}{m^2V^2} \frac{16\pi^2\hbar^2p^2}{4p^2\sin^2\theta/2} \frac{V}{8\pi^3\hbar^3} \, pm \, d\Omega =$$

$$= \frac{v}{V} z^2 r_e^2 \frac{(m_e c^2)^2}{4p^2\sin^4\theta/2} \frac{1}{c^2} \frac{(\Delta p)^2}{(2Mc)^2} \, d\Omega$$

ci dà, dividendo per il flusso iniziale, la sezione d'urto di diffusione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = z^2 r_e^2 \frac{(m_e c^2)^2}{4p^2v^2\sin^4\theta/2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \frac{(\Delta p)^2}{(2Mc)^2}$$

proporzionale alla sezione d'urto di Rutherford e ad un fattore che dipende dalla velocità e dal quadrato del rapporto tra l'impulso trasferito e la massa della particella bersaglio e che quindi è molto piccolo se $\Delta p \ll Mc$ e se la particella incidente non ha energia elevata.

1.7.8 Fattore di forma magnetico

Se la particella bersaglio ha una struttura con una densità di magnetizzazione $\vec{M}(\vec{r'})$ in una regione di spazio R, l'integrale nell'elemento di matrice viene modificato

$$\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \int_R \frac{\vec{M}(\vec{r'}) \wedge (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \, d\vec{r'} \, d\vec{r} = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{s}} \int_R e^{i\vec{q}\cdot\vec{r'}} \, \frac{\vec{M}(\vec{r'}) \wedge \vec{s}}{s^3} \, d\vec{r'} \, d\vec{s} =$$

$$\int_R e^{i\vec{q}\cdot\vec{r'}} \, \vec{M}(\vec{r'}) \, d\vec{r'} \wedge \int \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{s}} \, \vec{s}}{s^3} \, d\vec{s}$$

L'integrale contiene la trasformata di Fourier della densità di magnetizzazione cioè il

$$\textit{fattore di forma magnetico} \qquad \vec{F}_M(\vec{q}) = \int_R e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \, \vec{M}(\vec{r}) \, d\vec{r}$$

con la normalizzazione

$$\vec{F}_M(q = 0) = \int_R \vec{M}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \vec{\mu}$$

dove $\vec{\mu}$ è il momento magnetico della particella. La sezione d'urto di diffusione dalla distribuzione di magnetizzazione è uguale al prodotto della sezione d'urto di diffusione da una particella puntiforme con momento magnetico $\vec{\mu}$ nel baricentro della distribuzione per il quadrato del modulo del fattore di forma magnetico

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{punto} |\vec{F}_M(\vec{q})|^2$$

Possiamo quindi ripetere le considerazioni fatte sopra e definire i *momenti della distribuzione di magnetizzazione*, il *raggio quadratico medio* della distribuzione *etc.*

1.7.9 Forma relativistica della sezione d'urto di Rutherford

Se la velocità relativa delle particelle non è piccola rispetto alla velocità della luce, occorre usare le regole della cinematica relatistica (appendice 4.6). Questo permette anche di introdurre la dipendenza delle sezioni d'urto dallo spin delle particelle che è un fenomeno tipicamente relativistico. Consideriamo la diffusione di una particella di massa m e 4-impulso P da una particella di massa M e 4-impulso P_o. Manteniamo l'ipotesi $m \ll M$, che è vera nella maggior parte degli esperimenti in cui si studia la struttura dei nuclei con fasci di elettroni, e facciamo l'ipotesi $E \gg mc^2$, anche questa verificata nella maggior parte dei casi di interesse. Nel riferimento in cui la particella M è in quiete abbiamo (*usiamo la convenzione c = 1*)

$$\textit{stato iniziale} \qquad P = (\vec{p}, E) \qquad P_o = (0, M)$$

$$\textit{stato finale} \qquad P' = (\vec{p'}, E') \qquad P'_o = (\vec{p'}_o, E'_o)$$

La conservazione di energia-impulso richiede

$$P + P_o = P' + P'_o \qquad P - P' = q = P'_o - P_o$$

dove q è il 4-*impulso trasferito* $q = (\vec{q}, \nu) = (\vec{p} - \vec{p'}, E - E')$

$$q^2 = (P - P')^2 = P^2 + P'^2 - 2\ EE' + 2\ \vec{p} \cdot \vec{p'} \approx 2m^2 - 2EE'(1 - \cos\theta) \approx -4pp' \sin^2\theta/2$$

q^2 è di *tipo spazio (space-like)*. Analogamente per le variabili della particella bersaglio

$$q^2 = (P'_o - P_o)^2 = P'^2_o + P^2_o - 2\ E_o E'_o + 2\ \vec{p}_o \cdot \vec{p}'_o = 2M^2 - 2ME'_o$$

Si ha *diffusione elastica* se l'energia trasferita è molto più piccola dell'energia che tiene legata la particella bersaglio, $\nu \ll E_o^{legame} \ll M$. In questo caso la particella bersaglio rimane uno stato legato con massa M che rincula con energia cinetica ν e energia totale

$$E'_o = M - \frac{q^2}{2M} = M + \nu$$

Il processo di diffusione elastica è caratterizzato da

$$-q^2 = 2M\nu \qquad\qquad \vec{q}^{\,2} = \nu^2 - q^2 = q^2\ \frac{q^2}{4M^2} - q^2 \approx -q^2$$

La particella m è diffusa ad angolo polare θ con impulso

$$p' \approx \frac{p}{1 + (p/M)(1 - \cos\theta)} = \frac{p}{1 + (2p/M)\sin^2\theta/2}$$

dove abbiamo fatto l'ipotesi che l'energia della particella nello stato finale sia $E' \gg mc^2$ (è la relazione dell'effetto Compton). L'elemento di matrice è lo stesso calcolato in precedenza per la diffusione Rutherford. Nel calcolo della densità degli stati finali dobbiamo tener conto dell'energia cinetica ceduta alla particella bersaglio

$$E_f = E' + E'_o \approx p' + M + \frac{2pp' \sin^2\theta/2}{M} \qquad\qquad dE_f = (1 + \frac{2p \sin^2\theta/2}{Mc})c\ dp' = \frac{cp}{p'}\ dp'$$

dove abbiamo re-introdotto i fattori c per tener conto delle dimensioni.

La sezione d'urto si ottiene come nel caso precedente. Per una particella di carica e e velocità $v \approx c$ risulta

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2\ r_e^2\ \frac{(m_e c^2)^2}{4p^2c^2\ \sin^4\theta/2}\ \frac{p'}{p} = Z^2\ r_e^2\ \frac{(m_e c^2)^2}{4p^2c^2\ \sin^4\theta/2}\ \frac{1}{1 + (2p/Mc)\ \sin^2\theta/2}$$

Possiamo esprimere la sezione d'urto in *forma invariante* in funzione del 4-impulso trasferito, $dq^2 = -2pp'\ d(1 - \cos\theta) = 2pp'\ d\cos\theta = pp'\ d\Omega/\pi$

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{d\sigma}{d\Omega}\ \frac{d\Omega}{dq^2} = Z^2\ \frac{4r_e^2\ (m_e c^2)^2}{q^4}\ \frac{p'^3}{p}\ \frac{\pi}{pp'} = Z^2\ \frac{4\pi r_e^2\ (m_e c^2)^2}{q^4} \left(\frac{p'}{p}\right)^2$$

1.7.10 Sezione d'urto di Dirac

La sezione d'urto di Rutherford non tiene conto dello spin delle particelle: è valida per particelle di spin 0. L'equazione del moto di una particella relativistica di spin 1/2, l'equazione di Dirac (appendice 4.18), prevede che l'*elicità*, $h = \vec{s} \cdot \vec{p}/|\vec{s}||\vec{p}|$, si conservi ad alta energia. Gli stati di elicità di un fermione di spin 1/2 sono $h = \pm 1$ e la probabilità che un fermione [antifermione] con velocità βc abbia elicità $h = -1$ $[h = +1]$ è uguale a $(1 + \beta)/2$ $[(1 - \beta)/2]$. Per particelle con $E \gg mc^2$ possiamo considerare il limite $\beta \to 1$. Se un elettrone con elicità nello stato iniziale $h = -1$ viene diffuso ad angolo polare θ, la conservazione del momento angolare e dell'elicità introduce un nuovo fattore nella sezione d'urto differenziale.

Gli stati iniziale e finale sono autostati dell'operatore di spin, $|\vec{s}|$, e della componente s_z rappresentati dalle matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$$

Lo stato iniziale è $|1/2, -1/2\rangle$. Lo stato finale sarà una combinazione dei due stati $|1/2, +1/2\rangle$ e $|1/2, -1/2\rangle$ che rappresentiamo come autostati delle matrici di Pauli

$$|1/2, +1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con autovalori $\pm 1/2$. Nella transizione dallo stato iniziale (assumiamo $p_i \parallel z$) allo stato finale interviene l'operatore di rotazione attorno ad un asse normale all'asse z (appendice 4.10)

$$R_y(\theta) = e^{is_y\theta} = e^{i\sigma_y\theta/2} = \cos\theta/2 + i\ \sigma_y\ \sin\theta/2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & 0 \\ 0 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -i\ \sin\theta/2 \\ i\ \sin\theta/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

Gli elementi di matrice della rotazione sono

$$\langle 1/2, -1/2|\ R_y(\theta)\ |1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos\theta/2$$

$$\langle 1/2, +1/2|\ R_y(\theta)\ |1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sin\theta/2$$

Se la particella bersaglio ha spin 0 non può modificare lo stato di momento angolare s_z dell'elettrone e si ha solo il primo elemento di matrice. La sezione d'urto viene modificata per il fattore $|\langle 1/2, -1/2|\ R_y(\theta)\ |1/2, -1/2\rangle|^2 = \cos^2\theta/2$ ed è chiamata

$$\textit{sezione d'urto di Mott} \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \cos^2\theta/2$$

Il fattore $\cos^2\theta/2$ sopprime la deflessione ad angoli grandi, $\theta \approx \pi$, che per la conservazione dell'elicità comporterebbe l'inversione dello spin.

- Nota: questa è l'espressione della sezione d'urto di Mott nel limite $\beta \to 1$. Per una particella di velocità βc si ha

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} (1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2)$$

Se la particella bersaglio ha spin 1/2, si hanno due contributi: la diffusione per interazione con la carica elettrica, in cui compare il fattore $\cos^2 \theta/2$, e l'interazione col momento magnetico della particella bersaglio, con inversione degli spin, che è rappresentata dal fattore $\sin^2 \theta/2$. Per un fermione di spin 1/2 e massa M, con fattore giromagnetico $g = 2$ e momento magnetico $\mu = 2(e/2M)(\hbar/2)$, la probabilità di interazione magnetica va sommata alla probabilità di interazione elettrica e si ottiene, per $\beta \to 1$, la

sezione d'urto di Dirac
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \left[\cos^2 \theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2}\, 2\sin^2 \theta/2\right]$$

$Q^2 = -q^2 = 4pp' \sin^2 \theta/2$ è il quadrato del 4-impulso trasferito e il fattore 2 tiene conto della molteplicità degli stati di spin 1/2.

1.7.11 Sezione d'urto di Rosenbluth

Se la particella bersaglio ha fattore giromagnetico $g \neq 2$, cioè ha *momento magnetico anomalo* caratterizzato da $g = 2(1+\kappa)$, la sezione d'urto viene modifica nella *sezione d'urto di Rosenbluth*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \left[\left(1 + \frac{Q^2}{4M^2}\, \kappa^2\right) \cos^2 \theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2}\, (1+\kappa)^2\, 2\sin^2 \theta/2\right]$$

Se inoltre la particella bersaglio ha una struttura caratterizzata da una densità di carica $\rho(\vec{r})$ e di magnetizzazione $\vec{M}(\vec{r})$ (il momento magnetico anomalo è in effetti prodotto da una distribuzione non puntiforme) si introducono i fattori di forma elettrico $F_E(q^2)$ e magnetico $F_M(q^2)$ che modificano la sezione d'urto nella forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \left[\left(F_E^2 + \frac{Q^2}{4M^2}\, \kappa^2\, F_M^2\right) \cos^2 \theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2}\, (F_E + \kappa\, F_M)^2\, 2\sin^2 \theta/2\right]$$

Per il protone e il neutrone la normalizzazione dei fattori di forma è

$$F_E^p(0) = F_M^p(0) = 1 \qquad F_E^n(0) = 0 \qquad F_M^n(0) = 1$$

In luogo di questi due fattori di forma si utilizzano di solito le combinazioni

$$G_E(q^2) = F_E(q^2) - \frac{Q^2}{4M^2}\, \kappa\, F_M(q^2) \qquad G_M(q^2) = F_E(q^2) + \kappa\, F_M(q^2)$$

con la normalizzazione

$$G_E^p(0) = 1 \qquad G_E^n(0) = 0 \qquad G_M^p(0) = 1 + \kappa_p = \mu_p \qquad G_M^n(0) = 1 + \kappa_n = \mu_n$$

e la sezione d'urto di Rosenbluth si esprime

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \left[\frac{G_E^2 + (Q^2/4M^2)\ G_M^2}{1 + Q^2/4M^2}\ \cos^2\theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2}\ G_M^2\ 2\sin^2\theta/2\right] =$$

$$= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left[\frac{G_E^2 + (Q^2/4M^2)\ G_M^2}{1 + Q^2/4M^2} + \frac{Q^2}{4M^2}\ G_M^2\ 2\tan^2\theta/2\right]$$

Dall'analisi della forma della sezione d'urto possiamo osservare che

- per $Q^2 \ll (2Mc^2)^2$ domina il contributo dell'interazione con la carica elettrica del bersaglio, $d\sigma/d\Omega \approx G_E^2$;
- per $Q^2 \gg (2Mc^2)^2$ domina il contributo dell'interazione con il momento magnetico del bersaglio, $d\sigma/d\Omega \approx G_M^2$;
- misurando il modulo dell'impulso dell'elettrone nello stato finale, p', e l'angolo di diffusione, θ, si possono misurare sia G_E^2 che G_M^2 studiando la dipendenza della sezione d'urto da Q^2 e $\tan^2\theta/2$ (Fig.1.56);
- l'estrapolazione dei dati sperimentali a $Q^2 \to 0$ determina la carica Ze e il momento magnetico μ della particella bersaglio.

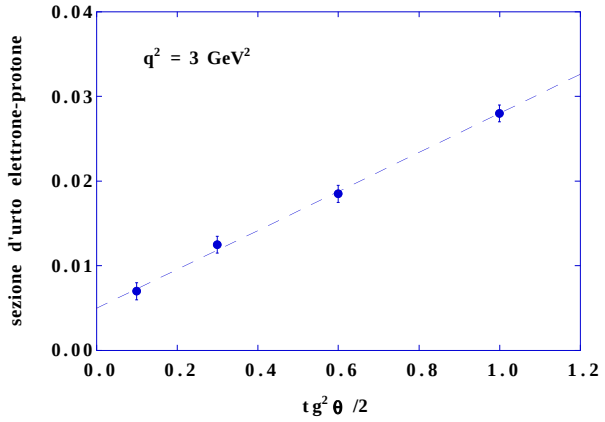


Figure 1.56: Sezione d'urto elettrone-nucleone in funzione di $\tan^2\theta/2$

Per avere informazioni dettagliate sulle proprietà di particelle con una struttura di dimensione spaziale R occorrono due condizioni

- che la particella del fascio abbia caratteristiche ben note e, possibilmente, abbia una struttura *elementare*; questa condizione è ben assicurata dagli elettroni;
- che la *lunghezza d'onda* associata all'impulso trasferito sia molto minore delle dimensioni della particella bersaglio $\hbar/\Delta p = \hbar/(4pp'\sin^2\theta/2)^{1/2} \ll R$, cioè che l'impulso del fascio sia sufficientemente elevato.

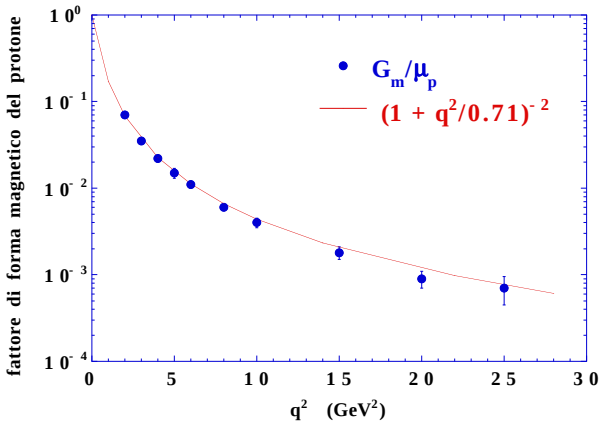


Figure 1.57: Fattore di forma magnetico del protone in funzione di q^2

Le misure iniziate da Hofstadter [35] nel 1958 con fasci di elettroni e bersagli di protoni, neutroni e nuclei leggeri (Fig.1.57) hanno fornito importanti risultati sulle proprietà di queste particelle (in realtà non esistono neutroni liberi, le misure sono fatte con bersagli di idrogeno e deuterio e le informazioni sul neutrone sono estratte per confronto)

- i fattori di forma $G_E^p(q^2)$, $G_M^p(q^2)/\mu_p$, $G_M^n(q^2)/\mu_n$ hanno la stessa dipendenza da q^2 che viene parametrizzata nella forma

$$G(q^2) = \frac{1}{(1 + q^2/q_o^2)^2}$$

  da cui si deriva $q_o^2 = 0.71\ GeV^2$;

- questa è la trasformata di Fourier di una distribuzione di carica e di magnetizzazione esponenziale

$$\rho(r) \approx M(r) \approx e^{-q_o r}$$

- il raggio quadratico medio delle distribuzioni rappresenta l'*estensione spaziale* del protone e del neutrone, il valore è

$$\sqrt{\langle\ r^2\rangle} = \sqrt{12}\ \frac{\hbar c}{q_o} \approx 0.8\ 10^{-13}\ cm$$

- i momenti magnetici, espressi in *magnetoni nucleari*, sono

$$\mu_p = +2.792\ \mu_N \qquad \mu_n = -1.913\ \mu_N \qquad \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$$

  in ottimo accordo con i risultati delle misure effettuate con il metodo della risonanza magnetica nucleare (capitolo ???).

[35] premio Nobel per la fisica nel 1961

1.8 Diffusione da potenziale

Nel capitolo ??? abbiamo introdotto la sezione d'urto e derivato alcuni esempi sulla base delle conoscenze di fisica classica e nel capitolo ??? abbiamo calcolato la sezione d'urto di alcuni processi elementari sulla base dei metodi perturbativi della meccanica quantistica. Gli esempi che abbiamo trattato riguardano processi di interazione elettromagnetica. I risultati sperimentali sono in accordo con le previsioni del modello teorico. I principali motivi del successo del modello sono

- il potenziale è derivato dalle leggi ben verificate dell'elettromagnetismo classico;
- il modello è basato su solide leggi di simmetria: l'invarianza per trasformazioni di Lorentz, di gauge, di coniugazione di carica, ...;
- lo sviluppo in serie del calcolo perturbativo converge rapidamente perché la *costante* adimensionale caratteristica dell'interazione elettromagnetica è *piccola*

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o\hbar c} \approx \frac{1}{137} \ll 1$$

La trattazione delle interazioni nucleari è notevolmente più complessa perché

- non c'è un *analogo classico* su cui basare ipotesi;
- la hamiltoniana di interazione non è nota;
- l'interazione è molto più intensa dell'interazione elettromagnetica e i metodi perturbativi non danno risultati affidabili.

Poiché gran parte dell'informazione sperimentale è basata sullo studio di *reazioni nucleari* e di *diffusione di particelle da nuclei* è opportuno impostare in modo più generale lo studio di questi processi.

1.8.1 Diffusione da potenziale radiale

Consideriamo la diffusione di una particella di massa m_1 dalla particella bersaglio di massa m_2 descritta in meccanica non relativistica dalla equazione del moto

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\,\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\,\nabla_2^2 + U(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right]\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)$$

La soluzione si può fattorizzare nelle coordinate del moto relativo tra le particelle e nelle coordinate del baricentro

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad\qquad \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

L'equazione del moto si modifica nella forma

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},\vec{R},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\ \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\ \nabla_r^2 + U(\vec{r})\right]\psi(\vec{r},\vec{R},t)$$

con $M = m_1 + m_2$ e $m = (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$. La soluzione

$$\psi(\vec{r},\vec{R},t) = u(\vec{r})\ v(\vec{R})\ e^{-i(E_r+E_R)t/\hbar}$$

soddisfa le equazioni

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\ \nabla_R^2\ v(\vec{R}) = E_R\ v(\vec{R}) \qquad\qquad \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\ \nabla_r^2 + U(\vec{r})\right]\ u(\vec{r}) = E_r\ u(\vec{r})$$

- la prima equazione descrive il moto del centro di massa che si muove di moto rettilineo uniforme;
- la seconda equazione, che è quella che ci interessa, descrive l'interazione delle due particelle nel sistema del centro di massa.

Quindi tutte le considerazioni che seguono si riferiscono al *sistema del centro di massa*. Facciamo le seguenti ipotesi aggiuntive

- il potenziale $U(\vec{r})$ si annulla per $r \to \infty$ con un andamento più rapido di $1/r$;
- se $\mathcal{R}$ è la dimensione del sistema in studio, le osservazioni sono fatte a distanza $r \gg \mathcal{R}$;
- il potenziale è a simmetria sferica, $U(\vec{r}) = U(r)$.

$U(r) \to 0$ al tempo $t = -\infty$ e a distanza $r \gg \mathcal{R}$. L'equazione diventa

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0 \qquad\qquad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Lo stato iniziale è lo stato di particelle libere con impulso $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ (nel sistema del centro di massa) che assumiamo parallelo all'asse z

$$u_i(\vec{r}) = \frac{1}{V^{1/2}}\ e^{ikz}$$

Al tempo $t = +\infty$ e a distanza $r \gg \mathcal{R}$ ipotizziamo una soluzione del tipo

$$u_f(\vec{r}) = \frac{1}{V^{1/2}}\left[e^{ikz} + f(\theta,\phi)\ \frac{e^{ikr}}{r}\right]$$

sovrapposizione dell'*onda piana* $u_i(\vec{r})$ e di un'*onda sferica* che ha origine nel centro di massa del sistema e ha ampiezza $f(\theta,\phi)$ detta *ampiezza di diffusione* (Fig.1.58). Per ottenere la sezione d'urto calcoliamo il *flusso incidente* e il *flusso diffuso* dal

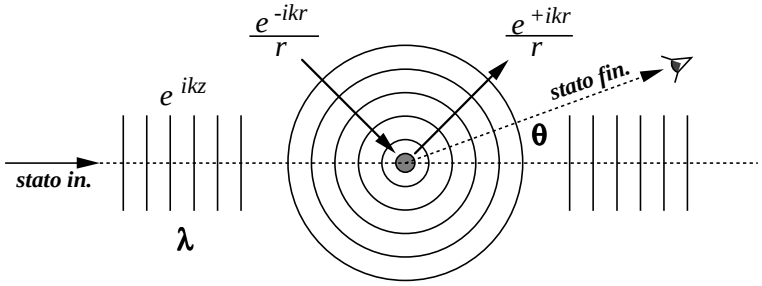


Figure 1.58: Diffusione da potenziale

potenziale ad un angolo fissato θ, ϕ

$$\Phi_i = \frac{\hbar}{2im}\ (u_i^* \nabla u_i - u_i \nabla u_i^*) = \frac{\hbar k}{Vm}$$

$$\Phi_d = \frac{\hbar}{2imV}\ |f(\theta,\phi)|^2 \left[\frac{e^{-ikr}}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{-ikr}}{r}\right] = \frac{1}{r^2}\ \frac{\hbar k}{Vm}\ |f(\theta,\phi)|^2$$

Il numero di particelle diffuse nell'unità di tempo con angolo di diffusione Ω è $\dot{n}_d(\Omega) = \Phi_d r^2$ e quindi la sezione d'urto differenziale è pari al modulo quadro dell'ampiezza di diffusione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\dot{n}_d(\Omega)}{\Phi_i} = |f(\theta,\phi)|^2$$

1.8.2 Approssimazione di Born

Se il potenziale $U(r)$ è noto, la soluzione dell'equazione non omogenea (normalizzata in un volume $V = 1$) è del tipo

$$u(\vec{r}) = e^{ikz} + \frac{2m}{\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r'}|}\ U(r')\psi(r')d\vec{r'}$$

che, per $r \to \infty$,

$$|\vec{r}-\vec{r'}| \ll r \qquad \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \approx \frac{e^{ikr}}{r}\ e^{-i\vec{k'}\cdot\vec{r'}} \qquad \vec{k'} = k\hat{r}$$

possiamo approssimare

$$u(\vec{r}) = e^{ikz} + \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ikr}}{r}\ e^{-i\vec{k'}\cdot\vec{r'}}\ U(r')\ \psi(r')\ d\vec{r'} = e^{ikz}\ +$$

$$+\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{-i\vec{k'}\cdot\vec{r'}}\ U(r')\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r'}} + \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr'}}{r'}\int e^{-i\vec{k'}\cdot\vec{r''}}\ U(r'')\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r''}} + \ldots\right)d\vec{r''}\right]d\vec{r'}$$

Con queste ipotesi la soluzione è rappresentata dallo sviluppo in serie

$$u(\vec{r}) = e^{ikz} + \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}'}\ U(r')\ d\vec{r}' +$$

$$+\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2\frac{e^{ikr}}{r}\int\frac{e^{ikr'}}{r'}\ e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}\ U(r')\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}''}\ U(r'')\ d\vec{r}''\ d\vec{r}'\ +\ldots$$

Il *primo termine* della serie è l'ampiezza di diffusione *in approssimazione di Born*

$$f(\theta,\phi) = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\ U(r)\ d\vec{r} \qquad\qquad \vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$$

Se sostituiamo in questa relazione la hamiltoniana del potenziale coulombiano

$$U(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_o r} \qquad \Rightarrow \qquad f(\theta,\phi) = \frac{zZr_e m_e c^2}{2pv\sin^2\theta/2}$$

troviamo la sezione d'urto di Rutherford.

1.8.3 Sviluppo in onde parziali

Se il potenziale $U(r)$ non è noto, possiamo comunque cercare le caratteristiche dell'ampiezza di diffusione sulla base delle ipotesi che il potenziale sia a simmetria sferica e che si annulli per $r \to \infty$. Nel sistema del centro di massa possiamo sviluppare la soluzione dell'equazione del moto, l'onda piana incidente e l'onda diffusa, in autofunzioni del momento angolare facendo una ipotesi aggiuntiva che

- lo stato iniziale e finale abbiano simmetria azimutale, cioè non dipendano dall'angolo ϕ

Con queste ipotesi, lo stato iniziale e finale si possono sviluppare in autofunzioni del momento angolare $\vec{l}, l_z$, con $l_z = 0$

$$Y_{l0}(\theta) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} P_l(\cos\theta)$$

dove $P_l(\cos\theta)$ sono i polinomi di Legendre. Per lo stato iniziale

$$u_i(r,\theta) = e^{ikr\cos\theta} = \sum_l\ i^l\ (2l+1)\ j_l(kr)\ P_l(\cos\theta) \qquad\qquad l = 0,1,2\ldots$$

le funzioni radiali che esprimono la dipendenza dalla distanza r sono le funzioni sferiche di Bessel che hanno come andamento asintotico, la forma di onde sferiche

$$\lim_{kr\gg l}\ j_l(kr) = \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr}$$

Quindi lo stato iniziale è rappresentato dalla sovrapposizione di due onde sferiche una convergente verso il centro di massa e l'altra divergente dal centro di massa

$$\lim_{r\to\infty} u_i(r,\theta) = \frac{i}{2k}\sum_l(2l+1)\left[(-1)^l\ \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\right]P_l(\cos\theta)$$

Analogamente rappresentiamo lo stato finale come sovrapposizione di onde sferiche

$$u_f(r,\theta) = u_i(r,\theta) + f(\theta)\ \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\left[(-1)^l\ \frac{e^{-ikr}}{r} - a_l\ \frac{e^{ikr}}{r}\right] P_l(\cos\theta)$$

dove le ampiezze a_l rappresentano l'azione del potenziale sulla componente l dell'onda sferica divergente. L'azione del potenziale risulta in uno *sfasamento* e un *assorbimento* dello stato iniziale

$$a_l = \eta_l\ e^{2i\delta_l} \qquad \text{con} \quad \eta_l \quad \delta_l \quad \text{reali} \qquad 0 \le \eta_l \le 1$$

La diffusione dal potenziale è rappresentata dallo stato

$$u_d(r,\theta) = u_f(r,\theta) - u_i(r,\theta) = \frac{i}{2k}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_l (2l+1)(1-a_l)P_l(\cos\theta)$$

con ampiezza di diffusione

$$f(\theta) = \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)(1-a_l)P_l(\cos\theta)$$

Troviamo quindi la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2}\sum_l\sum_{l'}(2l+1)(2l'+1)(1-a_l^*)(1-a_{l'})\ P_l P_{l'}$$

e, usando la proprietà di ortonormalità dei polinomi di Legendre,

$$\int P_l(\cos\theta)P_l'(\cos\theta)\ d\cos\theta d\phi = \frac{4\pi}{2l+1}\ \delta_{ll'}$$

troviamo la *sezione d'urto di diffusione*

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega}\ d\cos\theta d\phi = \frac{1}{4k^2}\sum_l\sum_{l'}(2l+1)(2l'+1)(1-a_l^*)(1-a_{l'})\ \frac{4\pi}{2l+1}\ \delta_{ll'}$$

$$\sigma_d = \frac{\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\sum_l (2l+1)|1-a_l|^2$$

1.8.4 Sezione d'urto elastica e di reazione

La diffusione *elastica* è caratterizzata da $\eta_l = 1$

$$1 - a_l = 1 - e^{2i\delta_l} = e^{i\delta_l}\ (e^{-i\delta_l} - e^{i\delta_l}) = -2i\ e^{i\delta_l}\ \sin\delta_l$$

In questo caso l'azione del potenziale non cambia l'ampiezza ma cambia solo la fase dell'onda diffusa. La *sezione d'urto elastica*

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l$$

è la somma, pesata per il fattore di molteplicità $2l+1$, dei contributi dei diversi valori del momento angolare relativo delle particelle m_1, m_2. Quando la fase della singola componente è $\delta_l = \pi/2$, l'ampiezza di diffusione $f_l(\theta)$ è puramente immaginaria e la sezione d'urto σ_l ha il valore massimo. Questa è chiamata *condizione di risonanza* per l'onda parziale l.

Se $\eta_l < 1$ la diffusione è *inelastica* perché parte del flusso incidente è assorbito dal bersaglio. Il flusso assorbito dell'onda parziale l è pari a $\Phi_i\ (1-|a_l|^2)$ e la *sezione d'urto di assorbimento* o *sezione d'urto di reazione*

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\sum_l (2l+1)(1-|\eta_l|^2)$$

rappresenta i processi in cui una o entrambe le particelle cambiano natura nello stato finale.

Si può avere diffusione elastica senza altri processi: se $\eta_l = 1$ si ha $\sigma_{abs} = 0$. Ma *non* si può avere diffusione inelastica senza avere *anche* diffusione elastica: come in ottica, un bersaglio che assorbe l'onda incidente produce anche diffrazione. L'ampiezza di diffusione dell'onda parziale l può essere puramente immaginaria, ma, se ha una parte reale, ha anche una parte immaginaria.

La *sezione d'urto totale* è data dal contributo di diffusione elastica e di assorbimento

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{abs} = \frac{\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\sum_l (2l+1)\left[(1-2\Re a_l + |a_l|^2) + (1-|a_l|^2)\right]$$

$$\sigma_{tot} = \frac{2\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\sum_l (2l+1)(1-\Re a_l)$$

Da queste considerazioni ricaviamo due importanti conclusioni

- La sezione d'urto di un processo, nello stato di momento angolare l, non può superare il valore che corrisponde al massimo della probabilità di diffusione

  $$\sigma_l \leq \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\ (2l+1)$$

  detto anche *limite di unitarietà*.

- L'ampiezza di diffusione ha una parte immaginaria, legata alla diffusione elastica, e una parte reale

  $$f(\theta) = \frac{\hbar}{2p_{cm}}\sum_l (2l+1)[i(1-\Re a_l) + \Im a_l]\ P_l(\cos\theta)$$

  La parte immaginaria dell'ampiezza di diffusione *in avanti*, cioè per $\theta \to 0$, $P_l(\cos\theta) \to 1$,

  $$\lim_{\theta\to 0}\ \Im f(\theta) = \frac{\hbar}{2p_{cm}}\sum_l (2l+1)(1-\Re a_l)$$

è proporzionale alla sezione d'urto totale

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\hbar}{p_{cm}} \Im f(\theta = 0)$$

Questa relazione, dedotta da Bohr e Peierls, è chiamata *teorema ottico*.

1.8.5 Diffusione da un disco

Consideriamo la diffusione di un'onda piana da un disco di raggio R normale alla direzione di propagazione z e facciamo l'ipotesi che R rappresenti l'estensione di un nucleo, $R \approx 10^{-13}\ cm$. L'asse z passante per il centro del disco è un asse di simmetria del processo di diffusione. Osserviamo lo stato finale rappresentato dall'onda diffusa a distanza $r \gg R$ e angolo polare θ. Il momento angolare è

$$l = \frac{|\vec{r} \wedge \vec{p}|}{\hbar} = rk \sin\theta = kb$$

dove b è il parametro d'urto.

- A bassa energia, se $p_{cm} \ll \hbar/R = 200\ MeV/c$, il contributo dominante è dovuto alla diffusione nello stato di momento angolare $l = 0$ (*onda S*). Torneremo su questo più avanti.
- A energia elevata, $p_{cm} \gg 200\ MeV/c$, vi è invece il contributo di molti stati di momento angolare, $l = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ l_{max} = kR$. Nel seguito consideriamo il caso di alta energia che, come abbiamo visto, è interessante per studiare la struttura di una particella di dimensione R.

Se il disco è completamete assorbente, *disco nero*, si ha $\eta_l = 0$ per ogni stato di momento angolare e la sezione d'urto di diffusione elastica e la sezione d'urto di assorbimento sono uguali

$$\sigma_{el} = \sigma_{abs} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1)$$

Il contributo di ogni onda parziale è uguale all'area della corona circolare con raggio pari al parametro d'urto, $b = l/k$, (Fig.1.59)

$$\Delta\sigma_l = \pi(b + \Delta b)^2 - \pi b^2 = \frac{\pi}{k^2} \left[(l + 1)^2 - l^2\right] = \frac{\pi}{k^2} \ (2l + 1)$$

e la sezione d'urto si ottiene sommando su tutti i possibili valori di l

$$\sigma_{el} + \sigma_{abs} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l + 1) = \frac{2\pi}{k^2} \ (l_{max} + 1)^2 = 2\pi(R + \lambda)^2 \qquad \lambda = \frac{1}{k}$$

- se $R \ll \lambda$, $\sigma_{tot} = 2\pi\lambda^2$, la sezione d'urto totale è definita dalla lunghezza d'onda di De Broglie nel riferimento del centro di massa;

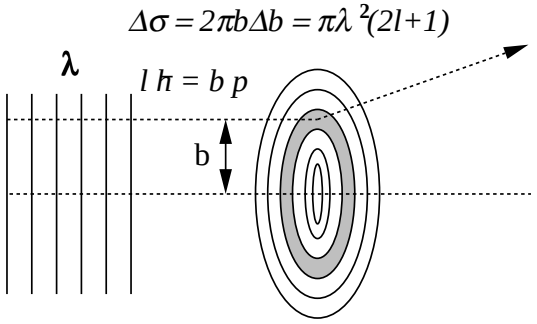


Figure 1.59: Diffusione da un disco assorbente

- se $R \gg \lambda$, $\sigma_{tot} = 2\pi R^2$, la sezione d'urto totale è pari al doppio dell'area del disco.

Quindi, nel caso di diffusione da un disco nero a energia elevata, la sezione d'urto di assorbimento è pari all'area del disco, mentre la sezione d'urto totale è pari al *doppio* dell'area del disco. Questo è dovuto all'interfenza tra l'onda piana incidente e l'onda diffusa che deve essere tale da annullare l'ampiezza di diffusione in avanti nella *zona d'ombra* del disco.

In ottica, quando la lunghezza d'onda è molto minore delle dimensioni di un ostacolo, $\lambda = \hbar/p \ll R$, a distanza $r \gg R$ si osserva la *diffrazione di Fraunhofer* che ha le seguenti caratteristiche

- l'intensità della luce diffusa è concentrata ad angoli piccoli, $\theta < \lambda/R$;
- si osservano minimi e massimi dell'intensità;
- l'ampiezza dell'onda diffusa è proporzionale alla trasformata di Fourier della densità superficiale dell'ostacolo.

Nel caso della diffusione per interazione nucleare, lo stato iniziale e lo stato finale a distanza $r \gg R$ sono approssimati con stati di particella libera, analoghi ai *raggi di luce* in ottica, ed è quindi interessante esaminare le previsioni di un modello basato sull'analogia tra la diffusione della luce da un disco assorbente e l'interazione nucleare tra particelle.

Se $l \gg 1$ possiamo sostituire la somma sugli stati discreti con un integrale sul parametro d'urto e i polinomi di Legendre con le funzioni di Bessel

$$\sum_{l=0}^{l_{max}} \to \int_o^{kR} dkb \qquad\qquad P_l(\cos\theta) \to J_o(l\theta)$$

Se siamo interessati alla diffusione ad angoli piccoli, l'ampiezza di diffusione in funzione della componente trasversa dell'impulso nel centro di massa, $q = k\sin\theta \approx k\theta = l\theta/b$, è

$$f(\vec{q}) = \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\ (1-a_l)P_l(\cos\theta) \to \frac{i}{2k}\int (2kb+1)[1-a(b)]J_o(qb)\ dkb$$

Usando la rappresentazione della funzione di Bessel $J_o(x)$, con $x = qb = k\theta r$,

$$J_o(x) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} e^{ix\cos\phi}\, d\phi$$

l'ampiezza di diffusione diventa un integrale sul vettore parametro d'urto, $d\vec{b} = bdbd\phi$,

$$f(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{b}}\, [1 - a(\vec{b})]\, d\vec{b}$$

dove $[1-a(\vec{b})]$ è l'ampiezza dell'onda diffusa ad angolo polare θ dai punti del disco con parametro d'urto nell'intervallo $b \div b + db$. L'ampiezza di diffusione è la trasformata di Fourier in due dimensioni della *funzione di profilo* del disco, $\Gamma(\vec{b}) = 1 - a(\vec{b})$.

Se il disco è completamente assorbente, $\Gamma(\vec{b}) = costante = 1$, si ha

$$f(\vec{q}) = ik \int_o^{k\theta R} \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} e^{ix\cos\phi}\, d\phi\, \frac{xdx}{(k\theta)^2} = \frac{ik}{k^2\theta^2} \int_o^{k\theta R} xJ_o(x)dx$$

e, tenendo conto della proprietà delle funzioni di Bessel, $\int x'^n J_{n-1}(x')dx' = x^n J_n(x)$, troviamo

$$f(\vec{q}) = ikR^2\, \frac{J_1(k\theta R)}{k\theta R}$$

Quindi la diffusione da un disco completamente assorbente è caratterizzata da

- l'ampiezza di diffusione è puramente immaginaria;
- la sezione d'urto di diffusione elastica

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q})|^2 = k^2R^4 \left[\frac{J_1(k\theta R)}{k\theta R}\right]^2$$

  è una funzione oscillante con il primo minimo per $\theta = 3.84/kR$;
- la sezione d'urto di diffusione elastica è pari alla sezione geometrica del disco

$$\sigma_{el} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega = \pi R^2$$

- il limite per $q \to 0$ dell'ampiezza di diffusione è

$$\lim_{x\to 0}\ J_1(x) = \frac{x}{2} \qquad\qquad \lim_{q\to 0}\ f(\vec{q}) = \frac{ikR^2}{2}$$

- la sezione d'urto totale è pari al doppio della sezione geometrica del disco

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k}\, \Im f(\vec{q} = 0) = \frac{4\pi}{k}\, \frac{kR^2}{2} = 2\pi R^2$$

1.8.6 Sezione d'urto protone-protone

Le previsoni del *modello ottico* riproducono qualitativamente i risultati della diffusione a energia elevata di protoni e neutroni da nuclei con peso atomico A grande. Nel caso della diffusione protone-protone (neutrone-protone o antiprotone-protone) la previsione $\sigma_{el}/\sigma_{tot} = 1/2$ non è confermata dai risultati sperimentali. Questo non è sorprendente perché nel capitolo ??? abbiamo notato che i risultati di esperimenti di diffusione di elettroni da protoni e neutroni indicano che la distribuzione di carica elettrica e di magnetizzazione non è uniforme. Supponiamo che la funzione di profilo sia una distribuzione gaussiana

$$\Gamma(\vec{b}) = \ e^{-b^2/R^2} \qquad\qquad \int \Gamma(\vec{b}) d\vec{b} = \pi R^2$$

In questo caso l'ampiezza di diffusione è

$$f(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{b}}\ e^{-b^2/R^2}\ d\vec{b} = \frac{ik}{2}\ R^2\ e^{-q^2R^2/4}$$

e la sezione d'urto di diffusione elastica è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q})|^2 = \frac{k^2R^4}{4}\ e^{-q^2R^2/2}$$

Questa si può esprimere in funzione del quadrato del 4-impulso trasferito

$$t = -4(p_{cm}c)^2 \sin^2\theta/2 \approx -(\hbar c)^2 k^2\theta^2 \qquad\qquad d\Omega \approx 2\pi\theta d\theta = \frac{\pi}{(\hbar c)^2k^2}\ dt$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{d\Omega}\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{p_{cm}^2R^4}{4\hbar^2}\ e^{(R/\hbar c)^2 t/2}$$

Da queste relazioni otteniamo la sezione d'urto di diffusione elastica e la sezione d'urto totale

$$\sigma_{el} = \int \frac{d\sigma}{dt}\ dt = \frac{\pi R^2}{2} \qquad\qquad \sigma_{tot} = \frac{4\pi}{p_{cm}}\ \frac{p_{cm}R^2}{2} = 2\pi R^2$$

Quindi per valutare il parametro R della funzione di profilo, cioè il *raggio medio del protone* in interazioni nucleari ad alta energia, possiamo fare *due misure indipendenti*

- misurare l'andamento della sezione d'urto elastica in funzione del 4-impulso trasferito, $d\sigma/dt$ (Fig.1.60). I risultati mostrano che, per piccoli valori dell'angolo di diffusione, $t \to 0$, la sezione d'urto ha un andamento esponenziale e che il parametro $(R/\hbar c)^2/2$ è approssimativamente indipendente dall'energia

$$\frac{(R/\hbar c)^2}{2} \approx 10\ GeV^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad R \approx 0.9\ 10^{-13}\ cm$$

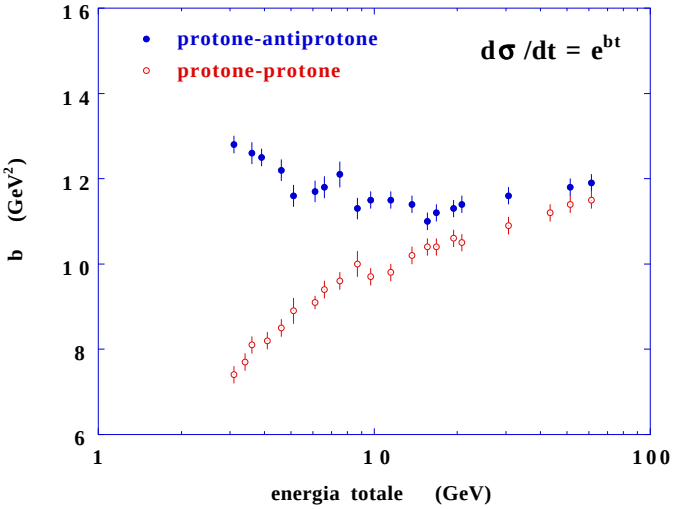


Figure 1.60: Dipendenza da t della sezione d'urto elastica in funzione dell'energia nel centro di massa.

- misurare la sezione d'urto totale, σ_{tot} (Fig.1.61). I risultati mostrano che, per $p_{cm} \gg M_p c$, la sezione d'urto totale è approssimativamente indipendente dall'energia

$$\sigma_{tot} = 2\pi R^2 \approx 40\ mb \qquad \Rightarrow \qquad R \approx 0.8\ 10^{-13}\ cm$$

- inoltre il confronto tra i risultati dell'estrapolazione per $t \to 0$ della misura della sezione d'urto di diffusione elastica e i risultati della misura della sezione d'urto totale confermano la validità del teorema ottico.

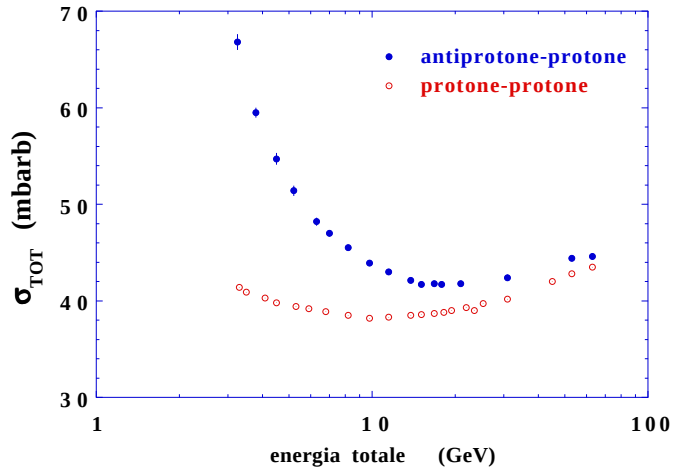


Figure 1.61: Sezione d'urto totale in funzione dell'energia nel centro di massa.

Da questi risultati possiamo concludere che la *distribuzione di materia nucleare* nel protone, misurata in esperimenti di diffusione protone-protone, neutrone-protone e

antiprotone-protone, è consistente con la *distribuzione di carica elettrica e di magnetizzazione* misurata in esperimenti di diffusione elettrone-protone.

1.8.7 Diffusione elastica risonante

La diffusione elastica di due particelle può avvenire con la *formazione di uno stato risonante*

$$m_1 + m_2 \to M \to m_1 + m_2$$

La massa dello stato intermedio M è pari all'energia totale nel centro di massa. Se le particelle m_1, m_2 hanno spin 0, lo spin dello stato M è pari al valore del momento angolare l.

Nel caso di diffusione elastica, $\eta_l = 1$, $a_l = e^{2i\delta_l}$, l'ampiezza di diffusione

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta)$$

è la somma pesata per il fattore di molteplicità, $2l+1$, e per il coefficiente che esprime la distribuzione angolare, $P_l(\cos\theta)$, delle ampiezze delle onde parziali

$$f_l = e^{i\delta_l}\sin\delta_l = \frac{\sin\delta_l}{\cos\delta_l - i\ \sin\delta_l} = \frac{1}{\cot\delta_l - i}$$

che hanno il valore massimo quando lo sfasamento è $\delta_l = \pi/2$. Se E_r è il valore dell'energia nel centro di massa per cui si ha formazione dello stato intermedio, $E_r = Mc^2$, per $E \approx E_r$ si ha

$$\cot\delta_l(E) = \cot\delta_l(E_r) + \left[\frac{d}{dE}\cot\delta_l(E)\right]_{E_r}(E - E_r) + \ldots$$

Il primo termine dello sviluppo è nullo perché $\delta_l(E_r) = \pi/2$. Se definiamo la *larghezza dello stato* Γ

$$\frac{2}{\Gamma} = \left[\frac{d}{dE}\cot\delta_l(E)\right]_{E_r}$$

otteniamo la dipendenza dall'energia dell'ampiezza di diffusione dell'onda parziale l

$$f_l(E) \approx \frac{\Gamma/2}{E - E_r - i\Gamma/2}$$

La sezione d'urto elastica per $E \approx E_r$ è

$$\sigma_l(E) \approx \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\ (2l+1)\ \frac{(\Gamma/2)^2}{(E-E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

in cui compare la funzione lorentziana dell'oscillatore armonico che ha frequenza propria E_r, coefficiente di smorzamento $\Gamma/2$ ed è eccitato alla frequenza E.

La formula che esprime la sezione d'urto di formazione di uno *stato risonante* di massa M e spin l è detta *formula di Breit e Wigner*. La sezione d'urto ha il massimo per $E = E_r$

$$\sigma_{max} = \sigma_l(E_r) = \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\ (2l+1)$$

e per valori dell'energia $E = E_r \pm \Gamma/2$ la sezione d'urto ha valore $\sigma_l(E_r \pm \Gamma/2) = \sigma_l(E_r)/2$. La differenza tra questi due valori è la larghezza dello stato $\Delta E = \Gamma$. La *vita media* dello stato risonante è (appendice 4.14)

$$\tau = \hbar/\Gamma$$

Le considerazioni fatte sono valide per interazione di particelle di spin 0. Se le particelle hanno spin $\neq 0$, la sezione d'urto di Breit e Wigner va modificata per tener conto del peso statistico degli stati di spin. Se $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, sono gli spin delle particelle m_1 e m_2 e queste sono in uno stato di momento angolare relativo $\vec{l}$, la sezione d'urto di formazione dello stato risonante di massa M e spin J ($\vec{J} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{l}$) nella diffusione elastica $m_1 + m_2 \to M \to m_1 + m_2$ è

$$\sigma_J(E) = \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\ \frac{2J+1}{(2s_1+1)(2s_2+1)}\ \frac{(\Gamma/2)^2}{(E-M)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

Per $E = Mc^2$ l'impulso nel centro di massa è (appendice 4.6)

$$p_{cm} = \frac{[(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2]^{1/2}}{2M}$$

Chapter 2

Fisica nucleare

2.1 Proprietà dei nuclei

L'interpretazione degli spettri di emissione degli atomi e dell'esperimento di Rutherford sono alla base del modello atomico di Bohr-Sommerfeld

- l'atomo è costituito di un nucleo di carica $+Ze$;
- Z elettroni di carica $-e$ sono legati al nucleo dal potenziale coulombiano $Ze^2/4\pi\epsilon_o r$;
- la massa del nucleo è molto maggiore della massa dell'elettrone;
- la carica elettrica del nucleo è concentrata in una regione di spazio di dimensioni molto più piccole delle dimensioni dell'atomo.

Le grandezze che caratterizzano i nuclei atomici e che danno informazioni sulla loro struttura sono

- la massa, il raggio, lo spin;
- la carica elettrica, il momento di dipolo magnetico, il momento di quadrupolo elettrico, ...

I nuclei sono degli stati legati con una struttura non elementare e l'interazione nucleare tra i costituenti ha caratteristiche (intensità, raggio d'azione, ...) molto diverse dall'interazione elettromagnetica.

I nuclei sono indicati con il simbolo dell'elemento, X, il *numero atomico*, Z, e il *peso atomico*, A,

$$^{A}_{Z}X$$

Il numero atomico indica la *carica elettrica* del nucleo, il peso atomico indica il numero di *nucleoni* (protoni e neutroni) costituenti il nucleo. Nel piano delle variabili $Z - A$ i nuclei stabili sono concentrati in una stretta banda, detta *banda di stabilità* (Fig.2.1), che indica una forte correlazione tra la carica elettrica e il numero di

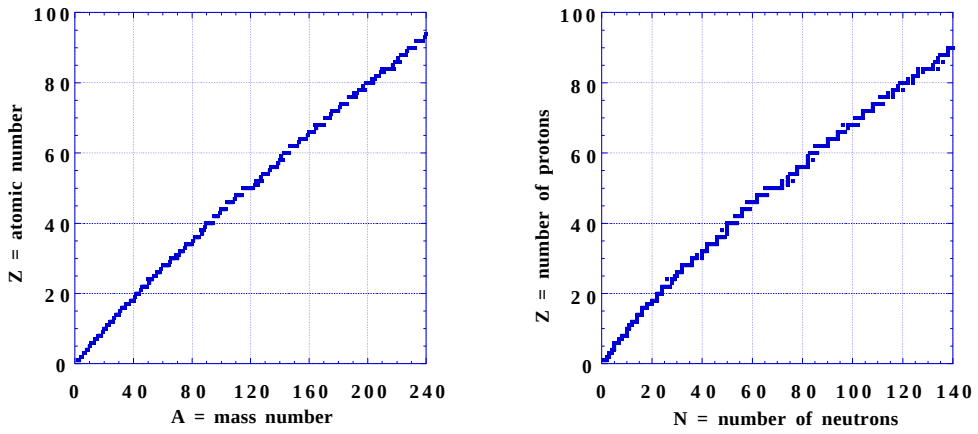


Figure 2.1: Banda di stabilità dei nuclei

costituenti. I nuclei con lo stesso valore di Z e diverso valore di A hanno le stesse proprietà atomiche e sono chiamati *isotopi* (perché occupano la stessa posizione nella tavola di Mendeleev). Nuclei con lo stesso valore di A e diverso valore di Z sono chiamati *isobari* (perché hanno massa approssimativamente uguale).

2.1.1 Carica elettrica dei nuclei

La carica elettrica dei nuclei è stata misurata studiando gli spettri di emissione dei raggi X degli elettroni negli orbitali K che non risentono dell'effetto di schermo da parte degli orbitali più esterni. Nel 1913 Moseley stabilì una relazione tra la frequenza dei raggi X e il numero atomico degli elementi e mise in ordine nella tavola di Mendeleev tutti gli elementi allora noti

$$\textit{legge di Moseley} \qquad h\nu = \frac{3}{4}\, Ry\, (Z-1)^2$$

($Ry = m_e c^2 \alpha^2/2 = 13.6\ eV$ è l'energia di Rydberg) dimostrando che la carica nucleare è un multiplo intero della carica elementare e.

2.1.2 Massa dei nuclei

La massa dei nuclei è determinata misurando la traiettoria di ioni in campi elettrici e magnetici. Il metodo di misura è essenzialmente quello usato nell'esperimento di

Thomson (capitolo ???). Lo *spettrometro di massa* messo a punto da Aston [1] nel 1920 è stato poi perfezionato fino a raggiungere precisione di misura di $\approx 10^{-6}$. Il principio di funzionamento è mostrato nella Fig.2.2. Gli ioni emessi dalla sorgente vengono accelerati da un campo elettrico e immessi nella zona tra due collimatori dove vi sono un campo elettrico e un campo magnetico ortogonali tra loro e ortogonali alla linea di volo in modo da selezionare gli ioni con carica q e velocità v

$$q\ E = q\ v\ B$$

Dopo il secondo collimatore vi è solo il campo magnetico e la traiettoria è un arco di circonferenza di raggio

$$R = \frac{v}{q\ B}\ M$$

Per ridurre gli errori sistematici, le misure si fanno di solito per confronto tra nuclei

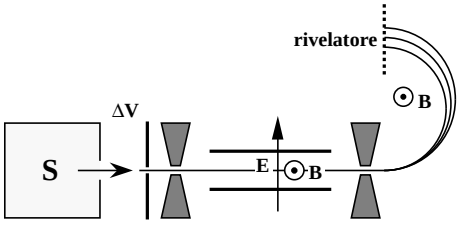


Figure 2.2: Principio di funzionamento dello spettrometro di massa

che hanno differenza di massa molto piccola. Lo spettrometro di massa è anche usato per separare gli isotopi di uno stesso elemento e misurarne l'abbondanza relativa. Il Carbonio, ad esempio, esiste in natura sotto forma di due isotopi con abbondanza relativa

$$^{12}_{6}C \qquad 0.9889 \qquad\qquad ^{13}_{6}C \qquad 0.0111$$

il peso atomico del *carbonio naturale* è il valor medio, $\langle A \rangle = 12.01$

In fisica nucleare si usa come unità di misura la *Atomic Mass Unit*, **u**, definita

$$\textit{massa dell'atomo dell'isotopo } ^{12}_{6}C \equiv 12\ \mathbf{u}$$

In queste unità, la massa dell'atomo di idrogeno è

$$M(^{1}_{1}H) = 1.007825\ \mathbf{u} = 938.783\ MeV/c^2$$

Il fattore di conversione tra le unità di misura è

$$\mathbf{u} = 931.494\ MeV/c^2$$

La tabella mostra il valore della massa atomica, in unità atomiche, e della massa nucleare, in MeV/c^2, per alcuni nuclei leggeri

[1] premio Nobel per la fisica nel 1922

	simbolo	massa atomica (**u**)	massa atomica (MeV/c^2)
	$\frac{1}{12}\,[\,{}^{12}_{6}C\,]$	1	931.494
elettrone	e		0.511
protone	p		938.272
neutrone	n		939.566
idrogeno	${}^{1}_{1}H$	1.007825	938.373
deuterio	${}^{2}_{1}H$	2.014102	1875.613
trizio	${}^{3}_{1}H$	3.016049	2808.921
elio	${}^{4}_{2}He$	4.002603	3727.379

2.1.3 Energia di legame dei nuclei

L'energia di legame (*Binding Energy*) è la differenza tra la massa del nucleo e la somma delle masse dei costituenti che chiameremo *nucleoni* (moltiplicata per c^2)

$$M_{nucleo}c^2 = \sum_{k=1}^{A} m_k c^2 - BE$$

Lo stato legato con massa più piccola è il nucleo di deuterio che è un isotopo dell'idrogeno composto da un protone e un neutrone ($Z = 1$, $A = 2$)

$$\textit{in unità atomiche} \qquad BE = m_p + m_n + m_e - M({}^{2}_{1}H) = 0.002389\ \mathbf{u}$$

$$\textit{in unità nucleari} \qquad BE = m_p + m_n - M({}^{2}_{1}H) = 2.225\ MeV$$

Nel caso dell'atomo di deuterio l'energia di legame atomica è, a parte un piccolo fattore dovuto alla diversa massa ridotta, pari a quella dell'atomo di idrogeno, 13.6 eV, ed è molto più piccola dell'energia di legame del nucleo. In generale il rapporto tra l'energia di legame dei nucleoni nei nuclei è $\approx 10^6$ volte maggiore dell'energia di legame degli elettroni negli atomi. Il nucleo dell'atomo di elio, ${}^{4}_{2}He$, la *particella* α, è in una configurazione particolarmente stabile con energia di legame

$$\textit{in unità atomiche} \qquad BE = 2m_p + 2m_n + 2m_e - M({}^{4}_{2}He) = 0.030379\ \mathbf{u}$$

$$\textit{in unità nucleari} \qquad BE = 2m_p + 2m_n - M({}^{4}_{2}He) = 28.298\ MeV$$

L'energia di legame dei nuclei con A piccolo non è una funzione regolare, ma per $A \geq 12$ (Carbonio) l'energia di legame è con buona approssimazione proporzionale al numero di nucleoni. Quindi l'energia di legame media di un nucleone nel nucleo è approssimativamente costante (Fig.2.3).

$$\frac{BE}{A} \approx costante \approx \frac{8\ MeV}{nucleone}$$

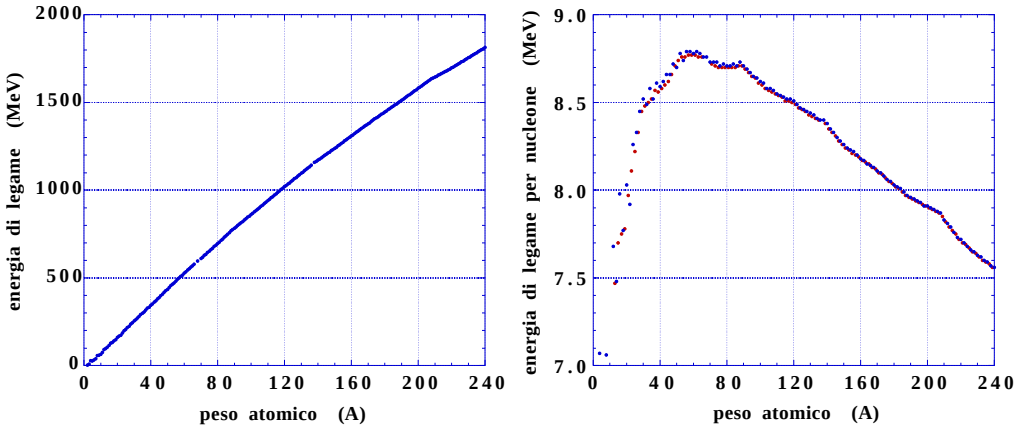


Figure 2.3: Energia di legame dei nuclei stabili in funzione di A

2.1.4 Raggio dei nuclei

Parlare di *raggio dei nuclei* è improprio: occorre fornire una definizione operativa su cosa si misura e il metodo di misura. Informazioni sull'estensione spaziale dei nuclei e sul raggio d'azione dell'interazione nucleare si ottengono con metodi diversi:

- con esperimenti di diffusione (di particelle α, neutroni, protoni, elettroni, ...);
- con misure di spettroscopia dei livelli atomici;
- dall'analisi dell'energia di legame dei nuclei;
- dallo studio dei decadimenti nucleari, ...

La prima evidenza dell'estensione finita dei nuclei è stata ottenuta da Rutherford e Chadwick studiando la diffusione di particelle α. La minima distanza di avvicinamento di una particella con carica elettrica ze e energia cinetica K ad un nucleo di carica Ze (capitolo ??) dipende dall'angolo di diffusione θ ed è inversamente proporzionale a Z e a K. Rutherford e Chadwick misero in evidenza una marcata deviazione dalla sezione d'urto di diffusione coulombiana prevista per una carica puntiforme quando l'impulso trasferito è elevato, cioè quando la minima distanza di avvicinamento è confrontabile con il raggio d'azione delle forze nucleari, R_{nucl},

$$K\ sin\theta/2 > Z\ m_e c^2\ \frac{r_e}{R_{nucl}}$$

Poiché l'energia delle particelle α prodotte nei decadimenti nucleari (capitolo ???) è contenuta in un piccolo intervallo, $K_\alpha = 4 \div 8\ MeV$, questo effetto era misurabile solo con nuclei con Z piccolo. Da queste prime misure si ottenne che R_{nucl} è proporzionale alla radice cubica del peso atomico A

$$R_{nucl} = R_o\ A^{1/3} \qquad\qquad R_o \approx 1.2\ 10^{-13}\ cm$$

Negli anni successivi, usando acceleratori di particelle, fu possibile raggiungere impulsi trasferiti più elevati, $\Delta p > \hbar/R$, e studiare con molto maggior dettaglio la struttura dei nuclei. Le informazioni che si ottengono dipendono dal tipo di particella usata come *sonda*. Particelle α e protoni sono soggetti sia all'interazione coulombiana che all'interazione nucleare. I neutroni sono soggetti alla sola interazione nucleare (l'interazione di dipolo magnetico è trascurabile a bassa energia). Gli elettroni non hanno interazioni nucleari e danno informazioni dettagliate sulla distribuzione di carica e di magnetizzazione dei nuclei.

I risultati di esperimenti di diffusione di neutroni sono interpretati sulla base dello sviluppo dell'ampiezza di diffusione in onde parziali (capitolo ???). Perché la sezione d'urto sia sensibile all'estensione del nucleo bersaglio, l'impulso nel centro di massa neutrone-nucleo deve essere $p_{cm} > \hbar/R \approx 100\ MeV/c$ che corrisponde a energia cinetica nel laboratorio $K_n > 10\ MeV$. La sezione d'urto di diffusione elastica è una funzione oscillante [2] che dipende dal raggio del nucleo, R,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^2 R^4 \left(\frac{J_1(kRsin\theta)}{kRsin\theta} \right)^2 \qquad\qquad p_{cm} = \hbar k$$

e quindi la posizione dei minimi e massimi dipende da R. La sezione d'urto di reazione e la sezione d'urto totale dipendono dal quadrato del raggio del nucleo

$$\sigma_{abs} \simeq \pi R^2 \qquad\qquad \sigma_{tot} \simeq 2\pi R^2$$

Le misure della sezione d'urto differenziale e della sezione d'urto di reazione di neutroni non dipendono dalle proprietà elettromagnetiche del nucleo e forniscono risultati sul raggio quadratico medio della *distribuzione di materia nucleare* nel nucleo.

Con esperimenti di diffusione di elettroni di alta energia, $E_e = 100 \div 1000\ MeV$, si misurano i fattori di forma elettromagnetici dei nuclei (capitolo ???) e da questi si estrae la densità di carica elettrica $\rho(r)$ e di magnetizzazione $\vec{M}(r)$. La sezione d'urto di diffusione elastica in funzione dell'impulso trasferito è rapidamente decrescente e mostra le oscillazioni tipiche prodotte da una distribuzione di carica uniforme in una sfera di raggio R. Una parametrizzazione più accurata si ottiene con una distribuzione del tipo

$$\rho(r) = \frac{\rho_o}{1 + e^{(r-R)/t}}$$

[2] $J_1(x)$ è la funzione di Bessel di prima specie

detta *distribuzione di Woods-Saxon*, dove R è il valore del raggio per cui $\rho(r) = \rho_o/2$ e t misura lo spessore (*thickness*) della regione esterna del nucleo in cui la densità di carica diminuisce rapidamente da $\rho \approx \rho_{max}$ a zero.

Un altro metodo indipendente per determinare il raggio quadratico medio della distribuzione di carica elettrica si basa sulla misura dell'energia elettrostatica dei nuclei isobari (capitolo ???).

Un terzo metodo si basa sulla misura dello spettro di raggi X degli elettroni atomici. Gli orbitali atomici più interni sono infatti infuenzati dalle dimensioni finite del nucleo. L'interpretazione dei risultati dipende dalla parametrizzazione degli stati elettronici che, in un sistema atomico a molti elettroni, è nota solo in modo approssimato. Un metodo di analisi spettroscopica più sicuro si può applicare agli *atomi $\mu-$mesici*. Il *mesone* μ (capitolo ???) è una particella che ha caratteristiche simili a quelle dell'elettrone e massa molto maggiore, $m_\mu = 105.66\ MeV/c^2 = 207\ m_e$. Esiste in due stati di carica, μ^+ e μ^- e decade con vita media $\tau_\mu = 2.2\ 10^{-6}\ s$. I mesoni μ^- possono essere catturati dai nuclei atomici e l'atomo decade con tempi $\tau_d \ll \tau_\mu$ nello stato fondamentale in cui il raggio dell'orbita di Bohr è molto minore che nel caso degli elettroni $a_\mu \approx a_{Bohr}/207 = 2.6\ 10^{-11}\ cm$. Quindi i livelli di energia degli atomi $\mu-$mesici sono fortemente influenzati dall'estensione della carica nucleare e il confronto tra gli spettri di raggi X emessi da questi atomi e quelli normali fornisce informazioni sul raggio dei nuclei.

Tutti i metodi di misura danno risultati coerenti con piccole variazione dei parametri:

- la distribuzione di materia nucleare è approssimativamente uguale alla distribuzione di carica elettrica;
- le distribuzioni hanno, con buona approssimazione, simmetria sferica;
- le distribuzioni sono approssimativamente uniformi in una sfera di raggio R;
- il raggio quadratico medio delle distribuzioni è proporzionale a $A^{1/3}$ (Fig.2.4)

  $$R = R_o\ A^{1/3} \qquad\qquad R_o = (1.2 \div 1.3)\ 10^{-13}\ cm$$

  e il valore del parametro R_o dipende solo leggermente dal metodo di misura;
- il *volume del nucleo* è proporzionale al numero di nucleoni, $(4\pi/3)R^3 \propto A$.

2.1.5 Statistica e spin dei nuclei

Lo stato di momento angolare, lo spin dei nuclei, è la somma vettoriale dei momenti angolari dei singoli nucleoni, che sono fermioni di spin 1/2, e dei momenti angolari orbitali

$$\vec{I} = \sum_{k=1}^{A}\ \vec{s}_k + \vec{L}_k$$

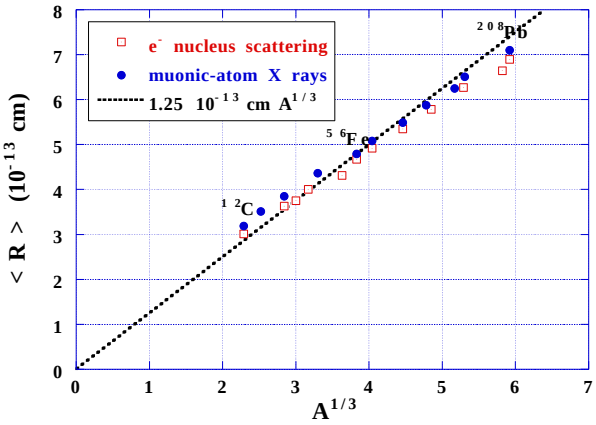


Figure 2.4: Raggio medio dei nuclei in funzione di A

Si possono avere informazioni sullo spin dalle proprietà di simmetria legate alla statistica degli stati. Altre informazioni si ottengono dalla conservazione del momento angolare nelle reazioni nucleari o nei decadimenti dei nuclei, dalla struttura iperfine degli spettri atomici e dalla misura dei momenti magnetici nucleari.

Un interessante esempio di determinazione dello spin del nucleo basata dalle proprietà di simmetria degli stati è lo studio della spettroscopia di molecole biatomiche omonucleari, cioè composte da due nuclei uguali, come N_2, O_2, $F_2, \ldots$. Lo stato della molecola si può fattorizzare

$$|\psi_{molecola}\rangle = |\psi_{el}\rangle \; |\psi_{rot}\rangle \; |\psi_{vibr}\rangle \; |\psi_{nucl}\rangle$$

Gli stati degli elettroni e gli stati vibrazionali sono simmetrici rispetto allo scambio $1 \leftrightarrow 2$ dei nuclei. La simmetria dello stato $|\psi_{rot}\rangle$ è $(-1)^L$ dove L è il momento angolare orbitale del sistema. La simmetria dello stato $|\psi_{nucl}\rangle$ è diversa se lo spin nucleare, I, è intero (bosone) o semi-intero (fermione). Il numero degli stati di spin è

$$N_{spin} = (2I+1)\;(2I+1)$$

- se $I = 0$, vi è un solo stato simmetrico;
- se $I = 1/2$, vi sono 4 stati $|I, I_z\rangle$, uno stato antisimmetrico (singoletto) e 3 stati simmetrici (tripletto)

$$\begin{array}{lll} \textit{singoletto} & |0,\;\; 0\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Uparrow,\Downarrow\rangle - |\Downarrow,\Uparrow\rangle\right) \\ & & \\ & |1,-1\rangle = & |\Downarrow,\Downarrow\rangle \\ \textit{tripletto} & |1,\;\; 0\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Uparrow,\Downarrow\rangle + |\Downarrow,\Uparrow\rangle\right) \\ & |1,+1\rangle = & |\Uparrow,\Uparrow\rangle \end{array}$$

  Ad esempio la molecola di idrogeno si chiama orto-idrogeno nello stato simmetrico e para-idrogeno nello stato antisimmmetrico;

- in generale vi sono

$$\begin{array}{rlcll} 2I+1 & \textit{stati con } I_z \textit{ uguale} & & & \textit{simmetrici} \\ 2I(2I+1) & \textit{stati con } I_z \textit{ diverso} & \textit{di cui} & I(2I+1) & \textit{simmetrici} \\ & & e & I(2I+1) & \textit{antisimmetrici} \end{array}$$

  cioè $(I+1)(2I+1)$ stati simmetrici e $I(2I+1)$ stati antisimmetrici. I pesi statistici degli stati antisimmetrici e simmetrici sono in rapporto

$$\frac{\textit{stati antisimmetrici}}{\textit{stati simmetrici}} = \frac{I}{I+1}$$

L'interazione tra i nuclei della molecola è di tipo coulombiano, dipende solo dalla distanza relativa ed è simmetrica rispetto allo scambio $1 \leftrightarrow 2$: la simmetria dello stato non cambia in una transizione radiativa. Le molecole biatomiche omonucleari non hanno momento di dipolo elettrico e quindi l'emissione e assorbimento di radiazione avviene al secondo ordine dello sviluppo in multipoli con variazione dello stato di momento angolare totale $\Delta J = \pm 2$. Le righe di assorbimento si studiano con la *spettroscopia Raman* [3].

- se I è semi-intero i nuclei sono fermioni, la simmetria di spin nucleare e di momento angolare totale implica

$$\begin{array}{lll} \textit{stato } |\psi_{nucl}\rangle & \textit{simmetrico} & \Leftrightarrow \quad J \textit{ dispari} \\ \textit{stato } |\psi_{nucl}\rangle & \textit{antisimmetrico} & \Leftrightarrow \quad J \textit{ pari} \end{array}$$

  con un rapporto di intensità delle righe di spettroscopia Raman

$$\begin{array}{cccc} & & I=1/2 & I=3/2 \\ \frac{J \textit{ pari}}{J \textit{ dispari}} = \frac{I}{I+1} & & \frac{1}{3} & \frac{3}{5} \end{array}$$

- se I è intero i nuclei sono bosoni e la simmetria di spin nucleare e di momento angolare totale implica

$$\begin{array}{lll} \textit{stato } |\psi_{nucl}\rangle & \textit{antisimmetrico} & \Leftrightarrow \quad J \textit{ dispari} \\ \textit{stato } |\psi_{nucl}\rangle & \textit{simmetrico} & \Leftrightarrow \quad J \textit{ pari} \end{array}$$

  con un rapporto di intensità delle righe di spettroscopia Raman

$$\begin{array}{cccc} & & I=0 & I=1 \\ \frac{J \textit{ dispari}}{J \textit{ pari}} = \frac{I}{I+1} & & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

La Fig.2.5 mostra l'intensità relativa delle righe degli spettri delle molecole di Azoto, Ossigeno e Fluoro. Sulla base di questi argomenti, Rasetti determinò nel 1930 che il nucleo di Azoto ${}^{14}_{7}N$ è un bosone e poi fu dimostrato che ha spin 1. A quel

[3] premio Nobel per la fisica nel 1930

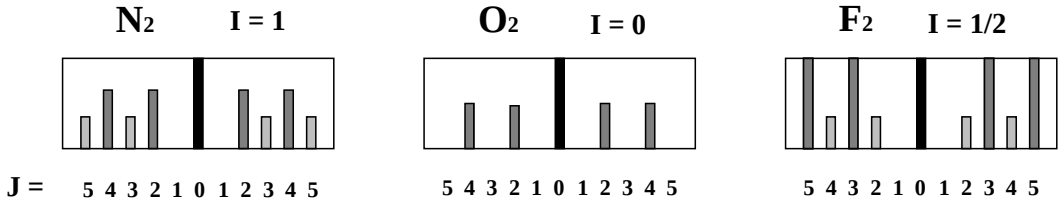


Figure 2.5: Intensità degli spettri Raman di molecole biatomiche

tempo non si conosceva l'esistenza del neutrone e un'ipotesi plausibile era che il nucleo fosse costituito da A protoni e Z elettroni. Questo modello prevede che il nucleo di Azoto sia costituito da un numero dispari di fermioni e che debba quindi avere spin semi-intero in contrasto con l'osservazione. Il modello aveva un secondo problema: se una particella è confinata in una regione di spazio $R \approx 10^{-13}\ cm$, ha impulso $pc \geq \hbar c/R \approx 200\ MeV$, e se la particella è un elettrone, ha energia cinetica $\geq 200\ MeV$. Questo valore è molto maggiore dell'energia di legame media nucleare e quindi un elettrone non può essere confinato in un nucleo. Un altro problema è il piccolo valore del momento magnetico dei nuclei: per una particella di carica q e massa m, questo è proporzionale a $q/2m$ e, se i nuclei contenessero elettroni, il momento magnetico sarebbe molto maggiore di quanto osservato. Queste inconsistenze furono risolte con la scoperta del neutrone.

Se il nucleo è costituito di protoni e neutroni con $\sum protoni + \sum neutroni = A$, i nuclei con A dispari hanno spin semi-intero e sono fermioni, mentre i nuclei con A pari hanno spin intero e sono bosoni. I risultati delle misure di spin nucleare hanno mostrato che questo è sempre vero.

2.1.6 Parità dei nuclei

L'operatore parità è una trasformazione discreta e l'autovalore di un sistema di più particelle è il prodotto degli autovalori delle singole particelle e della parità dovuta al modo relativo. La parità dei nuclei è definita dalla parità intrinseca dei costituenti e dal loro stato di momento angolare. Il protone e il neutrone sono fermioni e l'assegnazione della parità intrinseca è definita positiva per convenzione (come per l'elettrone)

$$P(p) = P(n) = +1$$

quindi la parità di un nucleo è definita dagli stati di momento angolare orbitale dei nucleoni, L_k, che saranno esaminati più avanti sulla base del modello a strati del nucleo (capitolo ???)

$$P(nucleo) = \prod_{k=1}^{A} (-1)^{L_k}$$

Lo stato di un nucleo è indicato di solito dal momento angolare totale, spin del nucleo, e dalla parità con il simbolo

$$I^P \equiv spin^{Parita'}$$

Nel seguito faremo l'ipotesi che la parità si conservi nelle interazioni nucleari, cioè che la hamiltoniana di interazione nucleare sia invariante per trasformazione di parità. Questa ipotesi è stata sempre confermata dai risultati sperimentali. La violazione della simmetria per parità osservata nei decadimenti β dei nuclei non è dovuta all'interazione nucleare ma all'interazione debole.

2.1.7 La scoperta del neutrone

Dopo la scoperta di Rutherford [4] e di Frederick Soddy [5] della *trasformazione artificiale dei nuclei* esposti a particelle α, seguirono numerosi esperimenti per studiare questo fenomeno. Nel 1928 Bothe e Becker osservarono che nella reazione di particelle α, emesse dal Polonio con energia di $\approx 5.4\ MeV$, con nuclei di Berillio venivano prodotti Carbonio e una radiazione non ionizzante, cioè neutra, molto penetrante

$$\alpha + Be \rightarrow C + radiazione\ neutra\ penetrante$$

Nel 1930 Irène Curie e Frédéric Joliot [6] osservarono che questa radiazione neutra, nell'attraversare un assorbitore di materiale idrogenato emetteva protoni con energia cinetica fino a circa 5.3 MeV e interpretarono la radiazione neutra come fotoni che emettono protoni per effetto Compton

$$^4_2He + \ ^9_4Be \rightarrow \ ^{13}_6C + \gamma \qquad\qquad \gamma + p \rightarrow \gamma + p$$

Nel 1931 Chadwick [7] studiò l'effetto della radiazione neutra su Idrogeno e altri nuclei (Elio, Azoto, Ossigeno, ...) determinando la velocità di rinculo dei nuclei da misure di percorso in una camera a ionizzazione. Chadwick osservò che

- per emettere un protone con energia cinetica fino a $K_p = 5.3\ MeV$, $p_p = 100\ MeV/c$, per effetto Compton, i fotoni emessi nella reazione devono avere energia fino a $E_\gamma = 50\ MeV$;
- questo valore di energia è troppo elevato e non è compatibile con la conservazione dell'energia nella reazione

  $$E_\gamma \simeq M_\alpha + M(^9_4Be) - M(^{13}_6C) = 3727.4 + 8392.8 - 12109.6 \approx 11\ MeV$$

- la conservazione dell'energia e dell'impulso è invece assicurata se nella reazione viene prodotta una particella neutra con massa approssimativamente uguale alla massa del protone

  $$^4_2He + \ ^9_4Be \rightarrow \ ^{12}_6C + n$$

  in questo caso infatti: $K_n \simeq M_\alpha + M(^9_4Be) - M(^{12}_6C) - M_n = 3727.4 + 8392.8 - 11174.9 - M_n = 945.3 - M_n$ e il neutrone ha energia cinetica massima $\simeq 6\ MeV$ se $M_n \simeq M_p$.

[4] premio Nobel per la chimica nel 1908
[5] premio Nobel per la chimica nel 1921
[6] premi Nobel per la chimica nel 1935
[7] premio Nobel per la fisica nel 1935

Chadwick determinò la massa del *neutrone* con una precisione del 10%. Misure più precise vennero fatte studiando altri processi di produzione di neutroni in reazione di particelle α con nuclei.

Il nucleo di deuterio, l'isotopo ${}^2_1H$ dell'Idrogeno, è stato scoperto pochi mesi dopo il neutrone da Harold Urey [8] ed è stato interpretato come uno stato legato protone-neutrone. Nel 1934 Chadwick e Goldhaber ossevarono che la *fotodisintegrazione del deutone*

$$\gamma + {}^2_1H \rightarrow p + n$$

non avviene con fotoni di energia $E_\gamma = 1.8\ MeV$, ma è prodotta da fotoni con $E_\gamma = 2.6\ MeV$ e determinarono la massa del neutrone

$$939.1\ MeV/c^2 \leq m_n \leq 939.9\ MeV/c^2$$

I valori attuali della massa e dell'energia di legame del deutone sono

$$\begin{array}{rcc} m_p = & 938.27231 \pm 0.00028 & MeV/c^2 \\ m_n = & 939.56563 \pm 0.00028 & MeV/c^2 \\ m_d = & 1875.61339 \pm 0.00057 & MeV/c^2 \\ BE_d = & 2.224589 \pm 0.00002 & MeV \end{array}$$

2.1.8 Proprietà elettromagnetiche dei nuclei

Le proprietà elettromagnetiche dei nuclei sono descritte dalla densità di carica, $\rho(\vec{r},t)$, e dalla densità di corrente, $\vec{j}(\vec{r},t)$, nella regione di spazio di dimensione R_{nucl}. I nuclei sono soggetti all'azione dei campi elettrici e magnetici prodotti dalle cariche e correnti degli elettroni atomici e di campi esterni prodotti in modo artificiale. La densità di carica e di corrente nucleare hanno come asse di simmetria la direzione dello spin del nucleo, $\vec{I}$. Il campo elettromagnetico prodotto dagli elettroni atomici hanno come asse di simmetria la direzione del momento angolare totale atomico e sono rappresentati dal 4-potenziale $A \equiv (\vec{A}, V/c)$.

La *densità di energia* dell'interazione elettromagnetica del nucleo nel campo esterno è data dal prodotto scalare

$$U = J_{nucl} \cdot A_{ext} = \rho V - \vec{j} \cdot \vec{A}$$

Per gli stati stazionari dei nuclei la 4-densità di corrente $J(\vec{r},t)$ è indipendente dal tempo. La densità di corrente, $\vec{j}(\vec{r})$, ha divergenza nulla e quindi si può rappresentare come il rotore di un vettore $\vec{M}(\vec{r}) \equiv$ *densità di magnetizzazione*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{j} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$$

Le frequenze tipiche del moto degli elettroni atomici, $\hbar\omega_{atom} \approx eV$, sono molto minori di quelle che caratterizzano il moto dei nucleoni, $\hbar\omega_{nucl} \approx MeV$, e quindi

[8] premio Nobel per la chimica nel 1934

possiamo approssimare il potenziale elettromagnetico esterno come indipendente dal tempo.

L'energia di interazione è l'integrale $E = \int U(\vec{r})d\vec{r}$ esteso alla regione di spazio R in cui $\rho(\vec{r}) \neq 0$ e $\vec{j}(\vec{r}) \neq 0$. Il primo termine è l'energia elettrica

$$E^{\mathcal{E}} = \int_R \rho V d\vec{r}$$

L'energia magnetica è

$$E^{\mathcal{M}} = -\int_R (\vec{\nabla} \wedge \vec{M}) \cdot \vec{A}\, d\vec{r} = -\int_R \vec{\nabla} \cdot (\vec{M} \wedge \vec{A})\, d\vec{r} - \int_R \vec{M} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})\, d\vec{r}$$

il primo termine è il flusso del vettore $\vec{M} \wedge \vec{A}$ attraverso una superficie S esterna al nucleo dove $\vec{M} = 0$ e quindi è nullo ($\int_R \vec{\nabla} \cdot (\vec{M} \wedge \vec{A})\, d\vec{r} = \int_S (\vec{M} \wedge \vec{A}) \cdot \hat{n}\, dS = 0$). Il secondo termine è l'integrale del prodotto della densità di magnetizzazione del nucleo $\times$ il campo magnetico esterno. Quindi l'energia di interazione elettromagnetica è

$$E = \int_R \rho(\vec{r})\ V(\vec{r})\ d\vec{r} - \int_R \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r})\ d\vec{r}$$

Poiché le dimensioni R del nucleo sono molto minori di quelle del sistema atomico, i campi elettromagnetici hanno piccole variazioni nella regione di integrazione e possiamo sviluppare in serie l'integrando attorno al punto $r = 0$

$$\begin{aligned} E \quad &= \textstyle\int_R \rho(\vec{r}) \left(V(0) + \sum_i \left[\frac{\partial V}{\partial x_i}\right]_0 x_i + \frac{1}{2}\sum_{ij} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right]_0 x_i x_j + \ldots \right) d\vec{r} \\ &- \textstyle\int_R \vec{M}(\vec{r}) \cdot \left(\vec{B}(0) + \sum_i \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial x_i}\right]_0 x_i + \frac{1}{2}\sum_{ij} \left[\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x_i \partial x_j}\right]_0 x_i x_j + \ldots \right) d\vec{r} = \end{aligned}$$

$$= V(0)\int_R \rho(\vec{r})d\vec{r} + \sum_i \left[\frac{\partial V}{\partial x_i}\right]_0 \int_R \rho(\vec{r}) x_i d\vec{r} + \frac{1}{2}\sum_{ij} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right]_0 \int_R \rho(\vec{r}) x_i x_j d\vec{r} + \ldots$$

$$-\vec{B}(0) \cdot \int_R \vec{M}(\vec{r})d\vec{r} - \sum_i \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial x_i}\right]_0 \cdot \int_R \vec{M}(\vec{r}) x_i d\vec{r} - \frac{1}{2}\sum_{ij} \left[\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x_i \partial x_j}\right]_0 \cdot \int_R \vec{M}(\vec{r}) x_i x_j d\vec{r} + \ldots$$

Lo stato stazionario di un nucleo, $|\psi_N\rangle$, è descritto in termini delle coordinate e degli impulsi dei singoli nucleoni. Gli integrali sono sulle coordinate spaziali $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_A$

$$|\psi_N\rangle = |\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_A\rangle$$

Nel primo termine l'integrale è la carica totale del nucleo

$$\int_R \rho(\vec{r})\ d\vec{r} = \sum_{k=1}^{Z} \langle \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_A | q_k | \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_A \rangle = \sum_{k=1}^{Z} q_k \int |\psi_N|^2 d\vec{r}_1 \ldots d\vec{r}_A = \sum_{k=1}^{Z} q_k = Ze$$

Il secondo termine contiene il momento di dipolo elettrico del nucleo

$$\vec{d} = \int_R \rho(\vec{r})\ \vec{r}\ d\vec{r} = \sum_{k=1}^{Z} \langle \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_A | q_k\ \vec{r}_k | \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_A \rangle$$

Gli stati stazionari dei nuclei hanno parità definita con autovalore ± 1

$$P\ |\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_A\rangle = |-\vec{r}_1, \ldots, -\vec{r}_A\rangle = \pm|\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_A\rangle$$

e l'operatore $\vec{d} = q\vec{r}$ si inverte per trasformazione di parità. Quindi *il momento di dipolo elettrico dei nuclei è nullo* per la simmetria per parità degli autostati nucleari

$$\vec{d} = \sum_{k=1}^{Z}\ q_k \int \vec{r}_k\ |\psi_N|^2\ d\vec{r}_1 \ldots d\vec{r}_A = 0$$

Per gli stessi argomenti, sono nulli tutti i momenti elettrici di $2^\ell - polo$ con ℓ dispari e tutti i momenti magnetici di $2^\ell - polo$ con ℓ pari. Quindi l'energia di interazione diventa

$$E = E_0^{\mathcal{E}} + E_2^{\mathcal{E}} + \ldots + E_1^{\mathcal{M}} + E_3^{\mathcal{M}} + \ldots$$

- il primo termine è l'*energia elettrostatica* del nucleo nel campo esterno

$$E_0^{\mathcal{E}} = ZeV(0)$$

- il secondo termine è l'*energia di dipolo magnetico*

$$E_1^{\mathcal{M}} = -\ \vec{\mu} \cdot \vec{B}(0) \qquad\qquad \vec{\mu} = \langle\psi_N|\vec{M}|\psi_N\rangle$$

- il terzo termine è l'*energia di quadrupolo elettrico*

$$E_2^{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\sum_{ij} Q_{ij} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right]_0 \qquad\qquad Q_{ij} = \sum_{k=1}^{Z} \langle\psi_N|q_k\ x_i x_j|\psi_N\rangle$$

2.1.9 Interazione di dipolo magnetico

Il protone e il neutrone hanno spin $\hbar/2$ e momento magnetico

$$\vec{\mu} = g\ \mu_N\ \vec{s} \qquad\qquad \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.15\ 10^{-8}\ eV/T$$

μ_N è il *magnetone nucleare* e g è il *fattore giromagnetico*. Il momento magnetico nucleare è prodotto dai momenti magnetici dei singoli nucleoni e dal moto orbitale dei protoni ed è parallelo all'asse dello spin nucleare. Il fattore giromagnetico del nucleo, g_I, può essere positivo o negativo

$$\vec{\mu}_N = g_I\ \mu_N\ \vec{I}$$

Misure del momento magnetico dei nuclei si effettuano con diversi metodi basati sull'interazione del momento di dipolo con il campo magnetico atomico o con campi magnetici artificiali.

Struttura iperfina degli spettri atomici

L'energia di interazione con il campo magnetico atomico

$$E_\mu = -\ \vec{\mu} \cdot \vec{B}(0)$$

produce la *struttura iperfina* dei livelli atomici. Il campo magnetico atomico è parallelo al momento angolare totale dell'atomo, $\vec{J}$, e i vettori momento angolare dell'atomo e del nucleo si sommano a formare il momento angolare totale del sistema

$$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J} \qquad\qquad F = |I - J|, \ldots, I + J - 1, I + J$$

La molteplicità dei livelli è il più piccolo tra i valori $2I+1$ e $2J+1$. Se indichiamo con $\vec{B}(0) = f_J \vec{J}$ il campo magnetico nell'origine, l'energia di interazione è proporzionale al prodotto scalare dei vettori momento angolare $\vec{I} \cdot \vec{J}$

$$\vec{F}^2 = \vec{I}^2 + \vec{J}^2 + 2\ \vec{I} \cdot \vec{J} \qquad\qquad \vec{I} \cdot \vec{J} = \frac{\vec{F}^2 - \vec{I}^2 - \vec{J}^2}{2} = \frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2}$$

e l'energia di interazione si esprime

$$E_{IJ} = -\ g_I f_J \mu_N\ \frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2}$$

Se $I \leq J$ la molteplicità delle righe di struttura iperfina, $2I + 1$, misura lo spin del nucleo. Se invece $I > J$, la struttura iperfina è formata da $2J + 1$ livelli e, se J è noto, il valore di I si ottiene con la regola degli intervalli misurando le differenze di energia ΔE_{IJ}. In generale i livelli della struttura iperfine sono equispaziati

$$\Delta E_{IJ} = g_I f_J \mu_N\ (\langle \vec{I} \cdot \vec{J} \rangle_{F+1} - \langle \vec{I} \cdot \vec{J} \rangle_F) = g_I f_J \mu_N\ F$$

con $\Delta E_{IJ} \approx 10^{-6}\ eV$ corrispondente a frequenze $(0.1 \div 1)\ GHz$.

Alcune irregolarità nella distribuzione dei livelli sono dovute all'energia di interazione di quadrupolo elettrico del nucleo che è tipicamente $\approx 10^{-8}\ eV$ corrispondente a frequenze $(1 \div 10)\ MHz$.

Per determinare il momento di dipolo magnetico del nucleo occorre conoscere il campo magnetico $\vec{B}(0)$. Il calcolo del valore di $\vec{B}(0)$ è piuttosto complesso e si hanno buone approssimazioni nel caso di configurazioni semplici come quelle degli atomi alcalini. Nello stato fondamentale $S_{1/2}$ il momento angolare orbitale atomico è nullo e l'autofunzione ha valore $\neq 0$ nell'origine. Il campo magnetico è dovuto al momento magnetico dell'elettrone, $\vec{\mu}_e = 2\mu_B \vec{s}$, che produce una densità di magnetizzazione a simmetria sferica $\vec{M}(r) = |\psi_e(r)|^2 \vec{\mu}_e$. Il campo magnetico nell'origine vale

$$\vec{B}(0) = \frac{2\mu_o}{3}\ |\psi_e(0)|^2\ \vec{\mu}_e$$

Ad esempio, nel caso dell'atomo di idrogeno nello stato $n = 1$, $\ell = 0$

$$\psi_e(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{Z}{a_o}\right)^{3/2} 2e^{-Zr/a_o} \qquad\qquad Z = 1$$

si ha (con $\mu_o = 4\pi\ 10^{-7}\ Hm^{-1}$, $a_o = 0.53\ 10^{-10}\ m$, $\mu_B = 9.3\ 10^{-24}\ J/T$)

$$B(0) = \frac{2\mu_o}{3}\ \frac{\mu_B}{\pi a_o^3} \approx 17\ T$$

Un metodo più accurato per misurare i momenti magnetici nucleari è l'analisi della struttura iperfina prodotta con un campo magnetico esterno. L'energia di interazione ha tre contributi

- l'interazione del momento magnetico nucleare nel campo atomico;
- l'interazione del momento magnetico nucleare nel campo esterno;
- l'interazione dei momenti magnetici degli elettroni nel campo esterno;

$$E = -g_I f_J \mu_N\ \vec{I}\cdot\vec{J} - \vec{\mu}_I\cdot\vec{B}_{ext} + \vec{\mu}_J\cdot\vec{B}_{ext}$$

Nel caso di campo esterno debole, $B_{ext} \ll 10^{-6}\ eV/\mu_B \approx 0.02\ T$, si ha effetto Zeeman in cui F è un buon numero quantico e ciascun livello della struttura iperfina si divide in $2F+1$ livelli equispaziati

$$E = -g_I f_J \mu_N\ \vec{I}\cdot\vec{J} + g_F \mu_B F_z B_{ext}$$

$$g_F = g_J\ \frac{F(F+1)+J(J+1)-I(I+1)}{2F(F+1)} + g_I\ \frac{\mu_N}{\mu_B}\ \frac{F(F+1)-J(J+1)+I(I+1)}{2F(F+1)}$$

dove il secondo termine $\sim \mu_N/\mu_B$ è trascurabile.

Più interessante è il caso di campo esterno forte ($B_{ext} \gg 0.02\ T$) in cui i momenti magnetici interagiscono in modo indipendente col campo esterno (effetto Paschen-Back)

$$E = -g_I f_J \mu_N\ \vec{I}\cdot\vec{J} - g_I \mu_N I_z B_{ext} + g_J \mu_B J_z B_{ext}$$

In questo caso i $2J+1$ livelli elettronici si separano sensibilmente e ciascuno si suddivide in $2I+1$ livelli equispaziati in modo da poter determinare sia il momento angolare I che il momento magnetico $g_I\mu_N$. Un esempio di questo metodo è la misura del momento magnetico del protone.

Metodo della risonanza magnetica con fasci atomici

Questo metodo, introdotto col famoso esperimento di Stern e Gerlach nel 1921, e perfezionato da Rabi [9] nel 1934, utilizza fasci atomici o molecolari. Una sorgente, a temperatura T, emette atomi o molecole con velocità distribuite secondo la funzione di distribuzione di Maxwell e il fascio è collimato con fenditure disposte opportunamente in due regioni in cui vi sono due campi magnetici non omogenei con gradienti uguali e opposti (Fig.2.6). La forza che agisce sul momento di dipolo magnetico

[9] premio Nobel per la fisica nel 1944

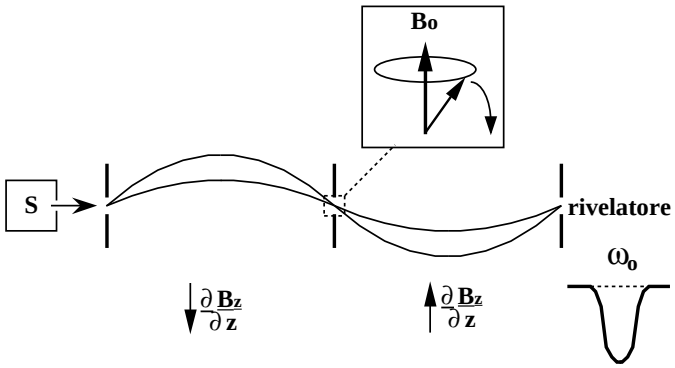


Figure 2.6: Metodo dei fasci molecolari sviluppato da Stern e Rabi

$$E = -g_I \mu_N I_z B \qquad\qquad F_z = -\frac{\partial E}{\partial z} = g_I \mu_N I_z \, \frac{\partial B}{\partial z}$$

separa il fascio in $2I+1$ componenti. Poiché l'effetto dovuto al momento magnetico degli elettroni è molto maggiore, conviene considerare il caso di atomi o molecole con momento angolare totale $J = 0$ in cui la separazione del fascio è dovuta al solo contributo del momento magnetico nucleare. Se il campo magnetico nelle due regioni è indipendente dal tempo, non induce transizioni tra i livelli di energia e gli atomi emessi con velocità opportuna percorrono due traiettorie paraboliche e vengono raccolti dal rivelatore. Se in una regione intermedia vi è un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B}_o \parallel \vec{z}$ i livelli di energia sono

$$E_I = -g_I \mu_N I_z B_o$$

Se in questa regione è anche presente un campo magnetico oscillante a frequenza ω con la componente $B_{xy}(\omega)$ normale alla direzione di B_o, questo induce transizioni tra gli stati quando la frequenza corrisponde alla differenza di energia tra i livelli

$$\hbar\omega^* = \Delta E_I = g_I \mu_N B_o \; \Delta I_z \qquad\qquad \Delta I_z = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

la traiettoria cambia nel secondo magnete e il fascio non è più focalizzato sul rivelatore. La condizione di assorbimento di risonanza si può ottenere variando sia B_o che ω. Il momento magnetico si determina dal rapporto $g_I \mu_N = \hbar\omega^*/B_o$.

Metodo della risonanza magnetica nucleare

Questo metodo sfrutta l'assorbimento risonante di radiazione elettromagnetica in campioni di materiali polarizzati. La magnetizzazione di un campione contenente n nuclei per unità di volume a temperatura T è

$$\langle M \rangle = n\mu \langle cos\theta \rangle = n\mu \; \frac{\int e^{\mu B cos\theta/kT} \; cos\theta \; d\cos\theta}{\int e^{\mu B cos\theta/kT} \; d\cos\theta} = n\mu \; \mathcal{L}(\mu B/kT) \approx n\mu \; \frac{\mu B}{3kT}$$

$\mathcal{L}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} - \frac{1}{z}$ è la funzione di Langevin, $\mathcal{L}(z) \approx z/3$ per $z \ll 1$. A temperatura ambiente con $B = 1\ T$ si ha $\langle cos\theta \rangle \simeq 10^{-6}$, quindi l'effetto è molto piccolo.

La trattazione quantistica della risonanza della magnetizzazione nucleare in un campione di materiale è stata fatta da Bloch che ha mostrato che

- il moto statistico dei singoli atomi con energia $\approx kT$ non diluisce l'effetto;
- i meccanismi di scambio di energia tra i momenti magnetici nucleari e gli atomi del materiale ha tempi di rilassamento molto maggiori dell'inverso della frequenza di risonanza in modo da preservare l'eccesso di popolazione statistica indotto dal campo magnetico esterno.

In queste condizioni l'assorbimento risonante di radiazione elettromagnetica è osservabile. Se indichiamo con $\vec{\mathcal{I}}$ il momento angolare nucleare per unità di volume $[J\ s\ m^{-3}]$

$$\vec{M} = \gamma\ \vec{\mathcal{I}} \qquad \gamma = g_I\ \frac{e}{2m_p} \qquad \frac{e}{2m_p} = 0.48\ rad\ s^{-1}\ T^{-1}$$

l'equazione del moto in un campo magnetico costante è

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma\ \frac{d\vec{\mathcal{I}}}{dt} = \gamma\ \vec{M} \wedge \vec{B} - \frac{\vec{M}}{\tau}$$

dove τ è il tempo di rilassamento. Il metodo della risonanza magnetica nucleare è stato sviluppato da Purcell e da Bloch [10] nel 1946 (Fig.2.7). Si utilizza un campo

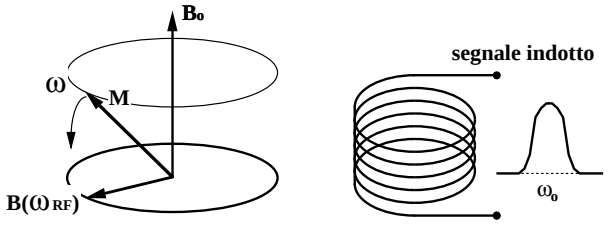


Figure 2.7: Metodo della risonanza magnetica nucleare sviluppato da Bloch e Purcell

magnetico costante elevato, B_z, per polarizzare il campione e un campo alternato con componenti a frequenza angolare ω nel piano normale $B_{xy}(\omega)$. Se è soddisfatta la condizione $\tau \gg 1/\gamma B_z$, il vettore magnetizzazione del campione segue nel piano $x-y$ il campo oscillante e alla frequenza di risonanza, $\omega^* = \gamma B_z$, assorbe energia dal campo $B_{xy}(\omega)$ cambiando la componente lungo l'asse z. La condizione di risonanza è rivelata dalla corrente generata per induzione in una bobina avvolta attorno al campione.

2.1.10 Interazione di quadrupolo elettrico

Se consideriamo un sistema atomico con distribuzione di carica a simmetria assiale attorno alla direzione del mometo angolare $\vec{J} \parallel \hat{z}$, con densità di carica nell'origine in media nulla $\langle \rho_{el}(0) \rangle = 0$, l'equazione del potenziale nella regione occupata dal nucleo, $\nabla^2 V = 0$, implica una relazione di simmetria nel piano $x - y$

$$\sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

[10] premi Nobel per la fisica nel 1952

e l'energia di interazione di quadrupolo elettrico si esprime

$$E_Q = \frac{e}{2}\sum_{ij}\langle\psi_N|x_i x_j|\psi_N\rangle\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = \frac{e}{4}\,\langle\psi_N|\,(-x^2-y^2+2z^2)\,|\psi_N\rangle\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0$$

$$E_Q = \frac{e}{4}\,Q\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 \qquad\qquad Q = \langle\psi_N|\,3z^2-r^2\,|\psi_N\rangle$$

dove x, y, z sono le coordinate nel sistema di riferimento dell'atomo. Se il nucleo ha momento angolare $I = 0$, ha cioè simmetria sferica, il momento di quadrupolo Q è nullo. Se $I \neq 0$, l'asse $\hat{z}' \parallel \vec{I}$ è un asse di simmetria cilindrica del nucleo. Nuclei con momento di quadrupolo $Q > 0$ hanno distribuzione di carica allungata (*prolata*) nella direzione di $\vec{I}$; nuclei con $Q < 0$ hanno distribuzione di carica schiacciata (*oblata*) (Fig.2.8). Il momento di quadrupolo nel riferimento del nucleo si ottiene

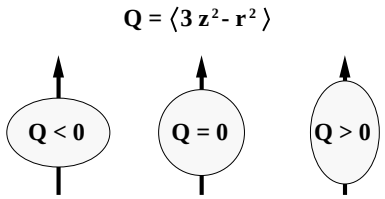


Figure 2.8: Momento di quadrupolo elettrico

con una rotazione nel piano $\hat{z} - \hat{z}'$

$$z' = z\cos\theta + x\sin\theta \qquad x' = -z\sin\theta + x\cos\theta \qquad y' = y$$

Il valor medio $\langle\psi_N|\,3z'^2 - r'^2\,|\psi_N\rangle$ nel riferimento del nucleo è

$$\langle\,3z'^2 - r'^2\,\rangle = \langle\,3(z^2\cos^2\theta + 2xz\sin\theta\cos\theta + x^2\sin^2\theta) - r^2\,\rangle =$$

$$= \langle\,3z^2\cos^2\theta + 3x^2\sin^2\theta - x^2 - y^2 - z^2\,\rangle = \langle\,(3\cos^2\theta - 1)\,(z^2 - x^2)\,\rangle =$$

$$= \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2}\,\langle\,2z^2 - x^2 - y^2\,\rangle = P_2(\cos\theta)\,\langle\,3z^2 - r^2\,\rangle$$

Quindi il momento di quadrupolo elettrico nucleare è

$$Q_N = \langle\psi_N|\,3z'^2 - r'^2\,|\psi_N\rangle = P_2(\cos\theta)\,\langle\psi_N|\,3z^2 - r^2\,|\psi_N\rangle$$

Il polinomio di Legendre $P_2(\cos\theta)$ dipende dalla proiezione dello spin nucleare

$$\cos^2\theta = \frac{I_z^2}{I(I+1)} \qquad\qquad P_2(\cos\theta) = \frac{3I_z^2 - I(I+1)}{2I(I+1)}$$

e quindi

- un nucleo con spin $I = 1/2$, $I_z = \pm 1/2$, ha momento di quadrupolo nullo

$$3I_z^2 - I(I+1) = 0$$

- i nuclei con $I \geq 1$ hanno $2I+1$ stati di energia nel campo elettrico atomico, gli stati con lo stesso valore $|I_z|$ sono degeneri con molteplicità $m = 2$
- ad esempio, un nucleo con $I = 1$ ha due stati di energia

$$\begin{array}{lll} I_z = 0 & P_2(\cos\theta) = -1/2 & m = 1 \\ I_z = \pm 1 & P_2(\cos\theta) = +1/4 & m = 2 \end{array}$$

- anche un nucleo con $I = 3/2$ ha due stati di energia

$$\begin{array}{lll} I_z = \pm 1/2 & P_2(\cos\theta) = -2/5 & m = 2 \\ I_z = \pm 3/2 & P_2(\cos\theta) = +2/5 & m = 2 \end{array}$$

L'energia di interazione di quadrupolo elettrico si misura analizzando i livelli della struttura iperfine. Il momento di quadrupolo elettrico si può determinare se si conosce il potenziale atomico e si sa calcolare il fattore $(\partial^2 V/\partial z^2)_0$.

L'unità di misura del momento di quadrupolo elettrico è $e \times b$ ($b = 10^{-24}\ cm^2$). Poiché i nuclei hanno estensione spaziale $R_{nucl} \approx 10^{-13}\ cm$, i valori tipici del momento di quadrupolo elettrico sono $Q \approx e \times 10^{-2}\ b$.

2.1.11 Momento magnetico del nucleone

Il fattore giromagnetico dell'elettrone, misurato per primo da Kush [11], è noto con grande precisione. L'equazione di Dirac prevede $g = 2$ per un fermione di spin 1/2. L'elettrodinamica quantistica prevede una piccola differenza dal valore $g = 2$ dovuta al contributo delle correzioni radiative (appendice 4.20). La *anomalia* ($a = \frac{g-2}{2}$), è calcolata come sviluppo in serie di potenze della costante di struttura fine

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} = 0.5\ \frac{\alpha}{\pi} - 0.32848 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1.19 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \ldots$$

Gli esperimenti misurano direttamente il fattore a_e, il risultato è

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} = (1\ 159\ 652.4 \pm 0.2)\ 10^{-9}$$

Il protone e il neutrone sono particelle con struttura e il fattore giromagnetico è notevolmente diverso dal valore previsto per un fermione di spin 1/2 puntiforme. Il modello delle interazioni nucleari, la cromodinamica quantistica, non è in grado di fare previsioni a bassa energia, ma gli esperimenti hanno raggiunto una notevole precisione nella misura dei momenti magnetici dei nucleoni.

Il momento magnetico del protone è stato determinato misurando la frequenza delle transizioni tra i livelli della struttura iperfine dell'atomo di idrogeno in campo magnetico elevato (effetto Paschen-Back). In assenza di campo magnetico lo stato fondamentale, $1S_{1/2}$, è diviso in due livelli

$$E_{IJ} = -g_p f_J \mu_N\ \vec{I} \cdot \vec{J} \qquad I = J = 1/2 \qquad F = 0,\ 1$$

[11] premio Nobel per la fisica nel 1955

stato di singoletto	$F = 0$	$\vec{I} \cdot \vec{J} = -3/4$
stato di tripletto	$F = 1$	$\vec{I} \cdot \vec{J} = +1/4$

La differenza di energia è $\Delta E = g_p f_J \mu_N$. Un campo magnetico esterno, $\vec{B}$, rimuove la degenerazione e si hanno quattro livelli (Fig.2.9).

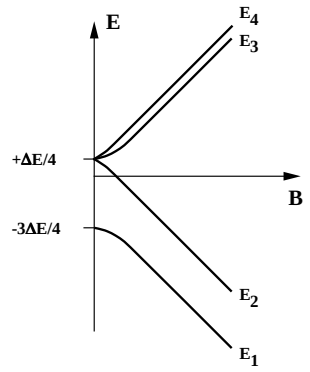


Figure 2.9: Livelli della truttura iperfina dell'atomo di idrogeno in funzione del campo magnetico

$$E_{IJ} = -g_p f_J \mu_N \ \vec{I} \cdot \vec{J} - g_p \mu_N \ \vec{I} \cdot \vec{B} + g_e \mu_B \ \vec{J} \cdot \vec{B}$$

con valori di energia

I_z	J_z	E_{IJ}
$+1/2$	$-1/2$	$E_1 = (-3/4)\ \Delta E - R\ \mu_e\ B - \mu_e\ B$
$-1/2$	$-1/2$	$E_2 = (+1/4)\ \Delta E + R\ \mu_e\ B - \mu_e\ B$
$+1/2$	$+1/2$	$E_3 = (+1/4)\ \Delta E - R\ \mu_e\ B + \mu_e\ B$
$-1/2$	$+1/2$	$E_4 = (+1/4)\ \Delta E + R\ \mu_e\ B + \mu_e\ B$

dove $R = \mu_p/\mu_e \ll 1$. Le frequenze delle transizioni tra i livelli dipendono sia da μ_p che da μ_e e l'ottima precisione con cui è noto μ_e permette una misura precisa di μ_p senza dover fare affidamento su una determinazione molto accurata del campo magnetico esterno. La misura delle frequenze fornisce

$$\begin{aligned} E_4 - E_3 &= 2R\mu_e B \\ E_3 - E_2 &= 2(1-R)\mu_e B \\ E_2 - E_1 &= \Delta E + 2R\mu_e B \end{aligned}$$

da cui si ottengono i valori di ΔE, $R = \mu_p/\mu_e$, e del campo magnetico B. La precisione del valore del momento magnetico, μ_p, dipende solo dalla precisione di misura delle frequenze e del valore del momento magnetico dell'elettrone μ_e

$$\mu_p = +2.7928456 \pm 0.0000011\ \mu_N$$

Il momento magnetico del neutrone è stato determinato misurando, nelle stesse condizioni sperimentali, la frequenza di assorbimento di risonanza di neutroni e

protoni polarizzati. I neutroni sono prodotti da un reattore nucleare e vengono polarizzati attraversando uno spessore di ferro magnetizzato. L'esperimento misura il rapporto μ_n/μ_p: le precisioni con cui sono noti i momenti magnetici di neutrone e protone sono confrontabili. Il momento magnetico del neutrone è negativo, cioè diretto in verso opposto allo spin

$$\mu_n = -1.91304184 \pm 0.00000088 \ \mu_N$$

Il momento magnetico del deutone è stato misurato con il metodo della risonanza magnetica con un fascio di molecole di deuterio D_2. La simmetria degli stati della molecola biatomica e la molteplicità dei livelli in un campo magnetico esterno indicano che il deutone ha spin $I = 1$. La misura del momento magnetico fornisce il valore

$$\mu_d = +0.8574376 \pm 0.0000004 \ \mu_N$$

che è approssimativamente uguale alla somma dei momenti magnetici di protone e neutrone.

Il momento di quadrupolo elettrico del deutone è stato determinato dal confronto degli spettri di struttura iperfina della molecola di deuterio, D_2, e di idrogeno, H_2, tenendo conto che il protone non ha momento di quadrupolo elettrico

$$Q_d = +0.00288 \pm 0.00002 \ b$$

Nella tabella che segue sono riportati i momenti di dipolo magnetico e di quadrupolo elettrico di alcuni nuclei leggeri.

Z	A	nucleo	I^P	μ [μ_N]	Q/e [barn]
0	1	n	$1/2^+$	− 1.913	
1	1	p	$1/2^+$	+ 2.793	
1	2	^2H	1^+	+ 0.857	+ 0.00288
1	3	^3H	$1/2^+$	+ 2.979	
2	3	^3He	$1/2^+$	− 2.127	
3	6	^6Li	1^+	+ 0.822	+ 0.00064
3	7	^7Li	$3/2^-$	+ 3.256	− 0.0366
4	9	^9Be	$3/2^-$	− 1.177	+ 0.02
5	10	^{10}B	3^+	+ 1.800	+ 0.085
5	11	^{11}B	$3/2^-$	+ 2.688	+ 0.036
6	13	^{13}C	$1/2^-$	+ 0.702	
7	14	^{14}N	1^+	+ 0.404	+ 0.02
7	15	^{15}N	$1/2^-$	− 0.283	
8	17	^{17}O	$5/2^+$	− 1.893	− 0.026

2.2 Modelli del nucleo

2.2.1 Modello a gas di Fermi

Il modello di Fermi è un *modello statistico a particelle indipendenti* basato sulle seguenti ipotesi

- il nucleo è costituito di fermioni di spin 1/2: Z protoni e $A - Z$ neutroni;
- il singolo nucleone è soggetto all'azione di tutti gli altri rappresentata da una buca di potenziale $U(r)$ a simmetria sferica che si estende in una regione di dimensione $R = R_o A^{1/3}$;
- il gas di nucleoni è degenere, cioè l'energia cinetica è molto maggiore dell'energia dell'ambiente kT di modo che i nucleoni sono nello stato di energia più bassa accessibile per il principio di esclusione di Pauli.

Sulla base di queste semplici ipotesi, il modello di Fermi fornisce indicazioni sulla densità degli stati (Fig.2.10) e sull'energia cinetica dei nucleoni per i nuclei con A sufficientemente grande da poter utilizzare criteri statistici ($A \geq 12$). Il numero di

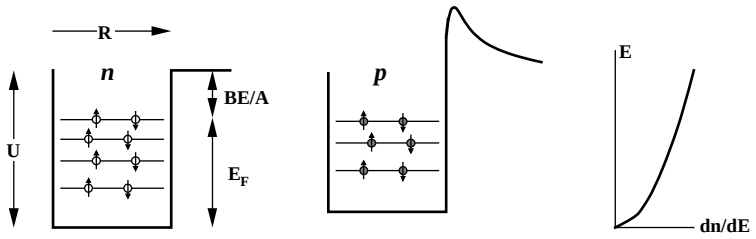


Figure 2.10: Livelli di energia nel modello a gas di Fermi

stati di un fermione di spin 1/2 è $d^6n = 2\ d\vec{r}\ d\vec{p}/(2\pi\hbar)^3$. Integrando in un volume $V = (4\pi/3)R_o^3 A$ e sulle direzioni di $\vec{p}$ si ha

$$dn = \int_V \int_\Omega d^6n = 2\ \frac{4\pi V}{8\pi^3\hbar^3}\ p^2 dp = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{R_o}{\hbar}\right)^3 A p^2 dp$$

La densità degli stati è $dn/dp \propto p^2$, $dn/dE \propto E^{1/2}$. Il valore massimo dell'impulso, l'*impulso di Fermi*, è definito dal numero di nucleoni

$$\int dn_p = \frac{4}{9\pi}\left(\frac{R_o}{\hbar}\right)^3 A p_p^3 = Z \qquad \int dn_n = \frac{4}{9\pi}\left(\frac{R_o}{\hbar}\right)^3 A p_n^3 = A - Z$$

$$p_p c = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{\hbar c}{R_o}\left(\frac{2Z}{A}\right)^{1/3} \qquad p_n c = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{\hbar c}{R_o}\left(\frac{2(A-Z)}{A}\right)^{1/3}$$

dove $[2Z/A]^{1/3}$ e $[2(A-Z)/A]^{1/3}$ sono ≈ 1 e lentamente variabili (Fig.2.1). Se fissiamo $R_o = 1.25\ fm$, per i nuclei leggeri con $Z = A/2$ si ha $p_p = p_n \approx 240\ MeV/c$.

L'energia cinetica corrispondente è chiamata *energia di Fermi*, $E_F \approx 30\ MeV$. Qui e nel seguito usiamo l'approssimazione non relativistica che è sufficientemente accurata. Per i nuclei pesanti l'energia di Fermi dei neutroni è leggermente maggiore di quella dei protoni; ad esempio, per l'uranio ($Z = 92$, $A = 238$) si ha $E_{Fp} = 28\ MeV$, $E_{Fn} = 32\ MeV$. La profondità della buca di potenziale è pari alla somma dell'energia di Fermi e dell'energia di legame per nucleone

$$U = E_F + BE/A \qquad BE/A \approx 8\ MeV/nucleone \qquad U = (35 \div 40)\ MeV$$

Per i protoni, la buca di potenziale è deformata dall'energia elettrostatica che produce una *barriera di potenziale* di altezza

$$U(R) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o R} = \frac{\alpha\hbar c\ Z}{R_o A^{1/3}} \approx 1.2\ MeV\ ZA^{-1/3}$$

e che ha andamento $\sim 1/r$ per $r > R$.

L'energia cinetica media per nucleone è

$$\langle E_c \rangle = \frac{\int (p^2/2m)\ dn}{\int dn} = \frac{1}{A}\ \frac{4}{3\pi}\left(\frac{R_o}{\hbar}\right)^3 A \int \frac{p^4}{2m}\ dp =$$

$$= \frac{4}{3\pi}\left(\frac{R_o}{\hbar}\right)^3 \left(\frac{p_p^5}{10m_p} + \frac{p_n^5}{10m_n}\right) =$$

$$= \frac{4}{3\pi}\left(\frac{R_o}{\hbar c}\right)^3 \frac{1}{10mc^2}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{5/3}\left(\frac{\hbar c}{R_o}\right)^5 \left[\left(\frac{2Z}{A}\right)^{5/3} + \left(\frac{2(A-Z)}{A}\right)^{5/3}\right]$$

approssimando $m_p = m_n$. I nuclei leggeri hanno $2Z \approx A$ mentre i nuclei pesanti hanno un leggero eccesso di neutroni. Ponendo $2Z/A = 1 - x$, $2(A-Z)/A = 1 + x$ e sviluppando in serie nella variabile x

$$(1-x)^{5/3} + (1+x)^{5/3} = 1 - \frac{5x}{3} + \frac{5x^2}{9} + \ldots + 1 + \frac{5x}{3} + \frac{5x^2}{9} + \ldots = 2\left[1 + \frac{5}{9}\left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$\langle E_c \rangle = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3}\left(\frac{\hbar c}{R_o}\right)^2 \frac{3}{10\ mc^2}\left[1 + \frac{5}{9}\ \left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2\right]$$

Per effetto del principio di Pauli l'energia cinetica media è minima per i nuclei con ugual numero di protoni e neutroni

$$A = 2Z \qquad \langle E_c \rangle \approx 20\ MeV \qquad \langle p \rangle \approx 200\ MeV/c$$

e aumenta leggermente per i nuclei con A grande: per ${}^{238}_{92}U$ il fattore correttivo è solo il 3%.

2.2.2 Modello a goccia di liquido

Il modello a goccia è un *modello collettivo* del nucleo che rappresenta con pochi parametri l'energia di legame in analogia con l'energia di una goccia di liquido. Il modello si basa sulle seguenti ipotesi

- l'energia di interazione tra due nucleoni è indipendente dal tipo e numero di nucleoni;
- l'interazione è attrattiva e a breve raggio d'azione, R_{int} (come nel caso delle gocce di liquido in cui le molecole hanno interazioni dipolo-dipolo);
- l'interazione è repulsiva a distanze $r \ll R_{int}$;
- l'energia di legame del nucleo è proporzionale al numero di nucleoni.

Queste ipotesi implicano che le forze nucleari sono *saturate*, cioè che ciascun nucleone è fortemente legato solo a pochi nucleoni. Infatti se indichiamo con $\langle U \rangle$ l'energia di interazione tra due nucleoni, l'energia di legame del nucleo non è data dalla somma su tutte le coppie di nucleoni, $\langle U \times \rangle \; A(A-1)/2 \propto A^2$, ma è la somma sulle coppie di nucleoni *vicini* contenuti entro un volume di interazione V_{int} minore del volume del nucleo V_{nucl}

$$BE = \sum_{r<R_{int}} U = \frac{A(A-1)}{2} \; \frac{V_{int}}{V_{nucl}} \; \langle U \rangle \propto A$$

e questa relazione è soddisfatta se V_{int} è costante e se $V_{nucleo} \propto A$.

Il modello a goccia parte dall'ipotesi che l'energia di legame del nucleo sia essenzialmente *energia potenziale di volume*

$$BE = b_0 \; A + \ldots$$

L'energia di legame è diminuita per un *effetto di superficie* poiché i nucleoni sulla superficie del nucleo hanno un minor numero di nuclei vicini e sono meno legati. La supeficie del volume nucleare è proporzionale a $A^{2/3}$, quindi

$$BE = b_0 \; A - b_1 \; A^{2/3} + \ldots$$

La repulsione coulombiana tra i protoni contribuisce a ridurre l'energia di legame. Le misure dei fattori di forma elettromagnetici mostrano che i nuclei hanno distribuzione di carica approssimativamente uniforme. L'energia elettrostatica di una sfera con densità di carica uniforme, $\rho = 3Ze/4\pi R^3$ per $r \leq R$, è

$$\int_0^R V(r)\rho(r)4\pi r^2 dr = \int_0^R \frac{Ze}{4\pi\epsilon_o r} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{3Ze}{4\pi R^3} \; 4\pi r^2 dr = \frac{3}{5} \; \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_o R}$$

Quindi

$$BE = b_0 \; A - b_1 \; A^{2/3} - b_2 \; \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \ldots$$

L'energia di legame è ulteriormente ridotta del contributo dell'energia cinetica dei nucleoni. Possiamo utilizzare la stima basata sul modello a gas di Fermi che tiene conto degli effetti della statistica dei fermioni e del principio di esclusione di Pauli che favorisce le configurazioni nucleari con numero uguale di protoni e neutroni. L'energia cinetica totale è

$$E_c = A\langle E_c\rangle \approx 20\ MeV\left(A + \frac{5}{9}\ \frac{(A-2Z)^2}{A}\right)$$

Il primo termine, proporzionale a A, si aggiunge al termine di energia di volume e quindi dobbiamo aggiungere il secondo termine

$$BE = b_0\ A - b_1\ A^{2/3} - b_2\ \frac{Z^2}{A^{1/3}} - b_3\ \frac{(A-2Z)^2}{A} + \ldots$$

Se consideriamo i nuclei isobari (A = *costante*), notiamo che la dipendenza dell'energia di legame da Z è una parabola

$$BE = (b_0 - b_3)A - b_1A^{2/3} + 4b_3Z - (b_2\ A^{-1/3} + 4b_3A^{-1})Z^2$$

e questo è ben verificato dai dati sperimentali, ma vi è una differenza sistematica tra le configurazioni con numero di protoni e neutroni pari o dispari. Quindi si introduce nella formula un termine correttivo, $b_4/A^{1/2}$, per tener conto di questo effetto

A	Z	$N = A - Z$				
pari	*pari*	*pari*	$b_4 =$	$+12$	MeV	*piu' stabili*
dispari			$b_4 =$	0		*intermedi*
pari	*dispari*	*dispari*	$b_4 =$	-12	MeV	*meno stabili*

$$BE = b_0\ A - b_1\ A^{2/3} - b_2\ \frac{Z^2}{A^{1/3}} - b_3\ \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm \frac{b_4}{A^{1/2}}$$

Il risultato è la *formula delle masse di Bethe e Weizsäcker* (Fig.2.11) che esprime la massa del nucleo in funzione di A e Z e alcuni parametri

$$M(A,Z) = Zm_p + (A-Z)m_n - BE =$$

$$= Zm_p + (A-Z)m_n\ - b_0A + b_1A^{2/3} + b_2\frac{Z^2}{A^{1/3}} + b_3\frac{(A-2Z)^2}{A} \mp \frac{b_4}{A^{1/2}}$$

Il valore dei parametri b_k si ottiene dai dati sperimentali

b_o	b_1	b_2	b_3	b_4	
15.6	17.2	0.70	23.3	± 12 *oppure* 0	MeV

La formula di Bethe-Weizsäcker è utile per definire alcuni criteri di stabilità dei nuclei. Ad esempio, la relazione tra A e Z per i nuclei stabili si ottiene richiedendo che l'energia, $M(A,Z)c^2$, sia minima. Introducendo la differenza di massa tra neutrone e protone, $\Delta m = m_n - m_p = 1.293\ MeV/c^2$,

$$M = (m_n - b_0 + b_3)A + b_1A^{2/3} + b_4A^{-1/2} - (\Delta m + 4b_3)Z + (b_2A^{-1/3} + 4b_3A^{-1})Z^2$$

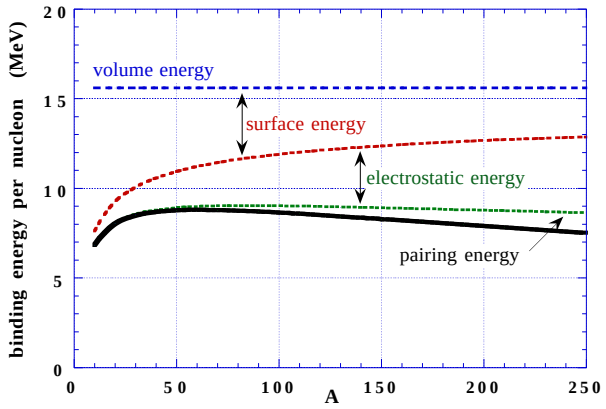


Figure 2.11: Contributi all'energia di legame in funzione di A

$$\frac{\partial M}{\partial Z} = -(\Delta m + 4b_3) + 2\ (b_2 A^{-1/3} + 4b_3 A^{-1})\ Z = 0$$

$$Z = \frac{A}{2}\ \frac{1 + \Delta m/4b_3}{1 + (b_2/4b_3)A^{2/3}} \approx \frac{A}{2}\ \frac{1.014}{1 + 0.0076\ A^{2/3}}$$

2.2.3 I nuclei speculari

Sono chiamati *speculari* le coppie di nuclei con lo stesso valore di A in cui il numero di protoni, Z, e il numero di neutroni, $N = A - Z$, sono scambiati. I nuclei speculari sono caratterizzati da

$$A = dispari \qquad Z = \frac{A \mp 1}{2} \qquad N = \frac{A \pm 1}{2}$$

Le energie di legame dei nuclei isobari speculari differiscono solo per il termine di energia coulombiana. Infatti il termine b_4 è nullo per i nuclei con $A = dispari$, il termine di Pauli è lo stesso per i nuclei speculari e gli altri termini dipendono solo da A. Quindi il confronto tra le energie di legame dei nuclei isobari speculari fornisce importanti informazioni

- per verificare che l'energia di interazione nucleare è indipendente dalla carica elettrica;
- per determinare i parametri della distribuzione di carica del nucleo.

L'energia di interazione coulombiana dei protoni nel nucleo è

$$U = \frac{3}{5}\ \frac{\alpha\hbar c Z^2}{R} = \kappa\ \frac{Z^2}{R} \qquad \kappa \simeq 0.86\ MeV\ fm$$

La differenza di energia di legame dei nuclei speculari è (Fig.2.12)

$$\Delta BE = \left[\frac{(A+1)^2}{4} - \frac{(A-1)^2}{4}\right]\frac{\kappa}{R} = A\ \frac{\kappa}{R} = \frac{\kappa}{R_o}\ A^{2/3}$$

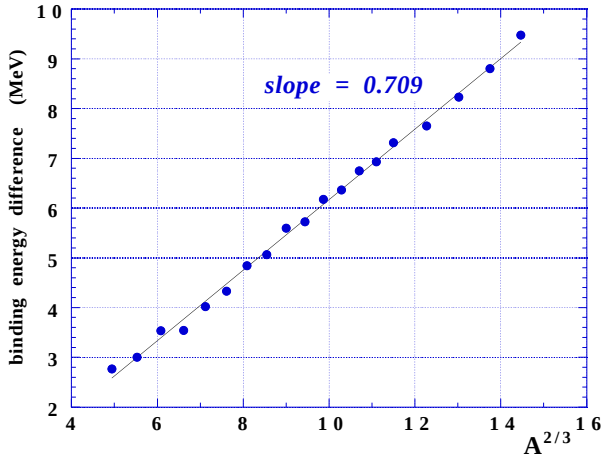


Figure 2.12: Differenza di energia di legame di coppie di nuclei speculari

La tabella mostra l'energia di legame di alcuni nuclei speculari

A	Z	N	$nucleo$	$BE\ (MeV)$	$\Delta BE\ (MeV)$
3	1	2	^{3}H	8.482	0.764
3	2	1	^{3}He	7.718	
13	6	7	^{13}C	97.109	3.003
13	7	6	^{13}N	94.106	
21	10	11	^{21}Ne	167.406	4.319
21	11	10	^{21}Na	163.087	
37	18	19	^{37}Ar	315.510	6.923
37	19	18	^{37}K	308.587	

L'analisi di questi dati mostra che

- i nuclei con $N - Z = +1$ hanno energia di legame sistematicamente maggiore dei nuclei con $N - Z = -1$;
- la differenza di energia di legame, ΔBE, dipende linearmente da $A^{2/3}$;
- la dipendenza da A del raggio nucleare è: $R \approx 1.25A^{1/3}\ fm$, in accordo con le altre misure riportate nel capitolo ???.

2.2.4 Il modello a strati

Il modello a strati del nucleo è un *modello a particelle indipendenti* costruito in analogia con quello atomico. Il modello atomico di Bohr-Sommerfeld-Dirac fondato su

- potenziale coulombiano a simmetria radiale ($R_{nucleo} \ll R_{atomo}$);
- centro del potenziale ben definito ($M_{nucleo} \gg m_{elettroni}$);

- leggi di quantizzazione del momento angolare;
- principio di Pauli;

riproduce con successo la fenomenologia degli atomi: i livelli energetici, la tavola periodica degli elementi, la valenza, ... Gli autostati sono definiti dai numeri quantici $|n, \ell, m, s\rangle$

$$n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \ell = 0, \ldots, n-1 \qquad m = -\ell, \ldots, \ell - 1, \ell \qquad s = \pm 1/2$$

e il numero di stati, definisce le proprietà atomiche. Il numero di stati, cioè di elettroni, per strato è

$$Z_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} 2(2\ell + 1) = 2n^2$$

In particolare gli *elementi nobili* (Elio, Neon, Argon, Kripton, ...), $Z = 2,\ 10,\ 18,\ 36, \ldots$, sono caratterizzati da momento angolare totale $J = 0$, energia di legame elevata, bassa reattività.

Nel caso dei nuclei si osservano delle configurazioni particolarmente stabili quando il numero di protoni, Z, oppure il numero di neutroni, $N = A - Z$, è uguale a

$$2 \qquad 8 \qquad 20 \qquad 28 \qquad 50 \qquad 82 \qquad 126$$

detti *numeri magici*. I nuclei con numeri magici hanno particolari caratteristiche

- esistono molti nuclei isobari;
- hanno spin $I = 0$, momento di dipolo magnetico e di quadrupolo elettrico nulli;
- hanno energia di legame grande;
- hanno una piccola sezione d'urto nucleare.

Le ultime due proprietà sono accentuate nei nuclei *doppiamente magici* quali

$$^4_2He \qquad ^{16}_8O \qquad ^{40}_{20}Ca \qquad \ldots \qquad ^{208}_{82}Pb$$

Si è quindi cercato di impostare un modello del nucleo basato sulla soluzione di un'equazione del moto e che fosse in grado di riprodurre i numeri magici. La soluzione presenta una serie di difficoltà perché

- la forma del potenziale nucleare non è nota;
- se si assume un potenziale a simmetria radiale, il centro di simmetria non è ben definito poiché *tutti* i nucleoni sono sorgente del campo nucleare;
- i nucleoni *occupano in modo continuo* il nucleo e non è ovvio estendere a questa configurazione il concetto di *orbitale* del modello atomico.

La terza difficoltà è in parte ridotta dal principio di Pauli e dal successo del modello a gas di Fermi nel definire l'energia cinetica dei nucleoni: se il gas di nucleoni è fortemente degenere, ciascun nucleone è in uno stato quantico e non viene in collisione con un altro nucleone se non con un meccanismo di scambio. Questo induce a impostare un'equazione del moto per il *singolo nucleone* cioè un *modello a particelle indipendenti*.

Se si vuole risolvere un'equazione agli autovalori in modo analitico, la scelta del potenziale si riduce a pochi esempi: il potenziale coulombiano, la buca di potenziale infinita, il potenziale armonico, ... Il primo non è sicuramente adatto perché l'interazione nucleare è a breve raggio d'azione e perché non può riprodurre la saturazione delle forze nucleari. Il secondo non è molto realistico perché non può riprodurre l'energia cinetica e potenziale dei nucleoni. Il potenziale armonico può costituire un buon punto di partenza per descrivere uno stato vicino all'equilibrio.

Gli autostati di una particella di massa m in un potenziale armonico a simmetria sferica, $\psi(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ si ottengono risolvendo l'equazione radiale con $u_{nl}(r) = rR_{nl}(r)$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{d^2}{dr^2} + U(r) + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}\right] u(r) = E\; u(r)$$

Il potenziale armonico

$$U(r) = \frac{1}{2}\; kr^2 = \frac{1}{2}\; k(x^2+y^2+z^2) \qquad\qquad \omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

ha autofunzioni che dipendono solo dal numero quantico radiale (appendice 4.11)

$$u_n(r) = v_n(r)\; e^{-r^2/2\sigma^2} \qquad\qquad k\sigma^2 = \hbar\omega_o$$

e autovalori

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega_o \qquad\qquad n = n_x + n_y + n_z = 2(\nu-1) + \ell$$

Il numero quantico principale n assume i valori interi, e l'autovalore del momento angolare, ℓ, ha la stessa parità di n

$$n = 0,\; 1,\; 2, \ldots \qquad\qquad \ell = \ldots,\; n-2,\; n$$

e ciascun autostato ℓ ha grado di degenerazione $2(2\ell+1)$

$$m = -\ell, \ldots, \ell-1, \ell \qquad\qquad s = \pm 1/2$$

Il numero di protoni o di neutroni per strato è

$$Z \textit{ oppure } N = (n+1)(n+2)$$

In analogia col modello atomico possiamo definire gli orbitali caratterizzati dal numero quantico ν e dal momento angolare $\ell\hbar$. Il primo autostato, $n = 0$, si può realizzare in una sola combinazione: $n_x = n_y = n_z = 0$. Il secondo autostato si può realizzare con le tre combinazioni [1,0,0] + permutazioni. Il terzo autostato si può realizzare con sei combinazioni [2,0,0] + permutazioni e [0,1,1] + permutazioni, e così via

n	ν	ℓ	$stato$	$2(2\ell+1)$	$Z\ (N)$	$energia$
0	1	0	$1s$	2	**2**	$3\hbar\omega_o/2$
1	1	1	$1p$	6	**8**	$5\hbar\omega_o/2$
2	1	2	$1d$	10	18	
	2	0	$2s$	2	**20**	$7\hbar\omega_o/2$
3	1	3	$1f$	14	34	
	2	1	$2p$	6	**40**	$9\hbar\omega_o/2$
4	1	4	$1g$	18	58	
	2	2	$2d$	10	68	
	3	0	$3s$	2	**70**	$11\hbar\omega_o/2$
5	1	5	$1h$	22	92	
	2	3	$2f$	14	106	
	3	1	$3p$	6	**112**	$13\hbar\omega_o/2$
6	...	...	...	...	...	...

- il potenziale armonico è caratterizzato da $\langle energia\ cinetica\rangle = \langle energia\ potenziale\rangle$ (l'energia totale non dipende dallo stato di momento angolare)

$$\hbar\omega_o = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} + \frac{k\langle r^2\rangle}{2} \approx 40A^{-1/3}\ MeV$$

- gli autostati dipendono solo dal numero quantico principale e hanno degenerazione $(n+1)(n+2)$;

- i livelli di energia E_n sono equispaziati con $\Delta E = \hbar\omega_o$;

- il potenziale armonico produce la sequenza di strati chiusi con

$$\sum(n+1)(n+2) = 2 \quad 8 \quad 20 \quad 40 \quad 70 \quad 112\ldots$$

  quindi è in grado i riprodurre solo i primi tre numeri magici.

Si può risolvere numericamente l'equazione del moto con il potenziale Woods-Saxon (Fig.2.13)

$$U_{WS}(r) = -\frac{U_o}{1+e^{(r-R)/t}}$$

che riproduce meglio del potenziale armonico la distribuzione radiale della densità di nucleoni. Questa forma del potenziale ha una diversa dipendenza dalla distanza r e rimuove la degenerazione degli stati con diverso momento angolare orbitale. Gli stati con ℓ grande risultano maggiormente legati degli stati corrispondenti dell'oscillatore armonico: a parità di numero quantico principale si ha

$$\ldots\ E_{\ell+1} < E_\ell < E_{\ell-1}\ \ldots$$

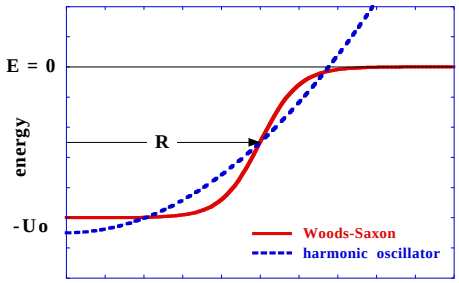


Figure 2.13: Potenziale dell'oscillatore armonico e Woods-Saxon

La differenza di energia è però piccola, $\Delta E_l \ll \hbar\omega_o$, e quindi il potenziale Woods-Saxon non cambia sostanzialmente la sequenza dei numeri di occupazione degli strati.

Un importante progresso è stato fatto da Maria Meyer e Hans Jensen [12] con l'introduzione di un termine di *interazione spin-orbita*

$$U(r) = U_{WS}(r) + U_{LS}(r)\ \vec{\ell}\cdot\vec{s}$$

L'aggiunta di questo termine è suggerita dall'osservazione che l'interazione tra nucleoni ha una forte dipendenza dallo stato di spin. A differenza dall'analoga interazione atomica, il termine spin-orbita nei nuclei non ha origine dall'interazione del momento di dipolo magnetico col campo prodotto dal moto delle cariche. Questa infatti produce spostamento dei livelli, $\Delta E = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$, molto minori di quelli osservati. Per effetto dell'interazione spin-orbita il momeo angolare orbitale e lo spin si combinano a formare il momento angolare totale $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$ e i livelli di energia si modificano

$$E_{nj} = E_{n\ell} + \langle n,\ell,m,s|\ U_{LS}(r)\ \vec{\ell}\cdot\vec{s}\ |n,\ell,m,s\rangle$$

L'operatore $\vec{l}\cdot\vec{s}$ ha autovalori $[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]/2$ e quindi i livelli di energia sono

$$\begin{array}{ll} j = \ell + 1/2 & E_{nj} = E_{n\ell} + \langle U_{LS}(r)\rangle\ \ell/2 \\ j = \ell - 1/2 & E_{nj} = E_{n\ell} - \langle U_{LS}(r)\rangle\ (\ell+1)/2 \end{array}$$

L'analisi dei livelli dei nuclei mostra che lo stato con $j = \ell + 1/2$ è maggiormente legato di quello con $j = \ell - 1/2$ (nel caso atomico si ha l'opposto perché elettrone e nucleo hanno carica elettrica opposta, mentre protone e neutrone hanno la *stessa carica nucleare*)

$$E_n(j = \ell + 1/2) < E_n(j = \ell - 1/2) \qquad \Delta E_{n\ell} = \langle U_{LS}(r)\rangle\ \frac{2\ell+1}{2}$$

con $\langle U_{LS}(r)\rangle \approx -20A^{-2/3}\ MeV$. Tenendo conto di questo valore, l'accoppiamento spin-orbita riproduce la struttura con strati completi corrispondenti ai numeri magici (Fig.2.14).

[12] premi Nobel per la fisica nel 1963

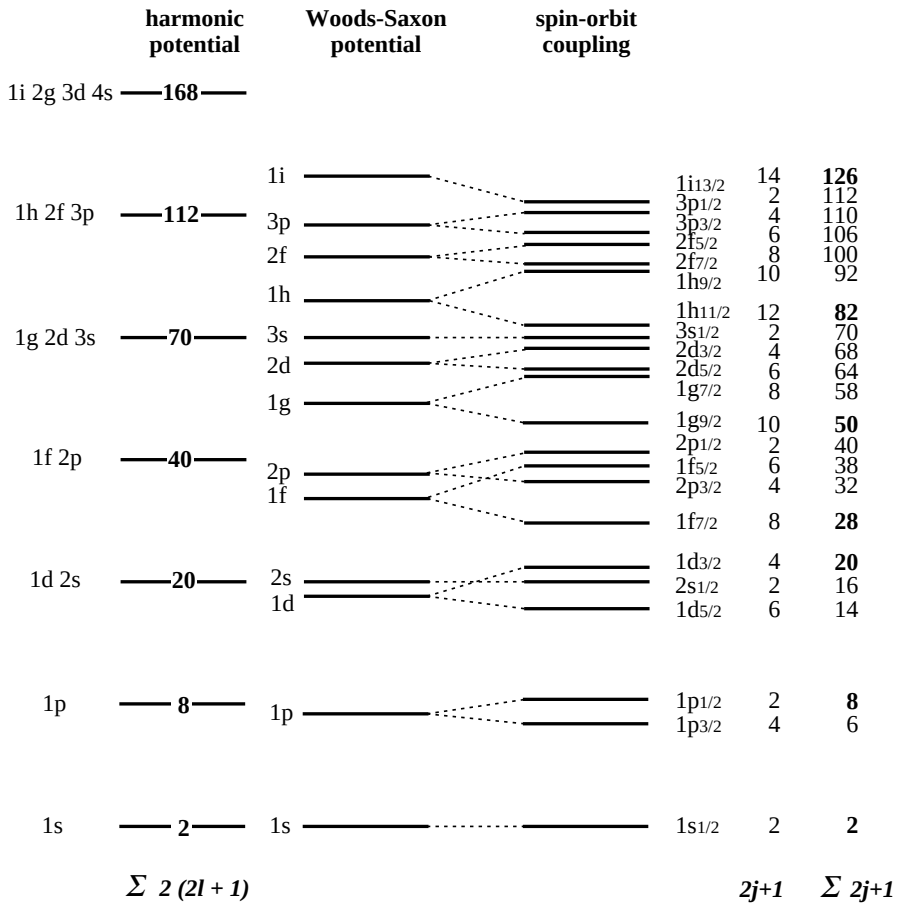


Figure 2.14: Livelli di energia nel modello a strati a particelle indipendenti

Il modello a strati a particelle indipendenti, *Independent Particle Shell Model*, può fare previsioni sullo spin, parità, momento di dipolo magnetico e di quadrupolo elettrico dei nuclei. Data la semplicità del modello, queste previsioni non sono molto accurate, ma costituiscono una utile base per esaminare la fenomenologia dei nuclei e impostare estensioni del modello per tener conto delle differenze osservate. Nel modello $IPSM$ il nucleo è rappresentato dagli stati occupati

$$(\nu\ell_j)^p \ (\nu\ell_j)^n$$

dove p e n sono i numeri di protoni e di neutroni nello stato e hanno valore massimo pari alla molteplicità $2j + 1$. Le principali conclusioni sono

- il momento angolare totale di uno strato pieno è nullo;
- due protoni o due neutroni nello stesso stato tendono ad avere momento angolare totale nullo;
- lo spin dei nuclei $Z = pari$, $N = pari$, è nullo;

- lo spin dei nuclei con $A = dispari$ è uguale al momento angolare totale del nucleone non accoppiato;
- la parità del nucleo è uguale al prodotto delle parità dei singoli nucleoni (positiva per convenzione) per la parità orbitale

$$P = \prod_{k=1}^{A} (-1)^{\ell_k}$$

- la parità dei nuclei $pari - pari$ è $+1$;
- la parità dei nuclei con $A = dispari$ è la parità del nucleone non accoppiato;
- i nuclei $dispari - dispari$ hanno un protone e un neutrone non accoppiati, il momento angolare totale $\vec{j} = \vec{j_p} + \vec{j_n}$ ha autovalore $|j_p - j_n| < j < j_p + j_n$ e il modello non fa previsioni definite;
- se protone e neutrone sono nello stesso stato ℓ la parità del nucleo è $+1$;
- se protone e neutrone hanno $\ell_p = \ell_n \pm 1$ la parità del nucleo è -1.

2.2.5 Momenti magnetici dei nuclei

Il momento magnetico del nucleo è definito dalla direzione dello spin, $\vec{\mu} = g\mu_N \vec{I}$, e ha autovalore pari al valore massimo della proiezione lungo l'asse dello spin nucleare, $\mu = g\mu_N I_z^{max} = g\mu_N I$. Tenendo conto che lo spin è definito dal momento angolare dei nucleoni non accoppiati possiamo fare le ipotesi

- il momento magnetico dei nuclei $pari - pari$ è nullo;
- il momento magnetico dei nuclei con $A = dispari$ è definito dallo stato del nucleone non accoppiato.

Il momento magnetico di un nucleone è la somma vettoriale del momento magnetico originato dal moto orbitale (se è un protone) e dallo spin

$$\vec{\mu} = g\ \mu_N\ \vec{j} = (g_\ell\ \vec{\ell} + g_s\ \vec{s})\ \mu_N$$

Se esprimiamo i prodotti scalari $(\vec{\ell} \cdot \vec{j})$ e $(\vec{s} \cdot \vec{j})$ con gli autovalori, il fattore giromagnetico del nucleo è

$$g = g_\ell\ \frac{j(j+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1)}{2j(j+1)} + g_s\ \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} =$$

$$= \frac{g_\ell + g_s}{2} + \frac{g_\ell - g_s}{2}\ \frac{\ell(\ell+1) - 3/4}{j(j+1)}$$

Quindi possiamo calcolare il momento magnetico, $\mu = g\mu_N j$, nello stato $j = \ell \pm 1/2$

$$j = \ell + 1/2 \qquad \frac{\mu}{\mu_N} = g_\ell \; j + \frac{g_s - g_\ell}{2}$$

$$j = \ell - 1/2 \qquad \frac{\mu}{\mu_N} = \left[\left(j + \frac{3}{2}\right) g_\ell - \frac{g_s}{2}\right] \frac{j}{j+1}$$

- se il nucleone non accoppiato è un protone, $g_\ell = +1$, $g_s/2 = +2.79$,

$$j = \ell + 1/2 \qquad \frac{\mu}{\mu_N} = j + 2.29 \qquad\qquad j = \ell - 1/2 \qquad \frac{\mu}{\mu_N} = (j - 1.29)\; \frac{j}{j+1}$$

- se il nucleone non accoppiato è un neutrone, $g_\ell = 0$, $g_s/2 = -1.91$,

$$j = \ell + 1/2 \qquad \frac{\mu}{\mu_N} = -1.91 \qquad\qquad j = \ell - 1/2 \qquad \frac{\mu}{\mu_N} = +1.91\; \frac{j}{j+1}$$

Questa previsione del modello, sviluppata da Schmidt nel 1937, identifica per protone e neutrone due linee in funzione dello spin nucleare, I, dette *linee di Schmidt*, su cui si dovrebbero allineare i valori dei momenti magnetici dei nuclei con $A = dispari$. In effetti, come mostrato in Fig.2.15, i valori sperimentali dei momenti magnetici sono, in valore assoluto, più piccoli della previsione del modello e, pur con alcune fluttuazioni, sono raggruppati lungo linee che sono *all'interno* dei limiti definiti dalle linee di Schmidt. Il fattore giromagnetico del protone e del neutrone $g_s \neq 2$ è

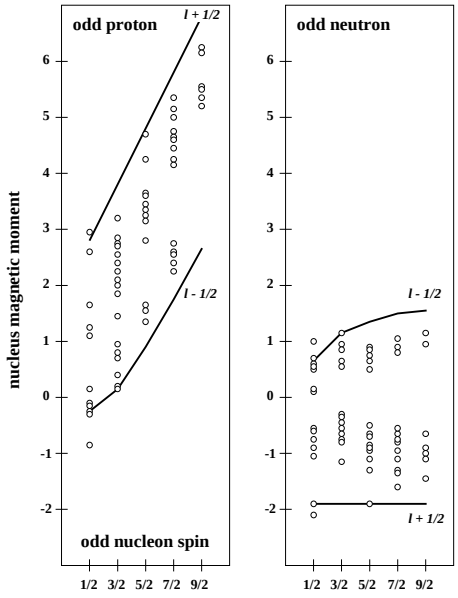


Figure 2.15: Linee di Schmidt e valori del momento magnetico di alcuni nuclei con A dispari in funzione dello spin.

generato dall'interazione nucleare ed è quindi plausibile supporre che, quando sono

in interazione con molti altri nucleoni, protone e neutrone non abbiamo necessariamente lo stesso fattore giromagnetico del nucleone libero. Se facciamo questa ipotesi, i valori sperimentali si accordano meglio con il modello se $g_s \approx 0.6\ g_s^{libero}$.

I valori dei momenti magnetici dei nuclei con A piccolo sono in discreto accordo con la previsione del modello a strati $IPSM$ come mostrato nella tabella seguente.

nucleo	*protoni*	*neutroni*	I^P	μ $[\mu_N]$	*valore sperimentale*	
^2H	$1s_{1/2}$	$1s_{1/2}$	$0^+\ 1^+$	$+0.88$	$+0.857$	(1)
^3H	$1s_{1/2}$	$(1s_{1/2})^2$	$1/2^+$	$+2.79$	$+2.979$	
^3He	$(1s_{1/2})^2$	$1s_{1/2}$	$1/2^+$	-1.91	-2.127	
^4He	$(1s_{1/2})^2$	$(1s_{1/2})^2$	0^+	0		
						(2)
^6Li	$1p_{3/2}$	$1p_{3/2}$	$0^+\ 1^+\ 2^+\ 3^+$	$+0.88$	$+0.822$	(3)
^7Li	$1p_{3/2}$	$(1p_{3/2})^2$	$3/2^-$	$+3.79$	$+3.256$	
^8Be						(4)
^9Be	$(1p_{3/2})^2$	$(1p_{3/2})^3$	$3/2^-$	-1.91	-1.177	
^{10}B	$(1p_{3/2})^3$	$(1p_{3/2})^3$	$0^+\ 1^+\ 2^+\ 3^+$	$+1.88$	$+1.801$	(5)
^{11}B	$(1p_{3/2})^3$	$(1p_{3/2})^4$	$3/2^-$	$+3.79$	$+2.688$	
^{11}C	$(1p_{3/2})^4$	$(1p_{3/2})^3$	$3/2^-$	-1.91	-1.030	
^{12}C	$(1p_{3/2})^4$	$(1p_{3/2})^4$	0^+	0		
^{13}C		$1p_{1/2}$	$1/2^-$	$+0.64$	$+0.702$	
^{13}N	$1p_{1/2}$		$1/2^-$	-0.26	-0.322	
^{14}N	$1p_{1/2}$	$1p_{1/2}$	$0^+\ 1^+$	$+0.38$	$+0.404$	(6)
^{15}N	$1p_{1/2}$	$(1p_{1/2})^2$	$1/2^-$	-0.26	-0.283	
^{15}O	$(1p_{1/2})^2$	$1p_{1/2}$	$1/2^-$	$+0.64$	$+0.719$	
^{16}O	$(1p_{1/2})^2$	$(1p_{1/2})^2$	0^+	0		
^{17}O		$1d_{5/2}$	$5/2^+$	-1.91	-1.893	
^{17}F	$1d_{5/2}$		$5/2^+$	$+4.79$	$+4.722$	
...						

1) il valore sperimentale è $I = 1$
2) non esistono nuclei stabili con $A = 5$
3) il valore sperimentale è $I = 1$
4) in nucleo ^8_4Be non è stabile
5) il valore sperimentale è $I = 3$
6) il valore sperimentale è $I = 1$

2.3 Proprietà delle forze nucleari

2.3.1 L'isospin

I dati sperimentali sull'energia di legame dei nuclei dimostrano che, se si tiene conto dell'energia elettrostatica dei protoni, l'interazione nucleone-nucleone è indipendente

dalla carica elettrica. Le stesse conclusioni si ottengono considerando i livelli di energia dei nuclei isobari che, se si trascurano gli effetti dovuti all'interazione elettromagnetica, risultano simili.

Se assumiamo che le interazioni nucleari $p-p$, $p-n$, $n-n$ sono uguali, possiamo considerare il protone e il neutrone come un'unica particella, *il nucleone*, che esiste in due stati di carica, autostati dell'operatore di *iso-spin*. La simmetria dell'isospin è una simmetria nello spazio vettoriale a due dimensioni e i generatori della simmetria sono le matrici di Pauli. In base a questo formalismo, suggerito da Heisemberg nel 1932, il protone e il neutrone sono autostati degli operatori τ^2 e τ_3 con autovalori $\tau_3(p) = +1/2$, $\tau_3(n) = -1/2$

$$| \, p \, \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad | \, n \, \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'indipendenza dell'interazione nucleare dalla carica elettrica si traduce in una legge di conservazione ovvero in una proprietà di simmetria

- l'isopsin si conserva nelle interazioni nucleari;
- la hamiltoniana di interazione nucleare commuta con l'operatore di isospin ed è invariante per le trasformazioni generate da $\vec{\tau}$, cioè le rotazioni nello spazio dell'isospin.

La carica elettrica del nucleone è legata alla terza componente dell'isospin dalla relazione

$$q = \frac{1}{2} + \tau_3$$

la conservazione della carica elettrica equivale alla conservazione della terza componente dell'isospin τ_3; la conservazione dell'isospin $\vec{\tau}$ (indipendenza dalla carica elettrica) è una legge più stringente che non la conservazione della carica elettrica.

Analogamente al caso dello spin, due nucleoni esistono in quattro stati di isospin $|T, T_3\rangle$ con moteplicità $2T + 1$

$$\begin{array}{lrcl} \textit{singoletto} & |0, \;\; 0\rangle & = & [\, |p\; n\rangle - |n\; p\rangle \,]/\sqrt{2} \\ & & & \\ & |1, +1\rangle & = & \qquad |p\; p\rangle \\ \textit{tripletto} & |1, \;\; 0\,\rangle & = & [\, |p\; n\rangle + |n\; p\rangle \,]/\sqrt{2} \\ & |1, -1\rangle & = & \qquad |n\; n\rangle \end{array}$$

Lo stato di singoletto è antisimmetrico e lo stato di tripletto è simmetrico. Il nucleone è un fermione di spin 1/2 e il principo di Pauli si può generalizzare: lo stato di due nucleoni identici

$$|N_1, N_2\rangle \equiv |\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2\rangle$$

è antisimmetrico rispetto allo scambio dei nucleoni, cioè delle coordinate spaziali, dello spin e dell'isospin. Se i nucleoni sono in stato di momento angolare orbitale L, la simmetria dello stato è

$$(-1)^L \; (-1)^{S+1} \; (-1)^{T+1} = -1 \quad \Rightarrow \quad L + S + T = \textit{dispari}$$

Se due nucleoni formano uno stato legato, è plausibile supporre che lo stato di energia più bassa corrisponda a $L = 0$ quindi $S + T = dispari$. Poiché non si osservano stati *legati* di tripletto $p - p$ né $n - n$, la simmetria dell'isospin richiede che lo stato fondamentale $p - n$, cioè il deutone, sia lo stato di singoletto con isospin $T_d = 0$. Quindi il principio di Pauli richiede che il deutone abbia *spin* 1, $I_d = 1$, e questo è quello che si osserva sperimentalmente.

Il deutone è stabile e non si osservano stati eccitati del deutone. La simmetria dell'isospin è in accordo con il fatto che esista un solo stato stabile, *singoletto di isospin*, con due nucleoni, $A = 2$

$$T_d = 0 \qquad I_d = 1 \qquad q_d = \frac{A}{2} + T_3 = +1$$

Esistono due nuclei con $A = 3$ che costituiscono un *doppietto di isospin*, $T = 1/2$

$$\begin{array}{lll} {}^3_1H & T_3 = -1/2 & q = A/2 + T_3 = +1 \\ {}^3_2He & T_3 = +1/2 & q = A/2 + T_3 = +2 \end{array}$$

Esiste un solo nucleo con $A = 4$, il nucleo ${}^4_2He$, che è un *singoletto di isospin*, $T = 0$ ed è una configurazione particolarmente stabile con energia di legame $BE = 28.3\ MeV$. Non esistono nuclei stabili con $A = 5$. Esistono tre nuclei con $A = 6$ che costituiscono un *tripletto di isospin*, $T = 1$

$$\begin{array}{lll} {}^6_2He & T_3 = -1 & q = A/2 + T_3 = +2 \\ {}^6_3Li & T_3 = 0 & q = A/2 + T_3 = +3 \\ {}^6_4Be & T_3 = +1 & q = A/2 + T_3 = +4 \end{array}$$

2.3.2 Il deutone

Il deutone è lo stato nucleare legato più semplice e costituisce per l'interazione nucleare l'analogo dell'atomo di idrogeno per l'interazione elettromagnetica. L'energia di legame del deutone è però così bassa da non formare stati eccitati. Quindi l'informazione sull'interazione nucleone-nucleone è limitata allo studio delle proprietà del deutone e della diffusione $n - p$ e $p - p$ a bassa energia. Le caratteristiche del deutone sono

- $spin^{parita'} = 1^+$
- *energia di legame* $\quad BE = 2.225\ MeV$
- *momento di dipolo magnetico* $\quad \mu = +0.8574\ \mu_N$
- *momento di quadrupolo elettrico* $\quad Q = +2.88\ e \times mb$

La conservazione della parità nelle reazioni nucleari o elettromagnetiche in cui vi è un nucleo di deuterio nello stato iniziale o nello stato finale permette la determinazione della parità del deutone: $P_d = +1$.

Nel paragrafo precedente abbiamo fatto l'ipotesi che il deutone sia in uno stato di momento angolare orbitale $L = 0$, cioè $^3S_1$. Nello stato $L = 0$ e con gli spin di protone e neutrone paralleli, $I = 1$, il momento magnetico risulta

$$\vec{\mu}_d = g_d \mu_N \vec{I} = g_p \mu_N \vec{s}_p + g_n \mu_N \vec{s}_n \qquad \mu_d = \frac{g_p + g_n}{2}\ \mu_N = +0.8798\ \mu_N$$

che è sicuramente diverso dal valore misurato poiché la precisione di misura dei momenti magnetici è $< 10^{-6}$. Una possibile interpretazione di questa differenza è che l'interazione tra nucleoni cambi il valore dei momenti magnetici di protone e neutrone nello stato legato, oppure che lo stato fondamentale sia una combinazione di stati con diverso valore del momento angolare orbitale. Poiché la parità del deutone è positiva, il momento angolare orbitale può solo essere pari $L = 0, 2, \ldots$ Inoltre, se il deutone fosse esclusivamente in onda S avrebbe momento di quadrupolo elettrico nullo. Infatti l'autofunzione Y_{00} è costante e non può produrre un momento di quadrupolo elettrico

$$Q = \langle {}^3S_1 |\ 3z^2 - r^2\ |{}^3S_1 \rangle = costante \int_{-1}^{+1} (3\cos^2\theta - 1)\ d\cos\theta = 0$$

Queste due evidenze inducono a supporre che il deutone sia in uno stato di momento angolare *misto* sovrapposizione dello stato $^3S_1$ ($L = 0$) e $^3D_1$ ($L = 2$)

$$|d\rangle = A_S |{}^3S_1\rangle + A_D |{}^3D_1\rangle$$

I momenti angolari $\vec{L}$, $\vec{s}_p$, $\vec{s}_n$, si sommano a formare lo spin del deutone $I = 1$, quindi, anche nello stato di momento angolare orbitale $L = 2$ protone e neutrone sono nello stato di tripletto con $S = 1$. Il fattore giromagnetico è

$$g = g_L\ \frac{I(I+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2I(I+1)} + g_S\ \frac{I(I+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2I(I+1)}$$

dove $g_L = 0.5$, poiché solo il protone contribuisce al momento magnetico *orbitale*, e $g_S = 0.8798$. Quindi

$$g = g_L\ \frac{3}{2} - g_S\ \frac{1}{2} = 0.3101$$

Con queste ipotesi, il momento magnetico del deutone è

$$\langle d |\ \vec{\mu}\ | d \rangle = A_S^2\ \langle {}^3S_1 |\ \vec{\mu}\ |{}^3S_1 \rangle + A_D^2\ \langle {}^3D_1 |\ \vec{\mu}\ |{}^3D_1 \rangle = A_S^2\ 0.8798 + A_D^2\ 0.3101$$

Con la condizione di normalizzazione $A_S^2 + A_D^2 = 1$, si ottiene

$$A_S^2 = 0.96 \qquad A_D^2 = 0.04$$

Questa stima si basa sull'ipotesi che i momenti magnetici di protone e neutrone non siano modificati dall'interazione nucleare che, come abbiamo visto, non è ben verificata nel caso di nuclei pesanti. Il momento di quadrupolo elettrico

$$\langle d |\ Q\ | d \rangle = 2 A_S A_D\ \langle {}^3S_1 |\ Q\ |{}^3D_1 \rangle + A_D^2\ \langle {}^3D_1 |\ Q\ |{}^3D_1 \rangle$$

può fornire altre informazioni sui coefficienti A_S, A_D, ma le funzioni d'onda radiali del deutone non sono note con sufficientemente accuratezza. Possiamo concludere che il deutone non è esclusivamenete in onda S e che il contributo di onda D è piccolo.

La funzione d'onda del deutone si ottiene risolvendo l'equazione del moto

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\ \nabla^2 + U(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E\ \psi(\vec{r})$$

Se facciamo l'ipotesi che il potenziale $U(\vec{r})$ sia a simmetria sferica e che il deutone sia prevalentemente nello stato di momento angolare $L = 0$, la parte radiale della funzione d'onda $\psi(r,\theta,\phi) = u_n(r)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)/r$ soddisfa l'equazione

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{d^2}{dr^2} + U(r)\right]u(r) = E\ u(r) \qquad\qquad m = \frac{M_p M_n}{M_p + M_n} = \frac{M}{2}$$

Per una buca di potenziale sferica di profondità U_o

$$U(r) = -U_o \quad per\ r < R \qquad\qquad U(r) = 0 \quad per\ r > R$$

se l'energia è $E = -E_o = -2.225\ MeV < U_o$, la soluzione è

$$\begin{array}{lll} r < R & u(r) = A\sin k_i r + A'\cos k_i r & k_i = \sqrt{M(U_o - E_o)}/\hbar \\ r > R & u(r) = Be^{-k_e r} + B'e^{+k_e r} & k_e = \sqrt{ME_o}/\hbar \end{array}$$

La soluzione $\psi(r,\theta,\phi)$ deve soddisfare le seguenti condizioni

- deve avere valore finito per $r \to 0$, $\lim_{r\to 0} u(r) \sim r$, quindi $A' = 0$;
- deve annullarsi per $r \to \infty$, quindi $B' = 0$;
- la soluzione e la derivata devono essere continue per $r = R$.

La soluzione e la derivata

$$\begin{array}{lll} r < R & u(r) = A\sin k_i r & u'(r) = Ak_i\cos k_i r \\ r > R & u(r) = Be^{-k_e(r-R)} & u'(r) = -k_e Be^{-k_e(r-R)} \end{array}$$

e la condizione di continuità per $r = R$, $A\sin k_i R = B$, $Ak_i\cos k_i R = -k_e B$, definiscono le relazioni

$$k_i \cot k_i R = -k_e \qquad\qquad Ak_i = B(k_i^2 + k_e^2)^{1/2}$$

con $k_e = 0.232\ fm^{-1}$. La prima equazione si risolve numericamente (Fig.2.16) e, se supponiamo che il raggio della buca di potenziale sia $R = 2\ fm$, otteniamo $k_i \approx 0.91\ fm^{-1}$ e $U_o \approx 35\ MeV$. La condizione di normalizzazione

$$4\pi A^2 \int_0^R \sin^2 k_i r\ dr + 4\pi B^2 \int_R^\infty e^{-2k_e(r-R)} dr = 1$$

definisce le ampiezze $A \approx B \approx 0.17\ fm^{-1/2}$, da cui si deduce che la probabilità che la distanza tra protone e neutrone sia maggiore di R è approssimativamente 2/3 a riprova del fatto che il deutone è uno stato debolmente legato.

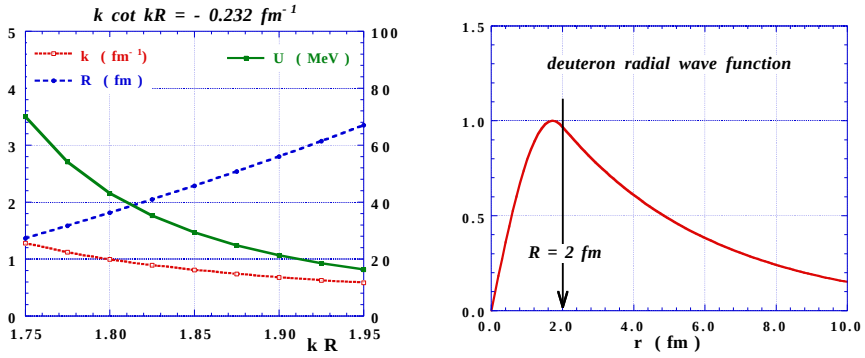


Figure 2.16: Soluzione e funzione d'onda del nucleo di deuterio

2.3.3 Diffusione neutrone-protone a bassa energia

I parametri determinati dallo studio del sistema legato neutrone-protone possono essere utilizzati per analizzare la diffusione elastica, cioè lo stato neutrone-protone non legato. Poiché abbiamo fatto l'ipotesi che il deutone sia prevalentemente nello stato di momento angolare $L = 0$, consideriamo la diffusione in *onda S*, cioè il limite di bassa energia per cui l'impulso *nel centro di massa* soddisfa la condizione $pR = L \ll \hbar$

$$K_n = \frac{p_n^2}{2M} = \frac{2p^2}{M} \ll \frac{2\hbar^2}{MR^2} \approx 20\ MeV$$

dove p_n e K_n sono l'impulso e l'energia cinetica del neutrone nel laboratorio. La parte radiale della funzione d'onda diffusa per $r > R$ si può esprimere

$$u(r) = \frac{1}{k}\sin(kr + \delta_o) \qquad\qquad \hbar k = p$$

dove compare solo lo sfasamento per $\ell = 0$, δ_o, che definisce la sezione d'urto elastica

$$\sigma_{el}^o = \frac{4\pi}{k^2}\ \sin^2\delta_o$$

Nel limite di bassa energia ($k \to 0$) la funzione d'onda e la derivata si possono approssimare

$$u(r) = \frac{1}{k}\sin\delta_o + r\cos\delta_o + \ldots \qquad u'(r) = \cos\delta_o - kr\sin\delta_o + \ldots$$

e richiedendo la continuità per $r = R$ con la soluzione trovata per $r < R$ per lo stato non legato ($E = 0$) si ha la relazione

$$\frac{\tan \delta_o}{k} + R = \frac{\tan k_i R}{k_i} \qquad\qquad k_i \approx \sqrt{MU_o}/\hbar$$

Nel limite $k \to 0$ deve risultare $\delta_o \to 0$ perché l'ampiezza di diffusione sia finita. Definiamo la

$$\textit{lunghezza di diffusione} \qquad\qquad a = - \lim_{k \to 0} \frac{\tan \delta_o}{k}$$

che ha le seguenti caratteristiche

- definisce l'andamento dell'onda diffusa per $r > R$

$$\lim_{k \to 0} u(r) = (r - a) \cos \delta_o$$

- definisce l'andamento della sezione d'urto di diffusione elastica

$$\sigma^o_{el} = \frac{4\pi}{k^2 + k^2 \cot^2 \delta_o} \qquad\qquad \lim_{k \to 0} \sigma^o_{el} = 4\pi a^2$$

Con i valori definiti per il deutone, $R = 2\ fm$, $U_o = 35\ MeV$, troviamo

$$a = - 5.9\ fm \qquad\qquad \lim_{k \to 0} \sigma^o_{el} = 4.4\ b$$

La parametrizzazione che abbiamo trovato prevede che la sezione d'urto di diffusione elastica neutrone-protone sia costante per valori dell'impulso nel centro di massa $p < \hbar/a$. Questo è confermato dai dati sperimentali, ma il valore sperimentale della sezione d'urto $lim_{k \to 0}\ \sigma_{el} = 20.4\ b$ è molto maggiore di quello previsto. In effetti i dati utilizzati si riferiscono allo stato legato con spin $I = 1$, lo stato di tripletto, mentre la diffusione elastica può avvenire anche nello stato di singoletto con spin $I = 0$. Poiché il sistema neutrone-protone non forma uno stato legato di singoletto, è prevedibile che il potenziale sia minore che nello stato di tripletto, $U_{os} < U_{ot}$, e che la lunghezza di diffusione di singoletto sia maggiore, $a_s > a_t$. Tenendo conto dei pesi di molteplicità degli stati, la sezione d'urto si esprime

$$\sigma_{el} = \frac{1}{4}\ \sigma_s + \frac{3}{4}\ \sigma_t = \pi \left(\frac{1}{k^2 + a_s^{-2}} + \frac{3}{k^2 + a_t^{-2}} \right)$$

Nel limite di bassa energia, $\sigma_{exp} = 20.4\ b$, $\sigma_t = 4.4\ b$, troviamo

$$\sigma_s = 4\pi a_s^2 = 4\ [20.4 - (3/4)\ \sigma_t] = 68\ b \qquad\qquad a_s = \pm 23\ fm$$

La sezione d'urto non definisce il segno della lunghezza di diffusione, questo si può determinare studiando l'interferenza della diffusione da molecole di para- e orto-idrogeno. La lunghezza di diffusione nello stato di singoletto è negativa $a_s = -23\ fm$ e questo conferma che il sistema neutrone-protone non è legato nello stato di singoletto.

Conclusioni simili si ottengono dallo studio della diffusione elastica protone-protone a bassa energia, ma vi sono alcune differenze

- per il principio di Pauli, la diffusione protone-protone in onda S può avvenire solo nello stato di spin 0 (singoletto);

- oltre all'interazione nucleare si deve tener conto dell'interazione coulombiana tra i protoni e questa limita la regione di bassa energia a valori $K_p > 1\ MeV$;

- occorre tener conto del fatto che i due protoni sono identici.

I risultati mostrano che la lunghezza di diffusione $a = -17\ fm$ è negativa e questo conferma che il sistema protone-protone non è legato.

I parametri della diffusione neutrone-neutrone non sono direttamente misurabili in esperimenti di diffusione elastica poiché non esistono bersagli di neutroni liberi. Si possono sfruttare reazioni in cui vengono prodotti due neutroni nello stato finale in moto relativo nel potenziale di interazione come, ad esempio, $n\ {}^2_1H \rightarrow n\ n\ p$. In queste reazioni è presente nello stato finale un terzo nucleo che interagisce con i due neutroni e occorre tener conto di questi effetti. Anche in questo caso i risultati mostrano che la lunghezza di diffusione $a = -17\ fm$ è negativa e questo conferma che il sistema neutrone-neutrone non è legato.

2.3.4 Proprietà dell'interazione nucleone-nucleone

L'analisi dell'energia di legame dei nuclei, delle caratteristiche del deutone e della diffusione elastica nucleone-nucleone a bassa energia forniscono informazioni sulle proprietà delle forze tra nucleoni

- l'interazione è *attrattiva* e a *breve raggio d'azione*, $R = 1 \div 2\ fm$ e può essere descritta da un *potenziale centrale* $-U_c(r)$

La forma del potenziale non è nota a priori, scelte diverse, quali la buca *quadrata*, il potenziale di *Woods-Saxon* o il potenziale dell'*oscillatore armonico*, portano a conclusioni simili se si usano valori simili dei parametri: raggio del potenziale $R \approx 2\ fm$, profondità del potenziale $U_o \approx 40\ MeV$.

- l'interazione è *simmetrica rispetto alla carica elettrica*

Lo studio dell'energia di legame e dei livelli di energia dei nuclei isobari speculari mostrano che l'interazione protone-protone e neutrone-neutrone sono simili; alla stessa conclusione si giunge confrontando la diffusione elastica neutrone-neutrone e protone-protone a bassa energia.

- l'interazione è *indipendente dalla carica elettrica*

Lo studio dell'energia di legame dei nuclei, del deutone e della diffusione elastica neutrone-protone a bassa energia mostrano che l'interazione è indipendente dalla carica elettrica. Questa proprietà è tradotta nella *conservazione dell'isospin* nell'interazione nucleare.

- l'interazione è *invariante per trasformazioni di parità e inversione temporale*

I nuclei non hanno momento di dipolo elettrico, né momento di quadrupolo magnetico, ...

- l'interazione *dipende dallo spin*

Lo stato nucleone-nucleone con spin $I = 0$ (singoletto) ha proprietà diverse da quelle dello stato con spin $I = 1$ (tripletto); questo suggerisce una dipendenza dallo spin dell'interazione e l'introduzione di un potenziale del tipo

$$U_S(r) = U_s(r)\ \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 - U_t(r)\ \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$$

attrattivo nello stato di tripletto e repulsivo nello stato di singoletto.

- l'interazione ha anche un *potenziale non centrale*

Per render conto del momento di dipolo magnetico e del momento di quadrupolo elettrico del deutone si fa l'ipotesi che questo sia uno stato *misto* sovrapposizione di stati di momento angolare $L = pari$. Ma un potenziale a simmetria radiale non produce autostati stazionari degeneri con diversi valori di L. Quindi l'interazione nucleone-nucleone ha anche un termine non radiale detto *potenziale tensoriale* $U_T(\vec{r})$. Poiché l'unica direzione definita è lo spin, il potenziale tensoriale si può costruire con combinazioni dipendenti dallo spin e dalla distanza, del tipo $(\vec{s} \cdot \vec{r})$ oppure $(\vec{s} \wedge \vec{r})$, che siano invarianti per trasformazione di parità e di inversione temporale.

- l'interazione è *repulsiva a piccole distanze*

I nuclei hanno energia e volume proporzionale al numero di nucleoni: questo fa presupporre che oltre al potenziale attrattivo con raggio d'azione R vi sia un potenziale repulsivo a distanza $r \ll R$. Questo è confermato dallo studio della diffusione nucleone-nucleone: a bassa energia lo sfasamento è positivo (potenziale attrattivo) mentre a energia intermedia ($p_{cm} > 400\ MeV/c$ cioè $r < 0.5\ fm$) lo sfasamento diventa negativo (potenziale repulsivo). L'effetto è legato al principio di esclusione di Pauli per cui due nucleoni con gli stessi numeri quantici non possono trovarsi nella stessa posizione. Un potenziale repulsivo si può costruire con le stesse combinazioni degli operatori di spin che generano il potenziale tensoriale.

- tra i nucleoni agiscono *forze di scambio*

La sezione d'urto differenziale di diffusione elastica protone-protone mostra una simmetria tra θ e $\pi - \theta$ poiché le particelle sono identiche. Lo stesso fenomeno si osserva nel caso della diffusione elastica neutrone-protone a energia intermedia e questo effetto non si giustifica in base alla dinamica del processo. Infatti, se supponiamo che l'angolo di deflessione sia legato all'impulso trasferito nella collisione

$$\theta \approx \frac{\Delta p}{p} \approx \frac{energia\ potenziale}{energia\ cinetica}$$

la diffusione ad angoli grandi non dovrebbe verificarsi all'aumentare dell'energia cinetica, contrariamente a quanto si osserva. Questo effetto può essere spiegato se sono presenti forze di scambio che agiscono sulle coordinate e sullo spin dei nucleoni. Sono state proposti diversi tipi di forze di scambio (Heisemberg, Majorana, Bartlett) che possono spiegare questo effetto e anche l'effetto di saturazione delle forze nucleari.

2.3.5 Il modello di Yukawa

Nel 1935 Hideki Yukawa [13] propose un modello basato su una teoria di campo per interpretare la fenomenologia dell'interazione nucleare. L'ipotesi del modello è:

- i nucleoni sono le sorgenti del campo e l'interazione tra nucleoni avviene mediante lo scambio di bosoni, i quanti del campo di interazione nucleare;

il campo di interazione deve avere le seguenti proprietà:

- l'interazione è a piccolo raggio d'azione;
- è indipendente dalla carica elettrica;
- dipende dallo stato di spin del sistema di nucleoni;

e, per semplificare la trattazione,

- il potenziale è a simmetria sferica.

L'equazione relativisticamente invariante che descrive un campo di bosoni di massa m è l'equazione di Klein-Gordon (appendice 4.18)

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi(\vec{r},t) = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi(\vec{r},t)$$

che si riduce all'equazione di d'Alembert nel limite $m \to 0$. Consideriamo la soluzione in condizioni statiche. L'equazione

$$\nabla^2\phi(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\; r\phi(r) = \mu^2\;\phi(r) \qquad\qquad \mu = \frac{mc}{\hbar}$$

ha come soluzione

$$\phi(r) = \eta\;\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

dove η è una costante arbitraria. Nel caso dell'elettromagnetismo, $\mu = 0$, $\eta = q/4\pi\epsilon_o$, l'energia di interazione tra due cariche elettriche è $U(r) = qq'/4\pi\epsilon_o r$. Se queste sono pari alla carica elementare:

$$U_{em}(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r} = \frac{\alpha\hbar c}{r} \qquad\qquad \alpha = \frac{1}{137}$$

Nel caso dell'interazione nucleare, η è il valore della "carica nucleare" sorgente del campo e il potenziale (attrattivo) di interazione tra due nucleoni è

$$U_n(r) = -\eta\eta'\;\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

Possiamo fare le seguenti osservazioni

[13] premio Nobel per la fisica nel 1949

- il raggio d'azione dell'interazione determina il valore della massa del bosone

$$1/\mu \approx 1 \div 2\ fm \quad \Rightarrow \quad mc^2 \approx 100 \div 200\ MeV$$

- per l'equivalenza dell'interazione $p-p$, $p-n$, $n-n$, il bosone esiste in tre stati di carica elettrica $(-\ 0\ +)$: è uno stato di *isospin* $=\ 1$;

- le costanti η e η' *non* dipendono dal tipo di nucleone: $\eta = \eta'$.

Per valutare l'ordine di grandezza della *costante di accoppiamento*, consideriamo la sezione d'urto di interazione nucleone-nucleone. Se M è la massa del nucleone e $\hbar\vec{q}$ è l'impulso trasferito da un nucleone all'altro, l'ampiezza di diffusione nell'approssimazione di Born (capitolo ???) è

$$f(\vec{q}) = \frac{M/2}{2\pi\hbar^2}\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\ U_n(r)\ d\vec{r} = -\frac{M}{4\pi\hbar^2}\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\ \alpha_n\hbar c\ \frac{e^{-\mu r}}{r}\ d\vec{r}$$

dove abbiamo introdotto la costante adimensionale $\alpha_n = \eta^2/\hbar c$ in analogia con l'interazione elettromagnetica. L'integrale, la trasformata di Fourier del potenziale di interazione, è il *propagatore del campo bosonico*

$$\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\ \frac{e^{-\mu r}}{r}\ d\vec{r} = \frac{4\pi}{q^2+\mu^2}$$

La sezione d'urto di diffusione nucleone-nucleone, $\sigma = \int |f(\vec{q})|^2 d\Omega$, è approssimativamente uguale a $\pi R^2 \approx \pi/\mu^2$

$$|f(\vec{q})|^2 = (\alpha_n\hbar c)^2\ \frac{M^2}{[p^2(1-\cos\theta)+(mc)^2]^2}$$

$$\sigma = \int |f(\vec{q})|^2 d\cos\theta\ d\phi \simeq \alpha_n^2\hbar^2\ \frac{(Mc)^2}{(mc)^4}\ \frac{2\pi}{1+(2p/mc)^2} \simeq \pi\ \frac{\hbar^2}{(mc)^2}$$

Il valore della costante di accoppiamento è $\alpha_n \approx m/M \gg \alpha$ come ci si aspetta dal fatto che a distanza $r \approx 1/\mu$ l'interazione nucleare tra protoni deve risultare molto maggiore della repulsione coulombiana.

Il modello di Yukawa ha avuto una notevole influenza sugli sviluppi teorici e sulla ricerca sperimentale. Alcune particelle di spin intero, dette *mesoni*, furono scoperte alcuni anni dopo. Nel 1947 fu osservato il mesone π in due stati di carica, $\pi^{\pm}$, con massa $m_\pi \approx 140\ MeV/c^2$ e successivamente fu osservato anche il mesone neutro, π^0, con valore simile della massa. I mesoni π hanno *spin* 0. Più tardi furono scoperti i mesoni $\rho^-\ \rho^0\ \rho^+$ con massa $m_\rho \approx 770\ MeV/c^2$ e *spin* 1. In entrambe i casi costituiscono un *tripletto di isospin*: $T = 1$. Per quanto oggi sappiamo che i mesoni osservati *non* sono i bosoni mediatori dell'interazione nucleare, ma sono particelle con struttura, le basi teoriche del modello di Yukawa sono tuttora valide.

2.4 Decadimenti dei nuclei

La scoperta della radioattività naturale, fatta da Henri Béquerel [14] nel 1896, è all'origine dello studio della fisica nucleare. Ci vollero molti anni per capire la natura dei decadimenti dei nuclei che avvengono in diversi modi

- decadimento α: emissione di nuclei di elio;
- decadimento β: emissione di elettroni (o positroni) e neutrini;
- decadimento γ: emissione di radiazione elettromagnetica;
- fissione: scissione in due o più nuclei;

in cui un nucleo di massa M_1 decade in un nucleo di massa $M_2 < M_1$ e la differenza di massa si converte in massa e energia cinetica dei prodotti di decadimento.

2.4.1 Legge di decadimento

Già nei primi anni di studio dei decadimenti delle sostanze radioattive si dimostrò che l'*attività*, definita come il numero di decadimenti nell'unità di tempo, decresce nel tempo con legge esponenziale e che il processo di decadimento è di natura casuale. Questa evidenza portò a concludere che il decadimento radioattivo non è originato dalla mutazione delle caratteritiche chimiche della sostanza, ma risulta dalla successione di più processi che coinvolgono i singoli atomi. Il fenomeno del decadimento di una sostanza radioattiva si può interpretare sulla base delle seguenti ipotesi:

- la probabilità di decadimento nell'unità di tempo è una proprietà della sostanza e del processo di decadimento e non dipende dal tempo;
- in una sostanza contenente N nuclei, la probabilità di decadimento nell'unità di tempo del singolo nucleo non dipende da N.

Quindi la probabilità di decadimento in un intervallo di tempo dt è

$$dP = \lambda \, dt$$

dove λ è la *costante di decadimento* caratteristica del processo e ha dimensioni $[s^{-1}]$. Se la sostanza contiene N nuclei e se il numero N è grande in modo da poterlo trattare come una variabile continua, la variazione (diminuzione) del numero di nuclei nell'intervallo di tempo dt è

$$-dN = \lambda \, N \, dt$$

[14] premio Nobel per la fisica nel 1903

Conoscendo il valore di N a un certo istante, $N(t=0) = N_o$, si ottiene l'andamento nel tempo del numero di nuclei e dell'attività della sostanza

$$N(t) = N_o e^{-\lambda t} \qquad A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_o e^{-\lambda t}$$

Il valore medio della distribuzione è la *vita media* del decadimento

$$\tau = \frac{\int_o^\infty t\ N(t)\ dt}{\int_o^\infty N(t)\ dt} = \frac{1}{\lambda}$$

In fisica delle particelle si quota la vita media mentre in fisica dei nuclei si quota di solito il *tempo di dimezzamento*, $t_{1/2}$, definito come l'intervallo di tempo in cui il numero di nuclei si dimezza

$$\int_o^{t_{1/2}} \lambda N(t) dt = \int_{t_{1/2}}^\infty \lambda N(t) dt = \frac{N_o}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t_{1/2} = \tau \ln 2 = 0.693\ \tau$$

L'unità di misura comunemente usata per l'attività è il *Curie* [15], definito come l'attività di un grammo di radio

$$1\ Ci = 3.7\ 10^{10}\ disintegrazioni/secondo$$

- Il nucleo $^{226}_{88}Ra$ decade emettendo particelle α di energia cinetica 4.9 MeV con un tempo di dimezzamento $t_{1/2} = 1602\ anni$. La vita media è $\tau = 1602 \times \pi\ 10^7/0.693 = 7.3\ 10^{10}\ s$. L'attività di un grammo di $^{226}_{88}Ra$ è

$$A = \frac{N}{\tau} = \frac{6.02\ 10^{23}}{226\ 7.3\ 10^{10}\ s} = 3.7\ 10^{10}\ s^{-1}$$

Un'altra unità di misura è il *Bequerel* che corrisponde a una disintegrazione al secondo, $1\ Bq = 0.27\ 10^{-10}\ Ci$.

2.4.2 Larghezza di decadimento

Il fenomeno casuale del decadimento non si può interpretare in base alle leggi della meccanica classica. In meccanica quantistica la probabilità di decadimento dallo stato $|i\rangle$ allo stato $|f\rangle$ si può calcolare con i metodi della teoria delle perturbazioni con le ipotesi

- gli stati $|i\rangle$ e $|f\rangle$ sono autostati della hamiltoniana H_o che descrive il sistema nucleare e si possono calcolare, ad esempio, a partire dal potenziale di interazione nel modello a strati;
- la transizione $|i\rangle \to |f\rangle$ avviene per effetto della hamiltoniana H_I che descrive l'interazione;
- la perturbazione è piccola, $|\langle f|H_I|i\rangle| \ll |\langle i|H_o|i\rangle|$.

[15] da Maria Sklodowska Curie premio Nobel per la fisica nel 1903

Per effetto dell'interazione, gli autovalori dell'energia vengono modificati $E_i \to E_i' = E_i + \Delta E_i - i\Gamma_i/2$ e lo stato non conserva la densità di probabilità per l'introduzione del termine immaginario nell'evoluzione temporale

$$|i\rangle = |i_o\rangle \; e^{-i(E_i+\Delta E_i - i\Gamma_i/2)t/\hbar} \qquad\qquad \langle i|i\rangle = \langle i_o|i_o\rangle \; e^{-\Gamma_i t/\hbar}$$

Otteniamo la legge di decadimento esponenziale (appendice 4.14). Γ_i è chiamata *larghezza di decadimento* e rappresenta l'indeterminazione dell'energia dello stato non stazionario: se il sistema ha un valor medio del tempo di sopravvivenza nello stato $|\, i\rangle$ pari a τ, la sua energia è nota con una incertezza Γ definita dalla relazione di indeterminazione

$$\Gamma \; \tau = \hbar$$

La funzione di distribuzione dell'energia dello stato $|i\rangle$ attorno al valor medio E_i è una curva lorentziana con larghezza pari a Γ

$$f(E) = \frac{1}{\pi} \; \frac{\Gamma/2}{(E - E_i)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

La probabilità di decadimento nell'unità di tempo dallo stato $|i\rangle$ allo stato $|f\rangle$ si calcola con i metodi della teoria delle perturbazioni (appendice 4.15). Al primo ordine dello sviluppo perturbativo:

$$\frac{1}{\tau} = \lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \; |\langle f|H_I|i\rangle|^2 \rho(E_f)$$

Nei decadimenti dei nuclei la variazione di energia è $\Delta E \simeq 100 \; keV \div 10 \; MeV$. I decadimenti radiativi con le vite medie più brevi, $\tau \geq 10^{-16} \; s$, hanno larghezza di decadimento $\Gamma \leq 10 \; eV$, quindi gli stati di energia non si sovrappongono e, a tutti gli effetti, il decadimento dei nuclei avviene tra stati *quasi* stazionari.

2.4.3 Decadimenti in cascata

Se un nucleo prodotto in un decadimento è a sua volta radioattivo si producono decadimenti in cascata. Questo fenomeno interessa principalmente i nuclei pesanti che danno origine a catene radioattive con molti decadimenti in cascata. Se τ_1 è la vita media del decadimento $nucleo_1 \to nucleo_2$ e questo a sua volta decade con vita media τ_2, abbiamo

$$dN_1 = -\lambda_1 N_1 dt \qquad\qquad dN_2 = -\lambda_2 N_2 dt + \lambda_1 N_1 dt$$

La soluzione per il numero di nuclei$_2$ è del tipo

$$N_2(t) = ae^{-\lambda_1 t} + be^{-\lambda_2 t}$$

Supponiamo che all'istante $t = 0$ il numero di nuclei$_1$ sia N_o e che non ci siano nuclei$_2$, $N_2(0) = 0$. In questo caso la variazione del numero di nuclei$_2$ all'istante $t = 0$ è uguale all'attività dei nuclei$_1$

$$N_2(t = 0) = a + b = 0 \qquad\qquad \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{t=0} = -a\lambda_1 - b\lambda_2 = \lambda_1 N_o$$

e, determinando le costanti con le condizioni inizali, $a = -b = N_o\lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1)$, si ottengono le attività dei nuclei in funzione del tempo

$$A_1(t) = N_o\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \qquad A_2(t) = \frac{N_o\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Esempio: $\tau_2 < \tau_1$ $(\lambda_2 > \lambda_1)$

In questo caso il nucleo$_2$ decade più rapidamente nel nucleo che lo genera e la sua attività, nulla a $t = 0$, aumenta fino a superare l'attività del nucleo$_1$ al tempo $t^* = (\ln \lambda_2/\lambda_1)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ e poi diminuisce. Per $t \gg t^*$ si raggiunge una situazione di equilibrio in cui il rapporto tra le attività è approssimativamente costante (Fig.2.17)

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}\right] \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Questa situazione si definisce di *equilibrio transiente*. Se $\tau_2 \ll \tau_1$, all'equilibrio i nuclei$_2$ decadono non appena vengono formati e le attività sono approssimativamente uguali $\lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1$. Questa situazione si definisce di *equilibrio secolare*.

Esempio: $\tau_2 > \tau_1$ $(\lambda_2 < \lambda_1)$

In questo caso l'attività dei nuclei$_2$ aumenta rapidamente per effetto dei decadimenti dei nuclei$_1$ e raggiunge il valore massimo al tempo $t^* = (\ln \lambda_1/\lambda_2)/(\lambda_1 - \lambda_2)$. A tempi $t \gg t^*$ il numero di nucleo$_1$ è molto diminuito e l'attività dei nuclei$_2$ decresce esponzialmente con vita media τ_2 (Fig.2.17). In questo caso non si raggiunge una situazione di equilibrio tra le attività.

Catene radioattive

Se sono coinvolti più nuclei, abbiamo

$$\begin{aligned} dN_1 &= -\lambda_1 N_1 dt \\ dN_2 &= -\lambda_2 N_2 dt + \lambda_1 N_1 dt \\ &\cdots \\ dN_n &= -\lambda_n N_n dt + \lambda_{n-1} N_{n-1} dt \end{aligned}$$

e la soluzione per le popolazioni dei nuclei è del tipo

$$\begin{aligned} N_1(t) &= N_{11} e^{-i\lambda_1 t} \\ N_2(t) &= N_{21} e^{-i\lambda_1 t} + N_{22} e^{-i\lambda_2 t} \\ &\cdots \\ N_n(t) &= N_{n1} e^{-i\lambda_1 t} + N_{n2} e^{-i\lambda_2 t} + \ldots + N_{nn} e^{-i\lambda_n t} \end{aligned}$$

in cui la popolazione di nuclei$_k$ al tempo t è espressa in funzione delle costanti di decadimento dei nuclei $1,\ 2, \ldots,\ k-1$. La soluzione si semplifica se inizialmente

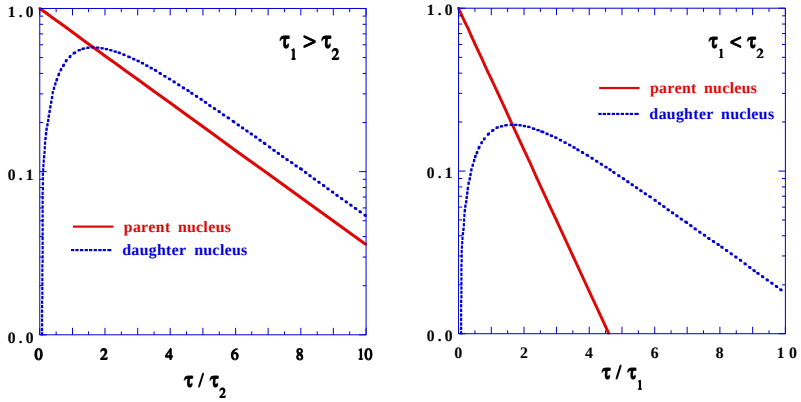


Figure 2.17: Attività dei nuclei nei decadimenti in cascata

sono presenti solo i nuclei$_1$ ($N_1(0) = N_o$ e $N_2(0) = N_3(0) = \ldots = N_k(0) = 0$). In questo caso i coefficienti sono

$$N_{jk} = N_o \frac{\prod_{i \neq j} \lambda_i}{\prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_k)} = N_o \frac{\lambda_1 \ldots \lambda_k}{(\lambda_1 - \lambda_k) \ldots (\lambda_j - \lambda_k)}$$

In alcuni casi particolari, quando il primo nucleo della catena è molto meno stabile dei successivi, $\lambda_1 \ll \lambda_2 < \ldots \lambda_n$, si raggiunge una situazione di equilibrio secolare in cui $N_1\lambda_1 = N_2\lambda_2 = \ldots = N_n\lambda_n$.

2.4.4 Produzione di nuclei radioattivi

Se un nucleo radioattivo che ha vita media τ viene prodotto ad un tasso Λ costante, ad esempio con una reazione nucleare in cui il flusso di proiettili è costante, si ha

$$dN = \Lambda dt - \lambda N dt \qquad \frac{d\lambda N}{\lambda N - \Lambda} = -\lambda dt$$

La soluzione è

$$N(t) = \frac{1}{\lambda}(\Lambda + Ce^{-\lambda t}) = \tau(\Lambda + Ce^{-t/\tau})$$

Se non ci sono nuclei radioattivi all'istante iniziale, $N(0) = \tau(\Lambda + C) = 0$, si ha

$$N(t) = \Lambda\tau(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \lim_{t \to \infty} N(t) = \Lambda\tau$$

2.5 Decadimento γ

Un nucleo può trovarsi in uno stato eccitato e decadere allo stato fondamentale, o a uno stato di energia più bassa, mediante emissione di radiazione elettromagnetica

$$ {}^{A}_{Z}X^{*} \;\rightarrow\; {}^{A}_{Z}X + \gamma $$

Le differenze tra i livelli di energia dei nuclei sono tipicamente comprese nell'intervallo $0.1 \div 10\ MeV$. La differenza di energia si divide tra l'energia del fotone e l'energia cinetica di rinculo del nucleo ${}^{A}_{Z}X$: $\Delta E = E_\gamma + K_N$ ($K_N \ll \Delta E$ ma in alcune applicazioni non è trascurabile). Nel decadimento γ si conserva il momento angolare e la parità e quindi la misura delle caratteristiche della radiazione γ fornisce informazioni sui livelli di energia e sullo spin e parità degli stati dei nuclei.

2.5.1 Radiazione di multipolo

L'osservazione della radiazione γ si fa a distanza molto grande rispetto alle dimensioni del nucleo e la lunghezza d'onda è tipicamente $\lambda = 2\pi\ \hbar c/E_\gamma = 10^2 \div 10^4\ fm$, sono quindi valide le approssimazione per lo sviluppo del campo elettromagnetico in multipoli nella *zona di radiazione* (appendice 4.8). Il campo elettromagnetico prodotto da cariche e correnti dipendenti dal tempo si può ottenere come sviluppo di Fourier delle componenti di frequenza ω e come sviluppo in multipoli caratterizzati dal valore del momento angolare della radiazione emessa. La potenza irraggiata a frequenza ω e con momento angolare l è

$$ W^{E}_{lm} = \frac{c}{2\epsilon_o}\ |a^{E}_{lm}|^2 = \frac{c}{2\epsilon_o}\ \frac{1}{[(2l+1)!!]^2}\left(\frac{l+1}{l}\right)\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2l+2}\ |Q_{lm} + Q'_{lm}|^2 $$

$$ W^{B}_{lm} = \frac{c\mu_o}{2}\ |a^{B}_{lm}|^2 = \frac{c\mu_o}{2}\ \frac{1}{[(2l+1)!!]^2}\left(\frac{l+1}{l}\right)\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2l+2}\ |M_{lm} + M'_{lm}|^2 $$

dove Q_{lm} e M_{lm} sono i momenti di $2^l - polo$ elettrici e magnetici: dipolo ($l = 1$), quadrupolo ($l = 2$), ottupolo ($l = 3$), ... Non esiste radiazione di monopolo perché la carica totale si conserva. Per una particella di carica e, massa m e momento magnetico $\mu = ge\hbar/2m$

$$ Q_{lm} = e\ r^l\ Y^{*}_{lm}(\theta,\phi) \qquad\qquad M_{lm} = \frac{e\hbar}{2mc}\ r^{l-1}\left[g - \frac{2l}{l+1}\right]\ Y^{*}_{lm}(\theta,\phi) $$

I momenti di $2^l - polo$ hanno parità diversa per le componenti di radiazione elettrica e magnetica perché il campo elettrico è un vettore polare, $P \cdot \vec{E} = -\vec{E}$, e il campo magnetico è un vettore assiale, $P \cdot \vec{B} = +\vec{B}$,

$$ P(Q_{lm}) = (-1)^l \qquad\qquad P(M_{lm}) = (-1)^{l-1} $$

Per calcolare la costante di decadimento del processo ${}^{A}_{Z}X^{*} \;\rightarrow\; {}^{A}_{Z}X + \gamma$ seguiamo il procedimento illustrato nel capitolo ???

- quantizzare le sorgenti del campo, cioè definire le funzioni d'onda del nucleo nello stato iniziale e finale;
- quantizzare il campo di radiazione (appendice 4.13);
- sostituire ai momenti di $2^l - polo$ gli operatori che agiscono sullo stato iniziale del nucleo $|i_N\rangle$ e producono lo stato finale $|f_N\rangle$ e un fotone in stato di momento angolare $|l, m\rangle$;
- calcolare gli elementi di matrice degli operatori di multipolo tra gli stati iniziale e finale, questo seleziona la componente del campo di radiazione a frequenza $\omega = E_\gamma/\hbar$;
- calcolare la costante di decadimento con la regola d'oro di Fermi che, come abbiamo visto, corrisponde a calcolare il rapporto tra la potenza emessa nella transizione $|i_N\rangle \to |f_N\rangle$ e l'energia E_γ.

Supponiamo di descrivere il nucleo col modello a strati a particelle indipendenti e che le funzioni d'onda siano fattorizzabili in una dipendenza radiale e una angolare $\psi(r, \theta, \phi) = u(r)Y(\theta, \phi)$. Il calcolo degli elementi di matrice $\langle f_N|Q_{lm}|i_N\rangle$, $\langle f_N|M_{lm}|i_N\rangle$, è difficile perché la parte radiale delle funzioni d'onda in generale non è nota. D'altra parte il principio di esclusione di Pauli, per cui un nucleone non può stare in uno stato già occupato, impedisce che la funzione d'onda di un nucleone possa variare molto. Facciamo quindi l'ipotesi che l'emissione di radiazione sia legata alla variazione della parte angolare della funzione d'onda e che la parte radiale sia cambiata poco.

Separando la dipendenza radiale e angolare degli operatori di multipolo l'elemento di matrice si esprime

$$\int u_f^*(r)Y_{I_f M_f}^*(\theta,\phi)\ \mathcal{R}(r)Y_{lm}^*(\theta,\phi)\ u_i(r)Y_{I_i M_i}(\theta,\phi)\ r^2 dr d\cos\theta d\phi$$

L'integrazione sugli angoli produce le regole di selezione

$$|I_i - I_f| \le l \le I_i + I_f \qquad ma\ non\ I_i = 0 \to I_f = 0 \qquad\qquad m = M_i - M_f$$

e l'integrale della parte radiale ha valore medio

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \frac{\int u_f^*(r)\ \mathcal{R}(r)\ u_i(r)\ r^2 dr}{\int u_f^*(r)\ u_i(r)\ r^2 dr}$$

Se facciamo l'ulteriore ipotesi che la funzione d'onda radiale varii poco in una regione delle dimensioni del nucleo e che sia nulla per $r > R$ otteniamo

$$\langle f_N|Q_{lm}|i_N\rangle \approx e\ \frac{\int_o^R r^{l+2} dr}{\int_o^R r^2 dr} = e\ \frac{3}{l+3}\ R^l$$

$$\langle f_N|M_{lm}|i_N\rangle \approx \frac{e\hbar}{2mc}\left[g - \frac{2l}{l+1}\right]\ \frac{\int_o^R r^{l+1} dr}{\int_o^R r^2 dr} = \frac{e\hbar}{mc}\left[\frac{g}{2} - \frac{l}{l+1}\right]\ \frac{3}{l+2}\ R^{l-1}$$

dove m è la massa del nucleone e $g/2$ è il momento magnetico espresso in magnetoni nucleari.

I valori che si ottengono per la costante di decadimento $\lambda_{lm} = W_{lm}/E_\gamma$, detti *stime di Weisskopf della costante di decadimento*, sono molto approssimati ma possono fornire utili informazioni per distinguere i modi di decadimento γ. Sostituendo le espressioni trovate:

$$\lambda(E_l) = \frac{1}{E}\,\frac{c}{2\epsilon_o}\,\frac{l+1}{l[(2l+1)!!]^2}\left(\frac{E}{\hbar c}\right)^{2l+2}|\langle f_N|Q_{lm}|i_N\rangle|^2 =$$

$$= \pi\alpha c\,\frac{l+1}{l[(2l+1)!!]^2}\,\frac{18}{(l+3)^2}\,\frac{E^{2l+1}\,R^{2l}}{(\hbar c)^{2l+1}}$$

$$\lambda(M_l) = \frac{1}{E}\,\frac{c\mu_o}{2}\,\frac{l+1}{l[(2l+1)!!]^2}\left(\frac{E}{\hbar c}\right)^{2l+2}|\langle f_N|M_{lm}|i_N\rangle|^2 =$$

$$= \pi\alpha c\,\frac{l+1}{l[(2l+1)!!]^2}\,\frac{18}{(l+2)^2}\left[\mu - \frac{l}{l+1}\right]^2\frac{E^{2l+1}\,R^{2l-2}}{(\hbar c)^{2l-1}\,(mc^2)^2}$$

Introducendo la dipendenza del raggio del nucleo dal numero di nucleoni, $R = R_o A^{1/3}$, troviamo il valore approssimato della costante di decadimento, espresso in s^{-1}, in funzione dell'energia, espressa in MeV, e del peso atomico

decadimento				*parità*
$\lambda(E1)$	$=$	$3.8\ 10^{14}$	$A^{2/3}E^3$	-1
$\lambda(E2)$	$=$	$3.2\ 10^{8}$	$A^{4/3}E^5$	$+1$
$\lambda(E3)$	$=$	$1.7\ 10^{2}$	$A^{2}E^7$	-1
$\lambda(E4)$	$=$	$7.6\ 10^{-3}$	$A^{8/3}E^9$	$+1$
$\ldots$				
$\lambda(M1)$	$=$	$8.8\ 10^{13}$	E^3	$+1$
$\lambda(M2)$	$=$	$6.5\ 10^{7}$	$A^{2/3}E^5$	-1
$\lambda(M3)$	$=$	$3.3\ 10^{1}$	$A^{4/3}E^7$	$+1$
$\lambda(M4)$	$=$	$1.1\ 10^{-5}$	$A^{2}E^9$	-1
$\ldots$				

La tabella definisce una chiara gerarchia di valori della probabilità di decadimento per le diverse transizioni. Ad esempio un nucleo con spin $3/2$ può decadere in uno stato con spin $1/2$ emettendo raggi γ con $l = 1$ o $l = 2$. Se gli stati dei nuclei hanno la stessa parità la transizione avviene come $M1$ oppure $E2$, con $\lambda \approx \lambda(M1) \gg \lambda(E2)$. Se gli stati hanno parità opposta la transizione avviene come $E1$ oppure $M2$, con $\lambda \approx \lambda(E1) \gg \lambda(M2)$.

2.5.2 Conversione interna

Un nucleo in uno stato eccitato ${}^A_Z X^*$ può decadere allo stato fondamentale ${}^A_Z X$ senza emettere radiazione γ, ma cedendo l'energia di eccitazione a un elettrone atomico.

La conversione interna produce elettroni monocromatici di energia cinetica

$$K_e = \Delta M c^2 - BE_e$$

dove BE_e è l'energia di legame dell'elettrone. L'espulsione di un elettrone è usualmente accompagnata dall'emissione di raggi X.

Per effetto della conversione interna la vita media di uno stato eccitato è più breve di quanto previsto dal solo processo di decadimento radiativo poiché le probabilità di decadimento si sommano

$$\lambda = \lambda_\gamma + \lambda_e = \lambda_\gamma(1 + \kappa)$$

$\kappa_n = \lambda_e/\lambda_\gamma$ (n indica il numero principale dell'orbitale atomico) è il coefficiente di conversione interna ed è di solito piccolo per $n > 1$ e per nuclei con Z piccolo. Sviluppando il campo elettromagnetico del nucleo in momenti di multipolo, un calcolo approssimato in cui si trascurano la variazione delle funzioni d'onda degli elettroni atomici all'interno del volume del nucleo ed effetti relativistici sulla funzione d'onda dell'elettrone emesso, fornisce la seguente dipendenza per transizioni di 2^l-polo elettrico e magnetico

$$\kappa_n(E, l) = \alpha^4 \, \frac{Z^3}{n^3} \, \frac{l}{l+1} \left(\frac{2m_e c^2}{E} \right)^{l+5/2}$$

$$\kappa_n(M, l) = \alpha^4 \, \frac{Z^3}{n^3} \left(\frac{2m_e c^2}{E} \right)^{l+3/2}$$

dove α è la costante di struttura fine e $E = \Delta M c^2$.

2.5.3 Spettroscopia γ

Il dettaglio dell'informazione che si ottiene nello studio della radiazione γ dipende dalla risoluzione con cui si riescono a fare le misure spettroscopiche. Le misure di spettroscopia si possono fare in emissione o in assorbimento. Nel primo caso la risoluzione è quella dello strumento di misura che, nell'intervallo di energia dei raggi γ, è tipicamente $2 \div 3 \; keV$. D'altra parte la larghezza intrinseca delle righe di emissione γ è molto più piccola (per le transizioni con le costanti di decadimento più grandi si ha $\Gamma = \hbar\lambda \approx 1 \; eV$) e quindi la risoluzione non è limitata da effetti quantistici. Nella spettrocopia in assorbimento la risoluzione è limitata dalla risoluzione della sorgente che emette, ma nella regione di energia dei raggi γ non è facile realizzare una sorgente di frequenza variabile. Inoltre, appunto perché la larghezza di riga è piccola, l'assorbimento da uno spettro continuo è molto ridotto e per le transizioni γ dei nuclei non si riesce a osservare l'assorbimento risonante, la *fluorescenza nucleare*. In questo caso infatti l'energia cinetica di rinculo del nucleo è sufficiente a spostare l'energia dei raggi γ fuori risonanza.

Se ΔE è la differenza di energia dei livelli del nucleo, in *emissione* si ha $\Delta E = E_\gamma + K_N$, $\vec{p}_\gamma + \vec{p}_N = 0$

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \qquad\qquad E_\gamma^{em} = \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$$

In *assorbimento* si ha $E_\gamma = \Delta E + K_N$, $\vec{p}_\gamma = \vec{p}_N$

$$E_\gamma = \Delta E + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \qquad\qquad E_\gamma^{ass} = \Delta E + \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$$

Se, ad esempio, $\Delta E = 0.5\ MeV$ e consideriamo un nucleo con $A = 64$, massa $Mc^2 = 6\ 10^4\ MeV$, la differenza tra l'energia in assorbimento e in emissione è $E_\gamma^{ass} - E_\gamma^{em} = 4.2\ eV$, mentre la larghezza di riga, nel caso più favorevole di decadimento $E1$, è $\Gamma = 0.5\ eV$ (Fig.2.18).

D'altra parte l'allargamento di riga dovuto all'agitazione termica è anch'esso piccolo. Per valutare l'effetto, consideriamo un nucleo con velocità v_x nella direzione di osservazione della radiazione. L'energia viene modificata per effetto Doppler: $E'_\gamma = E_\gamma\ (1 \pm v_x/c)$. A temperatura T le velocità dei nuclei seguono la distribuzione di Maxwell con andamento $\sim exp(-Mv_x^2/2kT)$ e la distribuzione di energia attorno al valor medio E_γ ha l'andamento $\sim exp[-Mc^2(E'_\gamma - E_\gamma)^2/2E_\gamma^2 kT]$ con varianza $\sigma^2 = E_\gamma^2 kT/Mc^2$ e larghezza

$$\Gamma_T = 2\sigma(2\ln 2)^{1/2} = 2E_\gamma \left(2\ln 2\ \frac{kT}{Mc^2}\right)^{1/2}$$

A temperatura ambiente, $kT = 0.025\ eV$, abbiamo $\Gamma_T = 1.2\ 10^{-5}\ E_\gamma/A^{1/2}$. Con i dati dell'esempio precedente: $\Gamma_T = 0.8\ eV$.

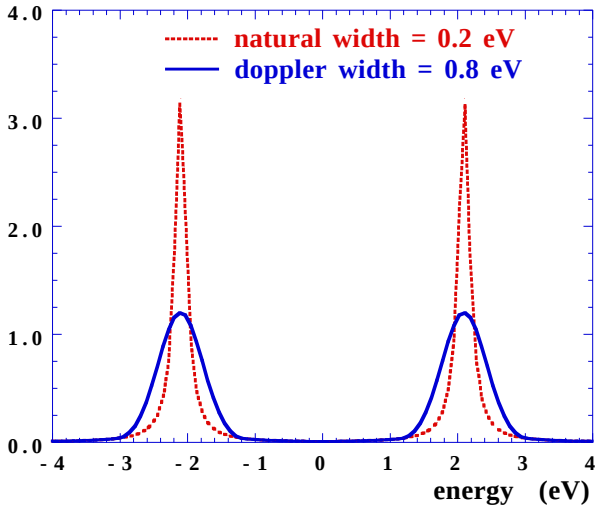


Figure 2.18: Righe in emissione e assorbimento e larghezza di riga

Si può ottenere assorbimento di risonanza sfruttando l'effetto Doppler con la sorgente e l'assorbitore in moto relativo con velocità v, ma occorrono velocità molto elevate

$$E_\gamma \frac{v}{c} = \frac{(\Delta E)^2}{Mc^2} \qquad\qquad v = c \frac{E_\gamma}{Mc^2}$$

Con i dati dell'esempio precedente: $v = 2500\ m/s$! Esperimenti di questo tipo sono stati effettuati con radiazione di bassa energia e con nuclei pesanti.

Un metodo di assorbimento di risonanza comunemente usato e particolarmente ingegnoso è basato sull'*effetto Mössbauer* [16] in cui si sfrutta l'assenza di rinculo del nucleo se questo è vincolato in un reticolo cristallino. In questo caso è l'intero cristallo che assorbe l'energia di rinculo del nucleo e la dissipa in modi vibrazionali del reticolo se si verificano le condizioni

- l'energia di rinculo del nucleo non è grande rispetto all'energia di legame dell'atomo nel reticolo, che è tipicamente di qualche eV;
- il cristallo ha una temperatura di Debye elevata in modo da avere un'ampia banda di modi vibrazionali ($\hbar\Delta\omega = k\Theta_D$) per dissipare l'energia di rinculo del nucleo (valori tipici della temperatura di Debye sono $\Theta_D \approx 500\ K$).

La frazione di nuclei che non hanno rinculo per emissione o assorbimento di radiazione γ di energia E è

$$f_{bound} = exp\left\{-\frac{3E^2}{4Mc^2\ k\Theta_D}\left[1 + 4\left[\frac{T}{\Theta_D}\right]^2 \int_o^{\Theta_D/T} \frac{xdx}{e^x - 1}\right]\right\}$$

Operando a temperatura $T \ll \Theta_D$ il secondo termine della relazione precedente si può trascurare. Si ottengono frazioni f_{bound} apprezzabili con E_γ piccoli, nuclei pesanti e temperature di Debye elevate. In spettroscopia Doppler usando l'effetto Mössbauer la risoluzione è definita dalla velocità relativa tra sorgente e assorbitore, $\delta E_\gamma/E_\gamma = v/c$: con velocità $v \simeq 1\ cm/s$ si risolvono larghezze di decadimento $\Gamma \simeq 10^{-6}\ eV$ di transizioni con $E_\gamma \simeq 100\ keV$, con una precisione relativa di 10^{-11} !

2.6 Decadimento α

I nuclei pesanti emettono radiazione poco penetrante sotto forma di particelle con carica positiva. Questo fenomeno fu studiato fin dai primi anni del '900 da M.Curie e E.Rutherford. Nel 1903 Rutherford misurò il rapporto q/m studiando la deviazione delle traiettorie in presenza di campo magnetico e campo elettrico e ottenne un valore pari a 2/3 del valore del protone. Nel 1909 facendo decadere una sostanza sotto vuoto e analizzando il gas osservò che questo conteneva elio: scoprì che le particelle α sono nuclei di elio. Con studi sistematici fatti negli anni seguenti con diverse sorgenti di radiazione α Geiger e Nuttal mostrarono che le particelle α emesse da diversi nuclei radioattivi hanno energia cinetica in un intervallo di pochi MeV

[16] premio Nobel per la fisica nel 1961

e che la vita media varia su molti ordini di grandezza con dipendenza dall'energia approssimativamente esponenziale. La caratteristiche principali del decadimento α si possono così riassumere

- gran parte dei nuclei con $A \geq 200$ decadono α;
- le particelle α sono nuclei di elio (il nucleo di elio è uno stato molto stabile con energia di legame $BE = 28.3\ MeV$);
- le particelle α emesse in un decadimento sono monocromatiche: si tratta di un decadimento a due corpi

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y \ + \ {}^{4}_{2}He $$

- l'energia cinetica delle particelle α varia in un piccolo intervallo, tipicamente $4 < K_\alpha < 8\ MeV$;
- la vita media ha una forte dipendenza dall'energia cinetica e nell'intervallo $4 \div 8\ MeV$ varia per più di 20 ordini di grandezza (Fig.2.19) secondo la

$$ \textit{legge di Geiger-Nuttal} \qquad\qquad ln\ \tau = a - b\ \ln K $$

- a parità di energia la vita media aumenta col peso atomico A.

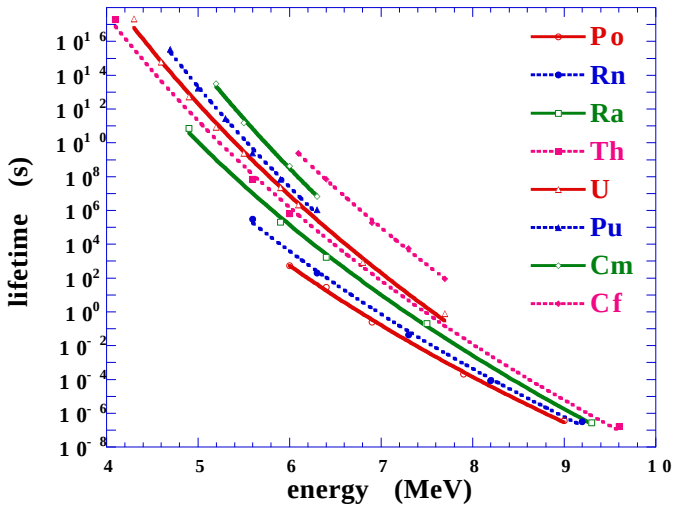


Figure 2.19: Vita media del decadimento α in funzione dell'energia cinetica

La cinematica del decadimento α è semplice. Nel riferimento del nucleo genitore: $M_X c^2 = M_Y c^2 + M_\alpha c^2 + K_Y + K_\alpha$, $\vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha = 0$

$$ (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2 = Q = \frac{p^2}{2M_y} + \frac{p^2}{2M_\alpha} = \frac{p^2}{2M_\alpha}\left[1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}\right] $$

e, poiché i nuclei che decadono hanno massa $M \gg M_\alpha$, l'energia cinetica della particella α è approssimativamente uguale all'energia disponibile e l'energia cinetica di rinculo del nucleo Y è piccola

$$K_\alpha = \frac{Q}{1 + M_\alpha/M_Y} \approx Q\left(1 - \frac{4}{A}\right) \qquad K_Y = Q\,\frac{M_\alpha/M_Y}{1 + M_\alpha/M_Y} \approx Q\,\frac{4}{A} \qquad K_\alpha \gg K_Y$$

2.6.1 Soglia di instabilità

Definiamo per quali valori di A e Z il decadimento α è energeticamente possibile. In un decadimento parte della massa dello stato inziale è convertita in energia cinetica dei prodotti nello stato finale. La massa del nucleo è pari alla somma delle masse dei nucleoni costituenti *meno* l'energia di legame e, poiché nell'emissione α i nucleoni non cambiano natura, il decadimento può avvenire solo se l'energia di legame per nucleone aumenta. L'andamento dell'energia di legame per nucleone, $\overline{BE} = BE/A$, in funzione di A indica che questo avviene nella regione dei nuclei con $A > 60$ dove $\partial\overline{BE}/\partial A < 0$. L'energia rilasciata nel decadimento ($c = 1$) è

$$Q = M_X - M_Y - M_\alpha = A(\overline{BE}_Y - \overline{BE}_X) - 4(\overline{BE}_Y - \overline{BE}_\alpha) > 0$$

L'energia di legame media della particella α ($\overline{BE}_\alpha = 7.1\ MeV$) è minore di quella dei nuclei pesanti: il secondo termine è positivo e quindi la soglia di instabilità sarà nettamente maggiore di $A = 60$.

Possiamo rendere l'argomento più quantitativo usando la formula di Bethe-Weizsäcker

$$M(A,Z) = Zm_p + (A-Z)m_n - b_0 A + b_1 A^{2/3} + b_2 Z^2 A^{-1/3} + b_3 (A-2Z)^2 A^{-1}$$

L'energia rilasciata, $Q = M(A,Z) - M(A-4, Z-2) - M_\alpha = BE_\alpha - \Delta BE$, è

$$Q \approx BE_\alpha - 4b_o + 4\left[\frac{2}{3}\,b_1 + b_2 Z\left(1 - \frac{Z}{3A}\right)\right] A^{-1/3} - 4b_3\left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2$$

Introducendo i valori dei parametri b_k (capitolo ???) si ottengono le linee $Q =$ *costante* nel piano $A - Z$ corrispondenti alle soglie di instabilità del decadimento per emissione di particelle α con energia cinetica $K_\alpha \approx Q$ (Fig.2.20). Osserviamo che $A \approx 140$ per $Q = 0$, $A \approx 200$ per $Q = 4\ MeV$ e $A \approx 240$ per $Q = 8\ MeV$. Quindi il decadimento α è energeticamente possibile anche per nuclei con $A < 200$ ma, come abbiamo già detto, vi è una fortissima dipendenza della vita media dall'energia cinetica e i decadimenti con $Q < 4\ MeV$ hanno vite medie così lunghe da renderli difficilmente osservabili. I nuclei emettitori α con $Q < 4\ MeV$ sono essenzialmente nuclei stabili.

2.6.2 Teoria elementare del decadimento α

Il decadimento avviene con l'espulsione della particella α da un nucleo con peso atomico A grande. Dopo l'espulsione la particella α ha energia cinetica $K \approx Q$. Per capire il meccanismo del fenomeno facciamo queste ipotesi

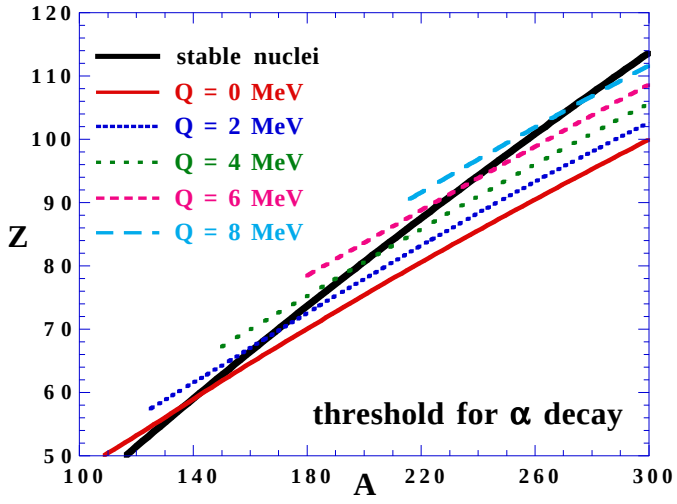


Figure 2.20: Linee di instabilità per il decadimento α

- il nucleo ${}^{A}_{Z}X$ è uno stato legato composto dal nucleo ${}^{A-4}_{Z-2}Y$ e da una particella α (questa ipotesi è giustificata dal fatto che la particella α è uno stato fortemente legato di due protoni e due neutroni);

- il potenziale del sistema ${}^{A-4}_{Z-2}Y - \alpha$ è rappresentato da una buca di potenziale a simmetria sferica per $r < R$ e dal potenziale coulombiano per $r > R$ (Fig.2.21); r è la distanza tra la particella α e il centro di simmetria del sistema e R è il raggio di sovrapposizione del nucleo ${}^{A-4}_{Z-2}Y$ e della particella α, $R^2 = R_Y^2 + R_\alpha^2$

$$U(r) = -U_o \qquad r < R \qquad\qquad U(r) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_o r} = \alpha\hbar c\,\frac{2(Z-2)}{r} \qquad r > R$$

- la particella α all'interno della buca di potenziale ha energia positiva pari all'energia cinetica che acquista nel decadimento, $E = K_\alpha$.

Per un nucleo con $A > 200$ il raggio della buca di potenziale è tipicamente $R \approx 7 \div 8\ fm$, la profondità della buca di potenziale è tipicamente $U_o \approx 40\ MeV$, l'altezza della barriera di potenziale coulombiana, $U(R) = \alpha\hbar c 2(Z-2)/R$, è tipicamente $30\ MeV$. Quindi la particella α con energia $E < U(R)$ non può superare la barriera di potenziale coulombiana.

In meccanica quantistica la particella α può *attraversare* la barriera di potenziale per *effetto tunnel*. Questa ipotesi per spiegare il decadimento α fu elaborata da Gamow e, indipendentemente, da Condon e Gurney nel 1928 e riproduce con buona approssimazione la legge di Geiger-Nuttal. Si tratta di uno dei primi successi della meccanica quantistica sviluppata in quegli anni.

All'interno della buca di potenziale la particella α ha energia E positiva e quindi oscilla urtando la barriera con frequenza f. La probabilità di decadimento nell'unità di tempo si può determinare dalla frequenza e dalla probabilità di attraversamento

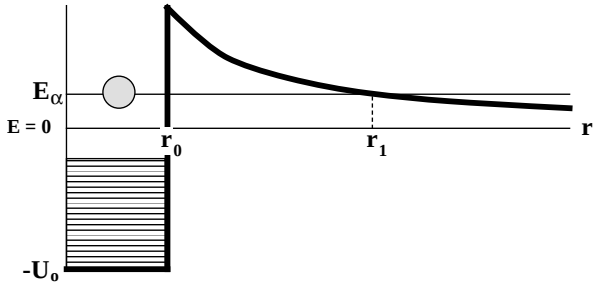


Figure 2.21: Modello di Gamow del decadimento α

della barriera per effetto tunnel, T,

$$\frac{1}{\tau} = \lambda = f\ T$$

Per una particella di massa m e energia E, il coefficiente di trasmissione attraverso una barriera di potenziale unidimensionale (appendice 4.9) di altezza media $\overline{U}$ e larghezza L è

$$T = \frac{16k^2k_b^2}{(k^2+k_b^2)^2}\ e^{-2k_bL}$$

dove $\hbar\vec{k}$ è l'impulso della particella libera e $\hbar\vec{k}_b$ è l'impulso della particella all'interno della buca

$$\hbar k = (2mE)^{1/2} \qquad\qquad \hbar k_b = [2m(\overline{U}-E)]^{1/2}$$

Nel caso delle particelle α ($m = 3727\ MeV/c^2$) con i valori tipici dell'energia e del potenziale abbiamo $k_b \approx 2k$. Poiché la dipendenza del coefficiente di trasmissione dall'energia è contenuta essenzialmente nel termine esponenziale, possiamo approssimare $T \approx e^{-2k_bL}$. Nel caso di una barriera di potenziale tridimensionale a simmetria sferica, dobbiamo utilizzare l'equazione di Schrödinger in coordinate sferiche e abbiamo, oltre al potenziale $U(r)$, il termine di energia rotazionale $\hbar^2\ell(\ell+1)/2mr^2$ dove ℓ è il momento angolare della particella α. Trascuriamo per il momento questo effetto che, come vedremo, introduce una piccola correzione. Il coefficiente di trasmissione è $T \approx e^{-2G}$ dove G è il

$$\textit{fattore di Gamow} \qquad\qquad G = \frac{1}{\hbar}\int_{r_o}^{r_1}(2m[U(r)-E])^{1/2}\,dr$$

e l'integrale va esteso all'intervallo in cui $U(r) \geq E$: r_o è il raggio della buca di potenziale e r_1 è la distanza per cui $U(r_1) = E$, cioè $r_1 = 2(Z-2)\alpha\hbar c/E$, e $U(r) - E = E(r_1/r - 1)$

$$G = \frac{(2mE)^{1/2}}{\hbar}\int_{r_o}^{r_1}\left(\frac{r_1}{r}-1\right)^{1/2}dr = \frac{(2mE)^{1/2}}{\hbar}\ r_1\int_{x_o}^{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{1/2}dx$$

con $x = r/r_1$, $x_o = r_o/r_1 = RE/2(Z-2)\alpha\hbar c$.

- L'integrale nella relazione precedente si calcola sostituendo la variabile

$$x \to y = x^{1/2} \qquad \int_{x_o}^{1} (1-x)^{1/2} x^{-1/2} dx = \int_{y_o}^{1} 2(1-y^2)^{1/2} dy$$

$$y \to \phi = \arccos y \qquad \int_{y_o}^{1} 2(1-y^2)^{1/2} dy = \int_{\phi_o}^{0} 2 \sin\phi \, d\cos\phi = [\sin\phi\cos\phi - \phi]_{\phi_o}^{0}$$

$$\int_{x_o}^{1} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{1/2} dx = F(x_o) = \arccos x_o^{1/2} - x_o^{1/2}(1-x_o)^{1/2}$$

La funzione $F(r_o/r_1)$ dipende leggermente dai parametri dei nuclei e, poiché si ha tipicamente $r_1/r_o \sim 6-8$, si può approssimare

$$F(x_o) = \arccos\ x_o^{1/2} - x_o^{1/2}\ (1-x_o)^{1/2} \approx \pi/2 - 2\ x_o^{1/2} + \ \ldots$$

Quindi otteniamo il fattore di Gamow in funzione della carica elettrica Z, del raggio R (che dipende da A) e dell'energia E

$$G = 2(Z-2)\alpha \left[\frac{2mc^2}{E}\right]^{1/2} F(Z,R,E)$$

La frequenza con cui la particella α oscilla *all'interno della buca di potenziale* è il rapporto tra la velocità, v_α^i, e il raggio R. Poiché la particella α è un bosone, il suo moto non è impedito all'interno della buca di potenziale e l'energia è $E + U_o$ e la velocità

$$v_\alpha^i = \left[\frac{2(E+U_o)}{m}\right]^{1/2} = c\left[\frac{2(E+U_o)}{mc^2}\right]^{1/2}$$

è tipicamente $v_\alpha^i \approx 0.15c$. La frequenza $f = v_\alpha^i/R$ dipende leggermente dall'energia E. Con $R \approx 6 \div 8\ fm$ si ha $f \approx (5 \div 6)\ 10^{21}\ s^{-1}$.

Quindi per la vita media si ha

$$\frac{1}{\tau} = \frac{v_\alpha^i}{R}\ exp\left\{-8\alpha(Z-2)\left[\frac{2mc^2}{E}\right]^{1/2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{RE}{2(Z-2)\alpha\hbar c}\right)^{1/2} + \ldots\right]\right\}$$

La formula di Gamow, che possiamo scrivere

$$\ln\tau = a - \ln(E+b)^{-1/2} + cE^{-1/2}$$

con $a,\ b,\ c$ parametri che dipendono dalle caratteristiche del nucleo, riproduce la dipendenza osservata della vita media dall'energia della particella α e rende conto della variazione su più di 20 ordini di grandezza. Spiega inoltre che l'emissione con energia $K_\alpha < 4\ MeV$ avviene con vite medie molto grandi tali da rendere il fenomeno difficilmente osservabile. I dati sperimentali mostrano che, a energia $K_\alpha = costante$, la vita media aumenta col peso atomico. Infatti, all'aumentare di A, aumenta sia la carica elettrica che il raggio del nucleo e quindi aumenta il fattore di Gamow che dipende dall'altezza e dalla larghezza della barriera di potenziale.

Va notato che il fattore di Gamow è grande, $G \sim 30 \div 50$, e che anche una piccola indeterminazione dei parametri comporta una grande variazione sul valore di e^{-2G}. Il parametro più incerto è il raggio R utilizzato per calcolare il fattore di Gamow poiché i nuclei emettitori α hanno molti nucleoni e configurazioni irregolari. Se, ad esempio, calcoliamo la vita media di decadimento di alcuni istopi del Radio in transizioni $0^+ \to 0^+$, assumendo la dipendenza del raggio del nucleo, $R = R_o A^{1/3}$, con $R_o = 1.25\ fm$ otteniamo un valore della vita media circa 40 volte maggiore del valore misurato. Con un aumento del 10% del parametro R_o, che corrisponde ad un aumento del 5% del fattore di Gamow, si ottiene un accordo nettamente migliore.

decadimento	$K_\alpha\ (MeV)$	$\tau\ (s)$	$R_o = 1.25\ fm$	$R_o = 1.375\ fm$
${}^{226}_{88}Ra \to {}^{222}_{86}Rn$	4.9	$7.3\ 10^{10}$	$3.0\ 10^{12}$	$1.1\ 10^{11}$
${}^{224}_{88}Ra \to {}^{220}_{86}Rn$	5.8	$4.6\ 10^{5}$	$1.8\ 10^{7}$	$6.6\ 10^{5}$
${}^{222}_{88}Ra \to {}^{218}_{86}Rn$	6.7	$5.5\ 10^{1}$	$1.6\ 10^{3}$	$6.7\ 10^{1}$

La grande sensibilità del valore della vita media dei nuclei emettitori α dal raggio del nucleo fornisce quindi un metodo per misurare il raggio medio dei nuclei pesanti.

2.6.3 Dipendenza dal momento angolare

Decadimenti α possono avvenire con cambio dello spin e della parità del nucleo. Poiché la particella α ha *spin-parità* $= 0^+$, la conservazione del momento angolare e della parità implica

$$|I_f - I_i| \leq \ell \leq I_f + I_i \qquad\qquad P_f = (-1)^\ell P_i$$

se la particella α viene emessa con momento angolare orbitale ℓ. Se nella transizione cambia lo spin del nucleo, $\ell \neq 0$, occorre considerare oltre al potenziale coulombiano il *potenziale centrifugo*

$$U(r) = U_C(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2}$$

che risulta in un piccolo aumento della barriera di potenziale. Il fattore di Gamow è proporzionale al raggio esterno della barriera che si ottiene dalla relazione

$$\frac{2(Z-2)\alpha\hbar c}{r_1} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr_1^2} = E$$

r_1 aumenta tipicamente di $\sim 1\%$ per $\ell = 1$. Un aumento dell'1% del fattore di Gamow produce un aumento di un fattore $\sim 2 \div 3$ della vita media e l'effetto è maggiore per $\ell > 1$. Comunque questo effetto non è grande tenuto conto della grande variabilità della vita media.

Se la transizione ${}^{A}_{Z}Y \to {}^{A-4}_{Z-2}Y$ non è permessa dalle regole di selezione, il nucleo ${}^{A}_{Z}Y$ può decadere in uno stato eccitato ${}^{A-4}_{Z-2}Y^*$ che a sua volta decade nello stato fondamentale con emissione di raggi γ. In questo caso $Q \approx K_\alpha + E_\gamma$. In effetti gran parte dei decadimenti α sono seguiti dall'emissione di raggi γ tipicamente di bassa energia.

2.7 Decadimento β

Già nel 1900 Rutherford osservò l'emissione di particelle di carica negativa chiamate all'inizio particelle β e successivamente identificate come elettroni. Negli anni seguenti i risultati degli esperimenti mostrarono che con l'emissione β una sostanza cambia numero atomico e che decadimenti β avvengono in nuclei sia leggeri che pesanti e con vite medie distribuite su un grandissimo intervallo, da millisecondi a miliardi di anni. Nel 1919 Chadwick dimostrò che, oltre agli elettroni prodotti per conversione interna, che hanno energia ben definita, i nuclei emettono elettroni con una distribuzione di energia continua e che in una transizione

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}X + e^{-} + \ldots $$

il valore massimo dell'energia dell'elettrone è approssimativamente uguale alla differenza di massa tra i nuclei

$$ E_e^{max} \approx (M_X - M_Y)c^2 \qquad\qquad E_e = [(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2]^{1/2} $$

Se quindi gli elettroni emessi non sono elettroni atomici, il processo deve avere origine nel nucleo e, poiché i nuclei non contengono elettroni, deve corrispondere a una variazione del nucleo stesso. Nel 1933 Sargent analizzò la dipendenza della vita media di decadimento dall'energia degli elettroni e osservò che, per energie $E_e^{max} \gg m_e c^2$, la vita media è ha andamento proporzionale a $(E_e^{max})^{-5}$.

2.7.1 L'ipotesi del neutrino

In un decadimento β l'elettrone è emesso con una distribuzione continua di energia. Quindi, per conservare l'energia e l'impulso, oltre all'elettrone e al nucleo Y si deve emettere energia sotto forma di radiazione neutra, ma le misure hanno mostrato che in un decadimento β non vengono emessi fotoni. Misure accurate effettuate con tecniche calorimetriche hanno dimostrato che l'elettrone non perde energia nella sostanza e che in effetti il processo di emissione β è caratterizzato da un *difetto di energia*: parte dell'energia dello stato iniziale non viene misurata nello stato finale.

Oltre al problema dell'energia mancante, se si interpreta il decadimento β come un processo ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}X + e^{-}$, sorgono altri problemi legati alla statistica e alla conservazione del momento angolare. Infatti i nuclei X e Y hanno lo stesso numero di nucleoni, sono entrambe bosoni o entrambe fermioni: non è possibile avere solo un nuovo fermione nello stato finale. Se i nuclei sono bosoni, il momento angolare totale è un multiplo intero di $\hbar$ nello stato iniziale e semi-intero nello stato finale, e viceversa se sono fermioni. Questo spiega anche perché l'energia mancante nel decadimento β non è dovuta a emissione di radiazione γ.

Nel 1930 Pauli propose una soluzione anticonformista che suscitò molto scetticismo e che si rivelò l'interpretazione corretta: nel decadimento β viene emessa insieme all'elettrone una nuova particella neutra, che non interagisce né in modo elettromagnetico né in modo nucleare e che è un fermione di spin 1/2. Questa nuova

particella fu chiamata *neutrino* da Fermi. L'ipotesi del neutrino risolve il problema dell'energia mancante (il neutrino non interagisce nei rivelatori), della statistica e della conservazione del momento angolare. Poiché l'energia dell'elettrone si estende fino a $(M_X - M_Y)c^2$ il neutrino deve avere massa molto piccola.

Due altri fenomeni sono associati al decadimento β^-. Nel 1934 I.Curie e F.Joliot scoprirono l'emissione di positroni da parte dei nuclei: il decadimento β^+, e nel 1938 Luis Alvarez [17] scoprì la cattura di elettroni atomici da parte dei nuclei. Lo studio dei raggi X che seguono la cattura elettronica mostra che questa avviene quando l'elettrone è in un orbitale S cioè con una funzione d'onda che si sovrappone al nucleo. Il decadimento β è un processo a tre corpi

$$\begin{array}{ll} \textit{decadimento } \beta^- & {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} X + e^- + \overline{\nu} \\ \textit{decadimento } \beta^+ & {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} X + e^+ + \nu \end{array}$$

la cattura elettronica è equivalente al decadimento β^+ per simmetria di incrocio (appendice 4.21)

$$\textit{cattura elettronica} \qquad e^- + {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} X + \nu$$

2.7.2 Teoria elementare del decadimento β

Nel 1934 Fermi propose una teoria di campo che spiega il decadimento β con un nuovo tipo di interazione. L'idea di Fermi è la base dello sviluppo della teoria delle *interazioni deboli* che descrive molti altri processi che interessano nuclei e particelle elementari. Le ipotesi sono:

- nel decadimento β^- un neutrone del nucleo si trasforma in un protone con l'emissione di un elettrone e di un anti-neutrino (e analogamente per il decadimento β^+): *interazione a quattro fermioni* (Fig.2.22)

$$\begin{array}{ll} \textit{decadimento } \beta^- & n \rightarrow p\ e^-\ \overline{\nu} \\ \textit{decadimento } \beta^+ & p \rightarrow n\ e^+\ \nu \end{array}$$

- la hamiltoniana di interazione è un operatore che agisce sui campi fermionici mediante assorbimento o emissione di fermioni;

- l'interazione è a corto raggio d'azione: *interazione a contatto*

Consideriamo il processo $n \rightarrow p\ e^-\ \overline{\nu}$ in cui il neutrone e il protone sono legati nel nucleo. La costante di decadimento è

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar}\ |\langle p\ e^-\ \overline{\nu}|H_I|n\rangle|^2\ \rho(E_f)$$

L'operatore H_I assorbe un neutrone e emette un protone nel punto r_1 e emette un elettrone e un anti-neutrino nel punto r_2. Per le proprietà di simmetria dei

[17] premio Nobel per la fisica nel 1968

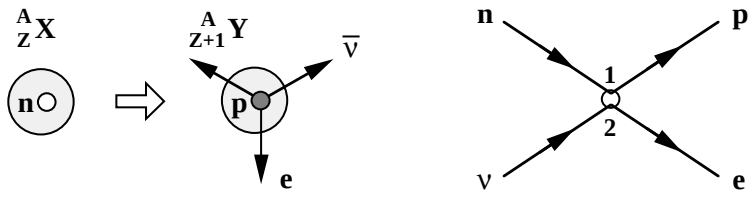


Figure 2.22: Decadimento β del nucleo e interazione a contatto

fermioni (appendice 4.18) l'elemento di matrice è lo stesso se l'operatore H_I assorbe un neutrone e emette un protone nel punto r_1 e assorbe un neutrino e emette un elettrone nel punto r_2

$$\langle p\ e^-|H_I|n\ \nu\rangle = \int \psi_p^*(\vec{r_1})\psi_e^*(\vec{r_2})\ H_I(\vec{r_1}-\vec{r_2})\ \psi_n(\vec{r_1})\psi_\nu(\vec{r_2})\ d\vec{r_1}d\vec{r_2}$$

Se l'interazione è a contatto la hamiltoniana di interazione diventa

$$H_I(\vec{r_1}-\vec{r_2}) = g\ \delta(\vec{r_1}-\vec{r_2})$$

dove è stata introdotta la nuova *costante di accoppiamento*, g, che ha dimensioni $[energia \times volume]$. Quindi l'elemento di matrice diventa

$$\langle p\ e^-|H_I|n\ \nu\rangle = g\int_N \psi_p^*(\vec{r})\psi_e^*(\vec{r})\ \psi_n(\vec{r})\psi_\nu(\vec{r})\ d\vec{r}$$

dove l'integrale è esteso alla regione del nucleo. Poiché l'elettrone e il neutrino non hanno interazione nucleare assumiamo che ψ_e e ψ_ν siano autofunzioni di particella libera

$$\psi_e(\vec{r}) = V^{-1/2}\ e^{i\vec{k}_e\cdot\vec{r}} \qquad\qquad \psi_\nu(\vec{r}) = V^{-1/2}\ e^{i\vec{k}_\nu\cdot\vec{r}}$$

Gli impulsi di elettrone e neutrino sono tipicamente $\sim MeV/c$ e possiamo assumere che le funzioni d'onda siano variate di poco all'interno del volume di integrazione, $\vec{k}\cdot\vec{r} \ll 1$, $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1 + \vec{k}\cdot\vec{r} + \ldots \approx 1$. Al primo ordine l'elemento di matrice della hamiltoniana di interazione si riduce all'integrale delle funzioni d'onda del protone e del neutrone nel volume del nucleo

$$\langle f|H_I|i\rangle = \frac{g}{V}\int_N \psi_p^*(\vec{r})\ \psi_n(\vec{r})\ d\vec{r} = \frac{g}{V}\ M_{fi}$$

Per calcolare la densità di energia $\rho(E_f)$ analizziamo la cinematica del decadimento $X \to Y\ e^-\ \overline{\nu}$. Definiamo $W = (M_X - M_Y)c^2 = K_Y + E_e + E_\nu$ l'energia a disposizione nello stato finale

$$W = \frac{p_Y^2}{2M_Y} + [(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2]^{1/2} + [(p_\nu c)^2 + (m_\nu c^2)^2]^{1/2} \qquad \vec{p}_Y + \vec{p}_e + \vec{p}_\nu = 0$$

L'impulso $\vec{p}_Y$ è massimo quando l'elettrone e il neutrino sono emessi nella stessa direzione e, poiché $m_\nu \ll m_e$, quando $\vec{p}_e = 0$, $\vec{p}_Y = -\vec{p}_\nu$. Poiché la differenza di massa nei decadimenti β è dell'ordine del MeV, anche nel caso più favorevole

$$W = \frac{p^2}{2M_Y} + m_e c^2 + [(pc)^2 + (m_\nu c^2)^2]^{1/2}$$

l'energia cinetica del nucleo Y è trascurabile e l'energia disponibile nello stato finale è $W \approx E_e + E_\nu$. Il numero di stati in funzione degli impulsi è

$$\int d^6 n_e d^6 n_\nu = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6}\ 4\pi p_e^2 dp_e\ 4\pi p_\nu^2 dp_\nu$$

Gli impulsi di elettrone e neutrino sono legati dalla conservazione dell'energia e, esprimendo p_ν in funzione dell'energia totale W,

$$p_\nu^2 c^2 = (W - E_e)^2 - (m_\nu c^2)^2 \qquad\qquad p_\nu dp_\nu c^2 = (W - E_e) dW$$

$$p_\nu^2 dp_\nu c^3 = (W - E_e)[(W - E_e)^2 - (m_\nu c^2)^2]^{1/2} dW$$

troviamo la densità di energia nello stato finale in funzione dell'unica variabile che si misura, l'impulso dell'elettrone p_e

$$\rho(W) dp_e = \frac{(4\pi)^2 V^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{1}{c^3}\ (W - E_e)[(W - E_e)^2 - (m_\nu c^2)^2]^{1/2}\ p_e^2\ dp_e$$

Poiché l'integrale sulle funzioni d'onda dei nucleoni, M_{fi}, non dipende dall'energia dell'elettrone, questa relazione rappresenta la distribuzione in energia degli elettroni emessi nel decadimento

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar}\ \frac{g^2}{V^2}\ |M_{fi}|^2\ \frac{(4\pi)^2 V^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{1}{c^3}\ (W - E_e)[(W - E_e)^2 - (m_\nu c^2)^2]^{1/2}\ p_e^2 dp_e =$$

$$= \frac{g^2}{2\pi^3 c^3 \hbar^7}\ |M_{fi}|^2\ (W - E_e)[(W - E_e)^2 - (m_\nu c^2)^2]^{1/2}\ p_e^2 dp_e$$

Per poter confrontare la distribuzione con i risultati sperimentali, occorre introdurre una correzione che tiene conto degli effetti di interazione dell'elettrone con il campo coulombiano del nucleo. L'effetto è diverso per il decadimento β^-, in cui il potenziale è attrattivo, e per il decadimento β^+, in cui il potenziale è repulsivo. La Fig.2.23 mostra l'effetto nella distribuzione dell'impulso di elettrone e positrone emessi nei decadimenti del Rame ${}^{64}_{29}Cu \rightarrow\ {}^{64}_{30}Zn\ e^- \bar{\nu}$, ${}^{64}_{29}Cu \rightarrow\ {}^{64}_{28}Ni\ e^+ \nu$. La correzione è stata calcolata da Fermi in funzione del numero atomico e dell'energia dell'elettrone. La distribuzione diventa

$$\frac{dn}{dp_e} = costante \times F(\pm Z, E_e)\ (W - E_e)[(W - E_e)^2 - (m_\nu c^2)^2]^{1/2}\ p_e^2$$

dove $F(\pm Z, E_e)$ è la *funzione di Fermi* che è apprezzabilmente diversa da 1 solo per valori di Z grandi e per energie piccole. Se nella relazione precedente trascuriamo la massa del neutrino, osserviamo che la funzione

$$\left[\frac{1}{p_e^2}\ \frac{dn}{dp_e}\right]^{1/2} = costante \times [F(\pm Z, E_e)]^{1/2}\ (W - E_e)$$

dipende linearmente dall'energia dell'elettrone (tenuto conto della dipendenza della funzione di Fermi) e la retta interseca l'asse dell'energia nel punto $E_e = W$. Questo

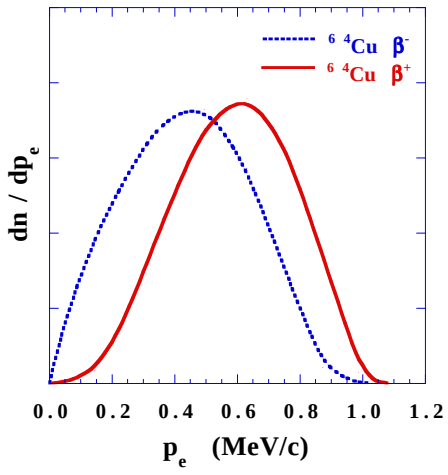


Figure 2.23: Distribuzione di impulso degli elettroni e positroni emessi nei decadimenti β del $^{64}_{29}Cu$.

modo di presentare i dati sperimentali è il *grafico di Fermi-Kurie*, la conferma sperimentale dell'andamento previsto costituisce il primo successo della teoria di Fermi.

La misura della distribuzione vicino al valore E_e^{max}, detto *end point* della distribuzione, fornisce un metodo per misurare la massa del neutrino. La misura più precisa è stata fatta studiando il decadimento del Trizio (2.24)

$$^3_1H \rightarrow \ ^3_2He\ e^-\ \overline{\nu}$$

che offre due vantaggi: i nuclei sono *semplici* e le correzioni nucleari facili da valutare; l'energia disponibile nello stato finale è piccola, $W = 530\ keV$, e questo aumenta la sensibilità della misura. Il limite ottenuto sulla massa del neutrino è $m_\nu < 2\ eV/c^2$. Nel seguito assumeremo $m_\nu = 0$.

2.7.3 La vita media del decadimento β

La teoria di Fermi riproduce i dati sperimentali della distribuzione di energia degli elettroni emessi nel decadimeto β dei nuclei con la funzione

$$d\lambda = \frac{g^2}{2\pi^3 c^3 \hbar^7}\ |M_{fi}|^2\ F(\pm Z, E)\ (W - E)^2\ p^2\ dp$$

che, a parte la correzione di Fermi, rappresenta la distribuzione dello spazio delle fasi nel decadimento a tre corpi in cui $M_Y \gg m_e \gg m_\nu$. L'integrale della distribuzione è la vita media di decadimento

$$\int_o^{p_{max}} d\lambda = \frac{1}{\tau}$$

e quindi possiamo ottenere dalla misura di τ il valore del prodotto della costante di accoppiamento per l'elemento di matrice $g|M_{fi}|$.

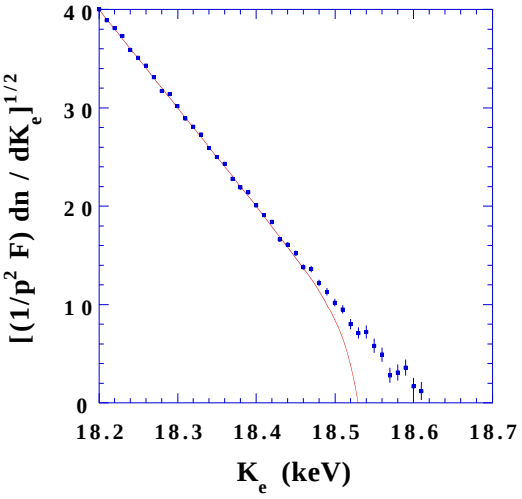


Figure 2.24: Grafico di Fermi-Kurie del decadimento del Trizio vicino all'end point, la linea rappresenta l'andamento per un neutrino di massa $\sim 0.1\ keV/c^2$.

Per calcolare l'integrale conviene usare le variabili adimensionali

$$E = \varepsilon\ m_e c^2 \qquad p = \eta\ m_e c \qquad \varepsilon^2 = \eta^2 + 1$$

in modo da rendere esplicita la dipendenza dalla massa dell'elettrone. L'integrale dipende solo dal limite superiore

$$p_{max}c = [E_{max}^2 - (m_e c^2)^2]^{-1/2} = \eta_o\ m_e c^2 \qquad E_{max} = W = \varepsilon_o\ m_e c^2$$

Nelle nuove variabili la funzione di distribuzione è

$$(W - E)^2\ p^2\ dp = (mc^2)^2\ (\varepsilon_o - \varepsilon)^2\ (mc)^3\ \eta^2\ d\eta$$

$$d\lambda = \frac{(mc^2)^5}{2\pi^3 \hbar\ (\hbar c)^6}\ g^2\ |M_{fi}|^2\ F(\pm Z, \eta)\ (\varepsilon_o - \varepsilon)^2\ \eta^2\ d\eta$$

Quindi otteniamo l'espressione della vita media di decadimento

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(mc^2)^5}{2\pi^3 \hbar\ (\hbar c)^6}\ g^2\ |M_{fi}|^2\ f(\pm Z, \eta_o)$$

come prodotto di

- una costante: $(mc^2)^5/2\pi^3\hbar\ (\hbar c)^6 = 1.46\ 10^4\ MeV^{-2}\ fm^{-6}\ s^{-1}$;
- il quadrato della costante di accoppiamento che ha dimensioni $[fm^6\ MeV^2]$;
- il quadrato dell'elemento di matrice adimensionale della transizione nucleare $|M_{fi}|^2$;

- una funzione adimensionale che dipende dalla carica elettrica del nucleo e dal limite superiore di integrazione $\eta_o = p_{max}/mc$

$$f(Z,\eta_o) = \int_o^{\eta_o} F(\pm Z,\eta)\ [2+\eta_o^2+\eta^2-2(1+\eta_o^2)^{1/2}(1+\eta^2)^{1/2}]\ \eta^2 d\eta$$

La funzione $f(Z,\eta_o)$ è calcolabile sulla base dei modelli del nucleo. Se facciamo l'ipotesi $F(\pm Z,\eta) \approx 1$ troviamo la dipendenza dal valore massimo dell'impulso dell'elettrone

$$f(Z,\eta_o) = -\frac{1}{4}\ \eta_o - \frac{1}{12}\ \eta_o^3 + \frac{1}{30}\ \eta_o^5 + \frac{1}{4}\ (1+\eta_o^2)^{1/2} \ln[\eta_o + (1+\eta_o^2)^{1/2}]$$

Nei decadimenti in cui l'energia disponibile è $W \gg mc^2$, l'elettrone ha mediamente impulso grande e l'approssimazione $F(\pm Z,\eta) \approx 1$ è giustificata. In questo caso abbiamo $p_{max}c \approx E_{max} = W$, $\eta_o \gg 1$ e si può usare l'approssimazione $f(Z,\eta_o) \approx \eta_o^5/30$. Quindi nei decadimenti con $W \gg mc^2$ la vita media dipende dalla quinta potenza dell'energia disponibile nello stato finale, W, in accordo con le osservazioni di Sargent

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{W^5}{60\pi^3\hbar\ (\hbar c)^6}\ g^2\ |M_{fi}|^2$$

Questa approssimazione è chiamata *legge di Sargent.*

2.7.4 L'elemento di matrice del decadimento β

Nella teoria di Fermi il quadrato dell'elemento di matrice è inversamente proporzionale alla vita media

$$g^2|M_{fi}|^2 = \frac{costante}{f\ \tau}$$

Esaminiamo i valori misurati in alcuni decadimenti β (vite medie in s, energie e impulsi in MeV, $g^2|M_{fi}|^2$ in $MeV^2\ fm^6$)

decadimento	*transizione*	$\tau\ (s)$	W	p_e^{max}	$f\ \tau$	$g^2\ \lvert M_{if}\rvert^2$
$n \to p\ e^-\ \bar{\nu}$	$\frac{1}{2}^+ \to \frac{1}{2}^+$	890	1.29	1.18	$1.61\ 10^3$	$4.25\ 10^{-8}$
${}^3_1H \to {}^3_2He\ e^-\ \bar{\nu}$	$\frac{1}{2}^+ \to \frac{1}{2}^+$	$5.60\ 10^8$	0.53	0.14	$1.63\ 10^3$	$4.20\ 10^{-8}$
${}^{14}_8O \to {}^{14}_7N^*\ e^+\ \nu$	$0^+ \to 0^+$	102	2.32	2.26	$4.51\ 10^3$	$1.52\ 10^{-8}$
${}^{34}_{17}Cl \to {}^{34}_{16}S\ e^+\ \nu$	$0^+ \to 0^+$	2.21	4.97	4.94	$4.54\ 10^3$	$1.51\ 10^{-8}$
${}^6_2He \to {}^6_3Li\ e^-\ \bar{\nu}$	$0^+ \to 1^+$	1.15	4.02	3.99	$1.17\ 10^3$	$5.85\ 10^{-8}$
${}^{13}_5B \to {}^{13}_6C\ e^-\ \bar{\nu}$	$\frac{3}{2}^- \to \frac{1}{2}^-$	$2.51\ 10^{-3}$	13.4	13.4	$1.11\ 10^3$	$6.17\ 10^{-8}$

Nonostante la grande variazione della vita media, dovuta alla forte dipendenza dell'integrale f da p_e^{max}, il prodotto $g^2|M_{fi}|^2$ è approssimativamente lo stesso nei decadimenti, ma si osserva una dipendenza dalla variazione dello spin nella transizione del nucleo. Nella trattazione abbiamo assunto che l'elettrone e il neutrino

siano emessi in uno stato di momento angolare $\ell = 0$, infatti con i valori tipici dell'impulso e delle dimensioni del nucleo $|\vec{r} \wedge \vec{p}c|/\hbar c \ll 1$. In questo caso la variazione dello spin del nucleo è pari alla somma degli spin dell'elettrone e del neutrino. Per l'orientazione degli spin di elettrone e neutrino:

- nelle transizioni $0 \to 0$, gli spin sono antiparalleli (stato di singoletto);
- nelle transizioni $0 \leftrightarrow 1$ gli spin sono paralleli (stato di tripletto);
- nelle transizioni $1/2 \to 1/2$ gli spin possono essere antiparalleli (lo spin del nucleo non cambia) o paralleli (lo spin del nucleo cambia direzione).

Le transizioni del primo tipo sono dette *transizioni di Fermi*, quelle del secondo tipo *transizioni di Gamow-Teller*

$$\begin{array}{ccccc} Fermi & \Delta I = 0 & & singoletto & \Uparrow\Downarrow \\ Gamow-Teller & \Delta I = 0,\ \pm 1 & ma\ non\ 0 \to 0 & tripletto & \Uparrow\Uparrow \end{array}$$

In entrambe i casi la parità non cambia.

L'elemento di matrice M_{fi} dipende dalle funzioni d'onda di neutrone e protone nel nucleo e occorre tener conto del principio di esclusione di Pauli che impedisce che in una transizione, ad esempio $n \to p$, il nuovo nucleone vada in uno stato già occupato. Nel calcolare M_{fi} occorre tener conto di due effetti: la molteplicità di stati di isospin in cui può formarsi il nuovo stato nucleare e la molteplicità di stati di spin. Ad esempio:

- decadimento ${}^{14}_{8}O \to {}^{14}_{7}N^{*}\ e^{+}\ \nu$
  Nello stato iniziale ci sono due protoni nello stato $1p_{1/2}$ con spin antiparalleli, $I_i = 0$, e uno dei due si trasforma in un neutrone che occupa lo stesso stato, $I_f = 0$: ci sono due possibilità e la molteplicità di isospin è 2. La transizione avviene con $\Delta I = 0$ e la molteplicità di spin è 1. È una transizione di Fermi con $|M_F|^2 = 2$.

- decadimento ${}^{6}_{2}He \to {}^{6}_{3}Li\ e^{-}\ \bar{\nu}$
  Nello stato iniziale ci sono due neutroni nello stato $1p_{3/2}$ con spin antiparalleli $I_i = 0$ e uno dei due si trasforma in un protone che occupa lo stesso stato, ma con spin parallelo a quello dell'altro neutrone, $I_f = 1$. Il peso di isospin è 2. La transizione avviene con $|\Delta I| = 1$ e la molteplicità di spin è 3. È una transizione di Gamow-Teller con $|M_{GT}|^2 = 6$.

- decadimento ${}^{3}_{1}H \to {}^{3}_{2}He\ e^{-}\ \bar{\nu}$
  In questo decadimento, come in tutte le transizioni tra nuclei speculari, il nucleone che si trasforma va occupare lo stesso stato: la molteplicità di isospin è 1. Il decadimento può avvenire sia con $\Delta I = 0$, con elettrone e neutrino nello stato di singoletto (molteplicità 1), sia con $|\Delta I| = 1$, con elettrone e neutrino nello stato di tripletto (molteplicità 3). È una transizione mista con $|M_F|^2 = 1$, $|M_{GT}|^2 = 3$.

Se assumiamo che non ci sia interferenza tra le ampiezze dei due tipi di transizioni, possiamo scrivere l'elemento di matrice del decadimento β

$$g^2|M_{fi}|^2 = g^2\left[C_V^2|M_F|^2 + C_A^2|M_{GT}|^2\right]$$

dove C_V e C_A rappresentano i pesi relativi. Con i dati della tabella e con quelli di altri decadimenti otteniamo il valore dei pesi relativi delle transizioni e della costante di accoppiamento g

$$\frac{|C_A|}{|C_V|} = 1.25 \pm 0.01 \qquad C_V = 1 \qquad \Rightarrow \qquad g = (0.876 \pm 0.002)\ 10^{-4} MeV\ fm^3$$

L'interazione responsabile del decadimento β è chiamata *interazione debole* perché, a parità di energia disponibile nello stato finale, la costante di decadimento è molto più piccola che nei decadimenti γ. La dipendenza dall'energia sia dell'elemento di matrice che della densità degli stati finali è però molto diversa nei due processi di decadimento. Per confrontare l'intensità delle interazioni elettromagnetiche e deboli conviene rappresentare l'interazione nello spazio degli impulsi. La hamiltoniana di interazione è $H_{em} = \alpha\hbar c/r$, $H_W = g\delta(\vec{r})$. Il propagatore, la trasformata di Fourier in una interazione con impulso trasferito $\vec{q}$ è rispettivamente $4\pi\alpha(\hbar c)^3/(qc)^2$ e g. L'impulso trasferito nei decadimenti β dei nuclei è tipicamente $qc \simeq 1\ MeV$, per questo valore abbiamo

$$\frac{4\pi\alpha}{(qc)^2} \approx 0.1\ MeV^{-2} \qquad\qquad \frac{g}{(\hbar c)^3} \approx 10^{-11}\ MeV^{-2}$$

Va notato che i propagatori dell'interazione hanno una dipendenza completamente diversa dall'impulso trasferito e che otteniamo valori confrontabili se l'impulso trasferito è $qc \simeq 10^5\ MeV$.

Il rapporto $G = g/(\hbar c)^3$ è la *costante di Fermi*. Il valore misurato nel decadimento β è

$$G = \frac{g}{(\hbar c)^3} = (1.140 \pm 0.002)\ 10^{-5}\ GeV^{-2}$$

leggermente diverso dal valore della

costante universale di Fermi $\qquad G_F = (1.16639 \pm 0.00001)\ 10^{-5}\ GeV^{-2}$

per una ragione che chiariremo più avanti.

2.7.5 Decadimenti proibiti

La denominazione di decadimenti "proibiti" ha origine storica. Fermi suddivise i decadimenti in *transizioni super-permesse*, *transizioni primo-permesse*, ... e *transizioni proibite*. Gli elementi di matrice sono calcolati rappresentando elettrone e neutrino con funzioni d'onda di particella libera. Poiché tipicamente $p \simeq 1\ MeV/c$, nel volume del nucleo si ha $\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar \ll 1$ e lo sviluppo in serie converge rapidamente

$$e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} = 1 + \frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar} - \frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})^2}{2\hbar^2} + \ \ldots$$

Il primo termine produce gli elementi di matrice delle transizioni permesse in cui elettrone e neutrino sono emessi in stato di momento angolare $\ell = 0$ e la parità del nucleo non cambia.

Se la parità del nucleo cambia, l'elemento di matrice al primo ordine si annulla e occorre considerare gli altri termini dello sviluppo

$$M_{fi} = \frac{i}{\hbar} \int_N \psi_p^*(\vec{r})\ \vec{p}\cdot\vec{r}\ \psi_n(\vec{r})\ d\vec{r} + \ \ldots$$

Il secondo termine corrisponde a transizioni con $\ell = 1$ e cambio di parità. Per impulsi $p \simeq 1\ MeV/c$ e nuclei di estensione $R \simeq 5\ fm$ abbiamo

$$|M_{fi}| \approx \frac{\langle \vec{p}\cdot\vec{r}\rangle_N}{\hbar} \sim 10^{-2}$$

Quindi la vita media di un decadimento primo-proibito è $\approx 10^4$ più lunga che per un decadimento permesso. Elettrone e neutrino possono essere emessi con spin totale $S = 0$ oppure $S = 1$, e la conservazione del momento angolare, $\Delta\vec{I} = \vec{S} + \vec{\ell}$, produce le regole di selezione delle transizioni proibite al primo ordine

- transizioni di Fermi, $S = 0$

$$\Delta I = 0,\ \pm 1 \qquad ma\ non\ 0 \to 0$$

- transizioni di Gamow-Teller, $S = 1$

$$\Delta I = 0,\ \pm 1\ \pm 2$$

Decadimenti con $\Delta I \geq 2$ senza cambio di parità possono avvenire solo con il termine successivo

$$M_{fi} = -\frac{1}{2\hbar^2} \int_N \psi_p^*(\vec{r})\ (\vec{p}\cdot\vec{r})^2\ \psi_n(\vec{r})\ d\vec{r} + \ \ldots$$

e sono ancora più sfavoriti. Sono stati osservati decadimenti proibiti fino al terzo e quarto ordine con vite medie maggiori di 10^9 anni.

2.7.6 Non conservazione della parità

L'idea che la parità non si conservasse nell'interazione debole è maturata nel 1955 a seguito dell'evidenza che una stessa particella, il mesone K, decade in due stati di parità opposta (capitolo ???). Nel 1956 T.D.Lee e C.N.Yang [18] fecero una analisi critica dei risultati ottenuti con lo studio dei processi deboli e conclusero che in nessun esperimento si era studiata la dipendenza dell'interazione da termini pseudoscalari che cambiano segno per trasformazione di parità come, ad esempio, l'elicità dell'elettrone, $\vec{s}_e \cdot \vec{p}_e$, o il prodotto dell'impulso e lo spin del nucleo, $\vec{I} \cdot \vec{p}_e$. Lee e

[18] premi Nobel per la fisica nel 1957

Yang osservarono che la hamiltoniana dell'interazione debole, espressa come sovrapposizione dei termini di Fermi e Gamow-Teller, entrambe scalari, è invariante per parità e proposero una formulazione più generale della hamiltoniana. Proposero anche alcuni esperimenti per mettere in luce una possibile violazione della parità nei decadimenti deboli. Due di questi esperimenti, sul decadimento di nuclei polarizzati e sul decadimento del leptone μ (capitolo ???), vennero eseguiti nei mesi successivi e dimostrarono chiaramente che la parità non si conserva nell'interazione debole.

Il decadimento del Cobalto polarizzato è stato studiato da C.S.Wu, E.Ambler e collabotori nel 1956. Il nucleo ${}^{60}_{27}Co$ ha spin $I_{Co} = 5$ e decade per transizione Gamow-Teller in uno stato eccitato del nucleo ${}^{60}_{28}Ni^*$ con spin $I_{Ni} = 4$. La vita media è 7.5 anni. L'energia disponibile è $Q = 0.32\ MeV$.

$$ {}^{60}_{27}Co(5^+) \rightarrow\ {}^{60}_{28}Ni^*(4^+)\ e^-\ \overline{\nu} $$

L'elettrone e l'antinuetrino sono emessi con spin paralleli allo spin del ${}^{60}_{27}Co$. Il nucleo ${}^{60}_{28}Ni^*$ decade allo stato fondamentale con due emissioni radiative di quadrupolo elettrico con energie $E_\gamma = 1.17\ e\ 1.33\ MeV$

$$ {}^{60}_{28}Ni^*(4^+) \rightarrow\ {}^{60}_{28}Ni^*(2^+)\ \gamma \qquad\qquad {}^{60}_{28}Ni^*(2^+) \rightarrow\ {}^{60}_{28}Ni(0^+)\ \gamma $$

Il nucleo ${}^{60}_{27}Co$ ha momento magnetico $\mu \approx 3\ \mu_N$. Per ottenere una polarizzazione apprezzabile la sorgente è inserita in un criostato e raffreddata a $0.01\ K$ per demagnetizzazione adiabatica. Raggiunta la temperatura di operazione la sorgente viene polarizzata nel campo magnetico di un solenoide. Un piccolo scintillatore inserito nel criostato rivela gli elettroni emessi entro un piccolo angolo nella direzione del campo magnetico. Due cristalli scintillanti sono usati per rivelare i fotoni emessi in direzione parallela e normale al campo magnetico. La distribuzione angolare dei fotoni emessi nel decadimento del nucleo ${}^{60}_{28}Ni^*$ polarizzato non è isotropa, dipende dall'angolo tra la direzione di emissione e lo spin, ma è simmetrica rispetto all'inversione della polarizzazione. La differenza di conteggio dei due cristalli viene usata per controllare il grado di polarizzazione della sorgente.

Il nucleo ${}^{60}_{27}Co$ ha lo spin orientato nella direzione del campo e quindi anche l'elettrone e l'antinuetrino. Se si inverte il campo magnetico cambia l'elicità degli elettroni rivelati nello scintillatore: l'esperimento è cioè sensibile ad una quantità pseudoscalare $\vec{s}_e \cdot \vec{p}_e$ (Fig.2.25). Le misure hanno dimostrato che quando si inverte il campo magnetico cambia il conteggio di elettroni e che questi tendono ad essere emessi in direzione opposta alla polarizzazione del nucleo. L'asimmetria nel conteggio degli elettroni dipende dal grado di magnetizzazione della sorgente. La distribuzione dell'angolo tra la direzione di emissione dell'elettrone e la polarizzazione del campione ($\hat{\mu}$ è il versore di polarizzazione $\parallel \vec{s}_e$)

$$ \frac{dn}{dcos\theta} = 1 + \alpha\ \frac{\hat{\mu} \cdot \vec{p}_e}{E_e} = 1 + \alpha\ \beta_e\ cos\theta $$

mostra che $\alpha \approx -1$.

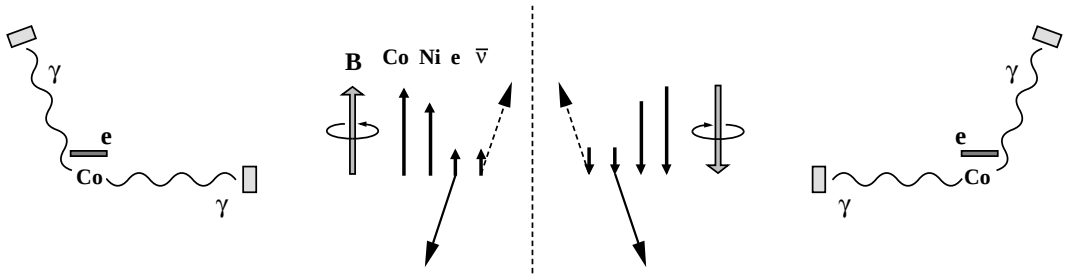


Figure 2.25: Decadimento del Cobalto polarizzato: l'immagine speculare non è possibile

L'esperimento dimostra una evidente violazione della parità. Se applichiamo all'esperimento la trasformazione di inversione spaziale, non cambiamo i vettori assiali, campo magnetico e spin, mentre si invertono sia gli impulsi che la posizione del rivelatore. Se si conserva la parità il conteggio di elettroni non può cambiare.

2.7.7 L'interazione V-A

Per capire l'origine delle transizioni di Fermi e Gamow-Teller e della violazione della parità, consideriamo le soluzioni dell'equazione di Dirac (appendice 4.18). La hamiltoniana di interazione si può esprimere in funzione di combinazioni delle autofunzioni del tipo $\overline{\psi}_f \mathcal{O} \psi_i$ dove l'operatore $\mathcal{O}$ è formato con le matrici di Dirac. Le possibili combinazioni che si trasformano secondo le trasformazioni di Lorentz sono

$$\begin{array}{ccccc} \textit{Scalare} & \textit{Vettoriale} & \textit{Assialvettoriale} & \textit{Pseudoscalare} & \textit{Tensoriale} \\ \overline{\psi}_f\ \psi_i & \overline{\psi}_f\ \gamma_\lambda\ \psi_i & \overline{\psi}_f\ \gamma_\lambda\gamma_5\ \psi_i & \overline{\psi}_f\ \gamma_5\ \psi_i & \overline{\psi}_f\ \gamma_\lambda\gamma_\mu\ \psi_i \end{array}$$

Si può dimostrare che il contributo del termine pseudoscalare è trascurabile nel decadimento β e che la correlazione angolare tra la direzione di emissione dell'elettrone e dell'antineutrino è

		V oppure A	*S oppure T*
singoletto	$\Uparrow\Downarrow$	$1+\beta_e\cos\theta$	$1-\beta_e\cos\theta$
tripletto	$\Uparrow\Uparrow$	$1-\frac{1}{3}\ \beta_e\cos\theta$	$1+\frac{1}{3}\ \beta_e\cos\theta$

dove $\beta_e c$ è la velocità dell'elettrone e θ è l'angolo tra $\vec{p}_e$ e $\vec{p}_\nu$. La distinzione tra i due tipi di interazione, V & A oppure S & T, è fatta sulla base dei risultati sperimentali.

In una interazione di tipo V o di tipo A si conserva l'elicità dei fermioni $\vec{s}\cdot\vec{p}/|\vec{s}\cdot\vec{p}|$ quando $\beta \to 1$ (appendice 4.18). L'elicità ha autovalori ± 1 e la probabilità di osservare un fermione [anti-fermione] con elicità ± 1 è $(1 \mp \beta)/2$ $[(1 \pm \beta)/2]$. La distinzione tra le due possibilità è di nuovo fatta sulla base dei risultati sperimentali. Quindi, in una interazione V & A, elettrone e antineutrino [positrone e neutrino]

nello stato di singoletto tendono ad avere la stessa direzione mentre nello stato di tripletto tendono ad essere emessi in direzioni opposte (Fig.2.26). I risultati di numerosi esperimenti hanno mostrato che l'interazione responsabile del decadimento β è di tipo sia *vettoriale* che *assialvettoriale*.

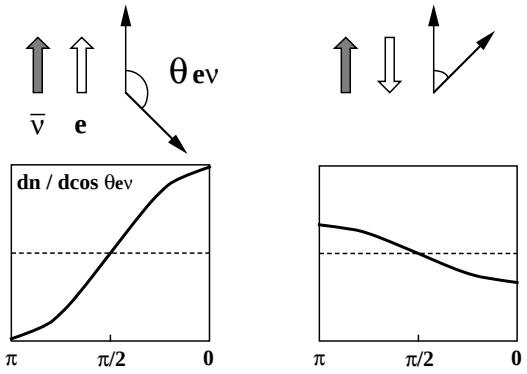


Figure 2.26: Distribuzione angolare per interazione vettoriale oppure assialvettoriale

Fermi scelse, in analogia con l'interazione elettromagnetica, una interazione di tipo vettoriale

$$\langle p\ e^-|H_I|n\ \nu\rangle_F = gC_V \int \sum_\lambda \overline{\psi}_p(x)\gamma_\lambda\psi_n(x)\ \overline{\psi}_e(x)\gamma_\lambda\psi_\nu(x)\ d^4x$$

che dà origine alle transizioni di Fermi. Le transizioni di Gamow-Teller sono originate dall'interazione assialvettoriale

$$\langle p\ e^-|H_I|n\ \nu\rangle_{GT} = gC_A \int \sum_\gamma \overline{\psi}_p\gamma_\lambda\gamma_5\psi_n\ \overline{\psi}_e\gamma_\lambda\gamma_5\psi_\nu\ d^4x$$

La hamiltoniana ottenuta combinando le due interazioni

$$H = \frac{g}{\sqrt{2}}\left[C_V\ \overline{\psi}_p\gamma_\lambda\psi_n\ \overline{\psi}_e\gamma_\lambda\psi_\nu + C_A\ \overline{\psi}_p\gamma_\lambda\gamma_5\psi_n\ \overline{\psi}_e\gamma_\lambda\gamma_5\psi_\nu\right]$$

è la somma di termini scalari e non può generare termini misti che cambiano segno per trasformazione di parità. Un termine pseudoscalare si può introdurre combinando le matrici γ_λ e la matrice antisimmetrica γ_5, ad esempio

$$H = \frac{g}{\sqrt{2}}\left[\overline{\psi}_p\gamma_\lambda\psi_n\ \overline{\psi}_e\gamma_\lambda(C_V + C'_V\gamma_5)\psi_\nu + \overline{\psi}_p\gamma_\lambda\gamma_5\psi_n\ \overline{\psi}_e\gamma_\lambda\gamma_5(C_A + C'_A\gamma_5)\psi_\nu\right]$$

dove i coefficienti C e C' sono in generale numeri complessi. Se consideriamo le trasformazioni $C,\ P,\ T$ delle soluzioni dell'equazione di Dirac (appendice 4.18) possiamo verificare che i coefficienti cambiano nel modo seguente

$trasformazione:$		C	P	T
C	$\rightarrow$	C^*	C	C^*
C'	$\rightarrow$	$-C'^*$	$-C'$	C'^*

e che la hamiltoniana non è invariante per trasformazioni di coniugazione di carica e di parità. Se facciamo l'ipotesi che sia invariante per CP e per T, allora i coefficienti sono reali. L'estensione a fermioni di massa nulla richiede inoltre $C' = \pm C$. La misura dell'elicità degli elettroni e dei neutrini emessi nel decadimento β definisce il segno relativo $C' = -C$ e la hamiltoniana dell'*interazione V-A* si esprime

$$H = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[C_V \ \overline{\psi}_p \gamma_\lambda \psi_n \ \overline{\psi}_e \gamma_\lambda (1-\gamma_5) \psi_\nu + C_A \ \overline{\psi}_p \gamma_\lambda \gamma_5 \psi_n \ \overline{\psi}_e \gamma_\lambda \gamma_5 (1-\gamma_5) \psi_\nu \right]$$

$$H = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\overline{\psi}_p \gamma_\lambda (C_V - C_A \gamma_5) \psi_n \ \overline{\psi}_e \gamma_\lambda (1-\gamma_5) \psi_\nu \right]$$

2.7.8 L'elicità dell'elettrone

La vita media del decadimento β si ottiene integrando su tutte le variabili e dipende da $g^2 |M_{fi}|^2$, fornisce quindi il valore della costante di Fermi e il peso relativo degli elementi di matrice di Fermi e Gamow-Teller, ma non dà informazioni ulteriori sulla struttura dell'interazione.

Il peso relativo dei diversi tipi di interazione, $S,\ V,\ A,\ T$, dipende dal fattore

$$\frac{\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu}{E_e E_\nu} = \beta_e \cos\theta_{e\nu}$$

La misura di $\theta_{e\nu}$ non è facile perché il neutrino non è rivelato e occorre misurare l'impulso dell'elettrone e del rinculo del nucleo Y che ha energia cinetica molto piccola. Misure della distribuzione angolare, parametrizzata come

$$\frac{dn}{d\cos\theta_{e\nu}} \sim 1 + \alpha \ \beta_e \cos\theta_{e\nu}$$

sono state effettuate studiando diversi tipi di decadimento (transizioni di Fermi, di Gamow-Teller e miste) con energie di decadimento, W, elevate e nuclei leggeri per facilitare la misura dell'impulso di rinculo del nucleo.

decadimento	*transizione*	$W(MeV)$	$p_Y^{max}(MeV)$	$K_Y^{max}(eV)$	α
$n \to p\ e^-\ \bar{\nu}$	$\frac{1}{2}^+ \to \frac{1}{2}^+$	1.29	1.18	750	-0.102 ± 0.005
${}^6_2He \to\ {}^6_3Li\ e^-\bar{\nu}$	$0^+ \to 1^+$	1.15	1.03	95	-0.334 ± 0.003
${}^{19}_{10}Ne \to\ {}^{19}_{9}F\ e^+\nu$	$\frac{1}{2}^+ \to \frac{1}{2}^+$	3.24	3.20	90	0.00 ± 0.08
${}^{35}_{18}Ar \to\ {}^{35}_{17}Cl\ e^+\nu$	$\frac{3}{2}^+ \to \frac{3}{2}^+$	5.96	5.45	91	0.97 ± 0.14

I risultati di queste misure hanno mostrato che in transizioni di Fermi (spin antiparalleli) elettrone e antineutrino [positrone e neutrino] tendono a formare angoli piccoli, mentre in transizioni di Gamow-Teller (spin paralleli) tendono a formare

angoli grandi. Per transizioni miste, si osserva la sovrapposizione delle due distribuzioni con pesi relativi C_V^2 e $C_A^2/3$. I risultati sono in accordo con le previsioni dell'interazione vettoriale e assialvettoriale.

La correlazione angolare è dovuta alla conservazione dell'elicità dei fermioni ed è tanto più evidente quanto maggiore è il valore della velocità. Infatti la teoria di Dirac prevede che nel limite $\beta \to 1$ gli autostati dell'equazione del moto siano autostati dell'elicità e che il neutrino possa esistere in un solo stato di elicità $h = +1$ *oppure* $h = -1$. L'antineutrino esiste nello stato di elicità opposta. Per un elettrone [positrone] emesso con velocità βc, l'equazione di Dirac prevede una polarizzazione pari a $\pm\beta$ [$\mp\beta$]. La teoria è simmetrica e solo la misura può definire quale è l'assegnazione corretta. La misura della elicità di fermioni e antifermioni definisce il segno relativo dell'interazione vettoriale e assialvettoriale: $V + A$ oppure $V - A$.

La misura della polarizzazione di elettroni e positroni emessi nel decadimento β è stata fatta sudiando diversi decadimenti. Gli elettroni [positroni] vengono fatti diffondere da una sottile lamina di ferro magnetizzato e nella misura si sfrutta la dipendenza della sezione d'urto Møller, $e^-e^- \to e^-e^-$, [Bhabha, $e^+e^- \to e^+e^-$], dalla orientazione relativa degli spin. La dipendenza dell'effetto è studiata in funzione della velocità dell'elettrone [positrone] e della magnetizzazione del ferro. Risulta che la la polarizzazione degli elettroni è negativa e quella dei positroni è positiva

$$h(e) = -1 \qquad\qquad h(\overline{e}) = +1$$

Il decadimento $n \to p\ e^-\ \overline{\nu}$ è stato studiato in dettaglio usando neutroni polarizzati che decadono in volo. Si misura la direzione di volo, la direzione dello spin del neutrone e l'angolo di emissione dell'elettrone e del protone. L'analisi delle distribuzioni in funzione di $\vec{p}_e \cdot \vec{s}_n$, $\vec{p}_\nu \cdot \vec{s}_n$, $\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu$, permette una misura completa dei parametri del decadimento β e, in particolare, del segno relativo dell'interazione vettoriale e assialvettoriale: C_V e C_A hanno segno opposto e $|C_A/C_V| = 1.26 \pm 0.01$.

2.7.9 L'elicità del neutrino

Una conferma cruciale della interazione $V-A$ è la misura diretta della elicità del neutrino fatta da M.Golhaber, L.Grodzins e A.Sunyar nel 1958. L'esperimento sfrutta la fluorescenza nucleare che, come abbiamo detto, si osserva solo se emettitore e assorbitore sono in moto relativo con velocità opportuna. Descriviamo il metodo dell'esperimento

- Il nucleo ${}^{152}_{63}Eu$ ha spin $I_{Eu} = 0$ e decade per cattura elettronica in uno stato eccitato del nucleo ${}^{152}_{62}Sm^*$ con spin $I_{Sm^*} = 1$ e un neutrino di 840 keV

  $$e^-\ {}^{152}_{63}Eu \to\ {}^{152}_{62}Sm^*\ \nu \qquad\qquad E_\nu = 840\ keV$$

  La cattura elettronica avviene da orbitale S, lo stato iniziale ha momento angolare $J_i = 1/2$. Quindi nello stato finale Sm^* e ν hanno spin opposti.

- Il nucleo formato decade allo stato fondamentale del Samario con spin $I_{Sm} = 0$ emettendo un fotone di 960 keV

$$^{152}_{62}Sm^* \rightarrow \ ^{152}_{62}Sm\ \gamma \qquad\qquad E_\gamma = 960\ keV$$

il fotone ha lo stesso spin del Sm^* e spin opposto a quello del neutrino. La vita media, $\tau = 3\ 10^{-14}\ s$, del decadimento radiativo è così breve che il nucleo decade prima di aver dissipato l'energia cinetica: il decadimento avviene in volo.

- Un assorbitore di $^{152}_{62}Sm$ può assorbire la radiazione γ solo se l'energia emessa è aumentata per effetto Doppler, cioè se il fotone è emesso nella direzione di volo del nucleo Sm^*.

- L'osservazione dell'emissione di fluorescenza nucleare da parte dell'assorbitore

$$E_\gamma > 960\ keV \qquad \gamma\ Sm\ \rightarrow\ Sm^*\ \rightarrow\ Sm\ \gamma$$

seleziona quindi i fotoni emessi in direzione opposta al neutrino e con spin opposto. L'elicità del fotone è uguale a quella del neutrino.

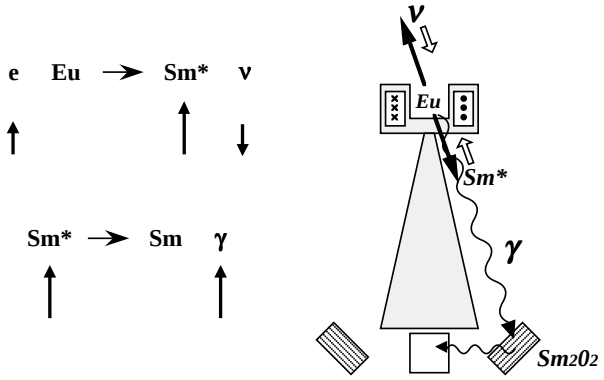


Figure 2.27: Misura dell'elicità del neutrino.

L'esperimento (Fig.2.27) è effettuato con una sorgente di $^{152}_{63}Eu$ e un diffusore di $^{152}_{62}Sm$ la cui radiazione di fluorescenza è osservata con un cristallo scintillante opportunamente schermato. Tra la sorgente e il diffusore vi è uno spessore di ferro, i fotoni emessi nel decadimento del $^{152}_{62}Sm^*$ attraversano il ferro prima di produrre fluorescenza nel diffusore. Il ferro può essere magnetizzato in direzione concorde o opposta alla direzione dei fotoni. I fotoni interagiscono nel ferro per effetto Compton e l'assorbimento dipende dall'orientazione relativa dello spin del fotone e degli spin degli elettroni polarizzati. La sezione d'urto è maggiore per spin antiparalleli che per spin paralleli perché nel primo caso il fotone può cedere il momento angolare all'elettrone che cambia spin. Osservando l'assorbimento con diversi valori e orientazioni del campo magnetico si è determinato che il neutrino ha elicità negativa.

Con un diverso esperimento si è determinato che gli antineutrini hanno elicità positiva. Quindi

$$h(\nu) = -1 \qquad\qquad h(\overline{\nu}) = +1$$

2.7.10 La scoperta del neutrino

I neutrini sono debolmente interagenti e sono passati più di 25 anni dalla proposta di Pauli alla osservazione dei neutrini in un esperimento. Per valutare il valore della sezione d'urto di interazione consideriamo il decadimento β del neutrone, $n \to p\, e^-\, \overline{\nu}$. Nell'interpretazione di Fermi l'interazione è tra due correnti che cambiano la carica elettrica: $J^+(n \to p) \cdot J^-(\nu \to e^-)$. I neutrini possono interagire con i processi

$$\nu\ n \to p\ e^- \qquad\qquad \overline{\nu}\ p \to n\ e^+$$

Consideriamo il secondo processo a bassa energia, $E_\nu \ll m_p$,

$$E_\nu + m_p = m_n + K_n + E_e \qquad\qquad K_n \approx 0$$

La soglia di reazione è $E_\nu \geq m_n - m_p + m_e = 1.8\ MeV$ e l'elettrone è emesso con impulso $p_e = [(E_\nu - \Delta m)^2 - m_e^2]^{1/2}$. Se le funzioni d'onda sono normalizzate in un volume V, la densità degli stati finali è proporzionale a $4\pi V p_e E_e/c^2$ e il flusso di neutrini è c/V. La sezione d'urto è

$$\sigma(\overline{\nu}\ p \to n\ e^+) = \frac{V}{c}\ \frac{2\pi}{\hbar}|\langle n\ e^+|H_I|\overline{\nu}\ p\rangle|^2\ \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\ \frac{4\pi p_e E_e}{c^2}$$

Il processo è equivalente al decadimento β del neutrone per simmetria di incrocio e, usando il valore misurato dell'elemento di matrice, abbiamo

$$\sigma = \frac{g^2}{\pi(\hbar c)^4}\ |M_{fi}|^2\ p_e c\ E_e = \frac{G^2\ (\hbar c)^2}{\pi}\ |M_{fi}|^2\ p_e c\ E_e \approx 10^{-43}\ cm^2\ MeV^{-2} \cdot E_\nu^2$$

La sezione d'urto è molto piccola. Per rivelare l'interazione occorre una sorgente con flusso elevato e un bersaglio di grande massa.

L'esperimento è stato fatto da C.Cowan e F.Reines [19] nel 1956 presso un reattore nucleare. Nei decadimenti β che seguono una reazione di fissione (capitolo ???) vengono prodotti antineutrini che hanno energia totale $\approx$ 12 $MeV/fissione$. Il numero di antineutrini con $E_\nu \geq 1.8\ MeV$ è $\approx 0.5/fissione$. La misura è stata fatta presso il reattore da 1 GW del Savannah-River Plant con un flusso di antineutrini di circa $10^{13}\ cm^{-2}\ s^{-1}$. Il bersaglio era costituito da circa 1000 litri di acqua con $CdCl_2$ in contenitori alternati ad altri contenitori con scintillatore liquido. Il segnale da rivelare è molto caratteristico e quindi distinguibile dal fondo. Il positrone annichila non appena prodotto con vita media $\tau(e^+e^- \to \gamma\gamma) = 1.3\ 10^{-10}\ s$, mentre il neutrone viene termalizzato negli urti con nuclei di idrogeno in un intervallo di tempo di $\approx 10^{-5}\ s$. Il nucleo ${}^{114}_{48}Cd$ ha una grande sezione d'urto di cattura di neutroni termici e il nucleo ${}^{115}_{48}Cd^*$ che si forma si diseccita immediatamente emettendo raggi γ di energia totale di circa 6 MeV. Cowan e Reines rivelarono un numero di questi eventi caratteristici quando il reattore era in funzione decisamente maggiore del numero di eventi registrati a reattore spento ottenendo il risultato

$$\sigma(\overline{\nu}\ p \to n\ e^+) = (1.1 \pm 0.3)\ 10^{-43}\ cm^2$$

[19] premio Nobel per la fisica nel 1995

2.8 Reazioni nucleari

In una reazione nucleare due particelle o due nuclei cambiano stato per effetto della loro interazione

$$a + b \rightarrow c + d \ + Q$$

Q indica la differenza di massa tra lo stato iniziale e finale, $Q = (m_a + m_b - m_c - m_c)c^2$. Reazioni con $Q > 0$ sono chiamate *esotermiche*: massa viene convertita in energia cinetica dello stato finale. Reazioni con $Q < 0$ sono *endotermiche*: energia cinetica viene convertita in massa. Poiché l'interazione nucleare è a corto raggio d'azione, se le particelle nello stato iniziale hanno carica elettrica occorre fornire energia per superare la repulsione coulombiana. Nelle reazioni per interazione nucleare si conservano, oltre a energia, impulso, momento angolare e carica elettrica, il numero fermionico, l'isospin, la coniugazione di carica e la parità.

Il primo cambiamento di una sostanza dovuto a un processo nucleare fu osservato da Rutherford nel 1919 utilizzando particelle α emesse dal Polonio con energia cinetica sufficiente a compensare il valore negativo di Q e la repulsione coulombiana

$$\alpha + \ {}^{14}_{7}N \rightarrow \ {}^{17}_{8}O + p \qquad Q = -1.19 \ MeV$$

La prima reazione in cui sono stati usati protoni accelerati in modo articifiale è stata prodotta da Cockroft e Walton nel 1931

$$p + \ {}^{7}_{3}Li \rightarrow \alpha + \alpha \qquad Q = +17.35 \ MeV$$

La reazione con cui Chadwick scoprì il neutrone nel 1932

$$\alpha + \ {}^{9}_{4}Be \rightarrow \ {}^{12}_{6}C + n \qquad Q = +5.71 \ MeV$$

aprì nuove possibilità di indagine della struttura del nucleo e delle interazioni nucleari perché i neutroni non risentono della repulsione coulombiana e possono iniziare reazioni nucleari anche con energia molto piccola.

Oltre alle reazioni nucleari, vi sono reazioni dovute a interazioni elettromagnetiche o deboli, ad esempio

$$n + p \rightarrow \ {}^{2}_{1}H + \gamma \qquad Q = 2.22 \ MeV \qquad\qquad p + p \rightarrow \ {}^{2}_{1}H + e^{+} + \nu \qquad Q = 0.42 \ MeV$$

che hanno un ruolo fondamentale nella nucleosintesi e nel meccanismo di produzione di energia nelle stelle.

2.8.1 Sezione d'urto di reazione

Il calcolo delle sezioni d'urto di reazioni nucleari è basato sui metodi presentati nel capitolo ???. Per il potenziale nucleare si fanno ipotesi basate sui modelli del nucleo. La sezione d'urto *di reazione* è $\sigma_r = \pi(R + k^{-1})^2$, dove R è l'estensione del potenziale nucleare e $\hbar k$ è l'impulso delle particelle a e b nel centro di massa. Se l'energia cinetica è piccola rispetto al potenziale nucleare occorre tener conto

dell'effetto della buca di potenziale sulle funzioni d'onda. Ad esempio, la sezione d'urto di cattura di un neutrone di impulso $\hbar\vec{k}$ nel campo di un nucleo rappresentato da una buca di potenziale di profondità U_o è data dal prodotto della sezione d'urto di reazione per il coefficiente di riflessione dalla buca di potenziale (appendice 4.9)

$$\sigma_c = \pi(R + k^{-1})^2 \ \frac{4kk_N}{(k + k_N)^2} \qquad \hbar k = [2mE]^{1/2} \qquad \hbar k_N = [2m(E + U_o)]^{1/2}$$

A bassa energia, $k \ll R^{-1}$, $k \ll k_N$, la sezione d'urto di cattura è inversamente proporzionale alla velocità relativa

$$\lim_{k\to 0} \sigma_c = \frac{\pi}{k^2} \ \frac{4kk_N}{k_N^2} = \frac{4\pi}{kk_N} \approx 10^{-26} \ cm^2 \cdot \frac{c}{v}$$

Se la reazione avviene attraverso la formazione di una risonanza di spin I e massa M la sezione d'urto ha il tipico andamento

$$\sigma_r = \frac{4\pi}{k^2} \ \frac{2I + 1}{(2I_a + 1)(2I_b + 1)} \ \frac{\Gamma_i\Gamma_f/4}{(E - M)^2 - (\Gamma/4)^2}$$

dove Γ è la larghezza della risonanza e Γ_i, Γ_f, sono le larghezze parziali di decadimento nello stato iniziale e finale.

In generale, se si conosce l'elemento di matrice $\langle cd|H_I|ab\rangle$, la sezione d'urto è

$$\sigma(ab \to cd) = \frac{1}{\Phi_i} \ \frac{2\pi}{\hbar} \ |\langle cd|H_I|ab\rangle|^2 \ \rho(E_f)$$

$$\Phi_i = \frac{v_{ab}}{V} \qquad \rho(E_f) = g_f \ \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \ \frac{4\pi p_{bc}^2}{v_{bc}}$$

dove v_{ab} è la velocità relativa delle particelle nello stato iniziale e $g_f = (2I_c+1)(2I_d+1)$ è la molteplicità di spin dello stato finale

$$\sigma(ab \to cd) = \frac{V^2}{\pi\hbar^4} \ |\langle cd|H_I|ab\rangle|^2 \ (2I_c + 1)(2I_d + 1) \ \frac{p_{bc}^2}{v_{ab} \ v_{bc}}$$

Se la hamiltoniana di interazione nucleare è invariante per inversione temporale si ha $H^*_{fi} = H_{if}$ (capitolo ???). C'è quindi una importante relazione tra la sezione d'urto del processo $ab \to cd$ e quella del processo inverso, $cd \to ab$,

principio del bilancio dettagliato

$$\frac{\sigma(cd \to ab)}{\sigma(ab \to cd)} = \frac{(2I_a + 1)(2I_b + 1)}{(2I_c + 1)(2I_d + 1)} \ \frac{p_{ab}^2}{p_{cd}^2}$$

2.8.2 Fissione

La scoperta del neutrone fu seguita da una intensa attività per produrre reazioni nucleari iniziate da neutroni. Enrico Fermi [20] studiò le reazioni di cattura di neutroni per produrre nuclei pesanti e i loro decadimenti β. Nel 1938 O.Hahn [21] e

[20] premio Nobel per la fisica nel 1938
[21] premio Nobel per la chimica nel 1944

F.Strassmann osservarono che in collisioni di neutroni con nuclei di uranio si producono elementi con numero atomico pari a circa la metà di quello dell'uranio, ad esempio

$$n + {}_{92}U \rightarrow {}_{56}Ba + {}_{36}Kr$$

Nel 1939 L.Meitner e O.Frisch proposero che la produzione di elementi con numero atomico intermedio fosse dovuta alla *fissione* del nucleo pesante indotta da neutroni. Il processo di fissione in cui un nucleo pesante si scinde in due nuclei con peso atomico intermedio

$${}^{A}_{Z}N \rightarrow {}^{A-a}_{Z-z}X + {}^{a}_{z}Y + Q$$

è energeticamente favorito dal fatto che, per i nuclei con $A \sim 240$, l'energia di legame per nucleone è, $\overline{BE} \approx 7.6\ MeV$, mentre per i nuclei con $A \sim 120$ si ha $\overline{BE} \approx 8.5\ MeV$. Quindi in una reazione di fissione si producono $\approx 0.9\ MeV$ per nucleone. Nella fissione dell'uranio si ha $Q \approx 210\ MeV$.

La *fissione spontanea* è però impedita dal potenziale attrattivo dei nucleoni. Consideriamo il modello a goccia in cui un nucleo è in una configurazione sferica. Se questa viene deformata in un ellissoide di semiassi $a,\ b,\ b$, l'interazione nucleone-nucleone tende a mantenere costante il volume

$$V = \frac{4\pi}{3}ab^2 = \frac{4\pi}{3}R^3 \qquad \Rightarrow \qquad a = R(1+\varepsilon) \qquad b = R(1+\varepsilon)^{-1/2}$$

e ne deriva che la superficie del nucleo aumenta e anche la distanza media tra nucleoni aumenta

$$S = 4\pi R^2\left(1 + \frac{2\varepsilon^2}{5}\right) \qquad\qquad \langle\frac{1}{r}\rangle = \frac{3}{5R}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5}\right)$$

Usando la formula di Bethe-Weizsäcker, la variazione di energia del nucleo è

$$\Delta M = b_1 A^{2/3}\left(-\frac{2\varepsilon^2}{5}\right) + b_2\ \frac{Z^2}{A^{1/3}}\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right) = \frac{\varepsilon^2}{5}A^{2/3}\left[-2b_1 + b_2\ \frac{Z^2}{A}\right]$$

Introducendo il valore dei parametri $b_1 = 17.2\ MeV$, $b_2 = 0.70\ MeV$, la *condizione di stabilità*

$$\Delta M = \frac{\varepsilon^2}{5}\ A^{2/3}\left[-34.4 + 0.70\ \frac{Z^2}{A}\right] \leq 0$$

comporta $Z^2/A < 47$ che è soddisfatta da tutti i nuclei stabili, $(Z^2/A)_{max} = 35$. Questo esempio mostra che, per un nucleo leggermente deformato, l'aumento di energia si oppone alla deformazione e quindi alla fissione spontanea. Se immaginiamo il nucleo ${}^{A}_{Z}N$ in uno stato intermedio composto dei due nuclei ${}^{A-a}_{Z-z}X$ e ${}^{a}_{z}Y$, la buca di potenziale delimitata dalla barriera coulombiana impedisce la fissione spontanea. La fissione può essere indotta da neutroni (Fig.2.28) che forniscono la necessaria energia di attivazione per superare la barriera.

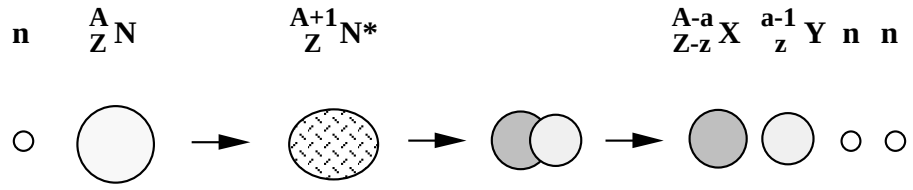


Figure 2.28: Fissione indotta da neutroni

2.8.3 Fissione indotta da neutroni

La teoria della fissione dei nuclei pesanti è stata formulata da Bohr e Wheeler sulla base del modello a goccia del nucleo. Consideriamo la fissione di un nucleo ${}^{A}_{Z}N$ in due nuclei ${}^{A/2}_{Z/2}X$. La variazione di energia è

$$Q = b_1 \left[A^{2/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{2/3} \right] + b_2 \left[Z^2 A^{-1/3} - 2 \, \frac{Z^2}{4} \left(\frac{A}{2} \right)^{-1/3} \right] =$$

$$= A^{2/3} \left[b_1 (1 - 2^{1/3}) + b_2 \, \frac{Z^2}{A} (1 - 2^{-2/3}) \right]$$

Usando i valori dei parametri b_k, la fissione può avvenire se

$$Q = A^{2/3} \left[-4.42 + 0.26 \, \frac{Z^2}{A} \right] \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Z^2}{A} \geq 17$$

Per un nucleo con $Z^2/A \geq 17$, i nuclei X e Y si trovano in uno stato di energia Q positiva ma rimangono legati dal potenziale nucleare se la distanza di separazione è minore della somma dei raggi (Fig.2.29)

$$r < R = R_X + R_Y \approx 2R_o(A/2)^{1/3}$$

L'altezza della barriera di potenziale coulombiana a distanza di separazione R è

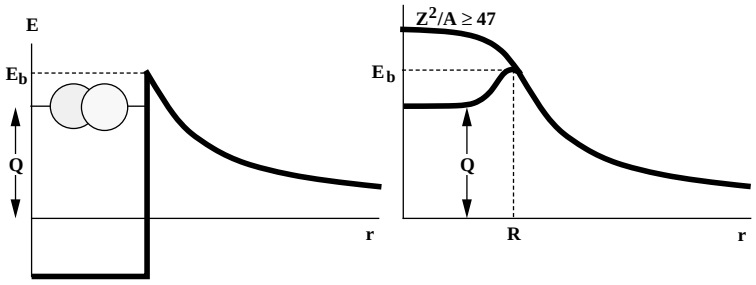


Figure 2.29: Energia in funzione della distanza di separazione dei nuclei

$$E_b = \alpha \hbar c \, \frac{(Z/2)^2}{2R_o(A/2)^{1/3}} = 0.16 \, \frac{\alpha \hbar c Z^2}{R_o A^{1/3}}$$

Per Uranio $E_b \approx 230 \; MeV$. Quindi abbiamo

- per i nuclei con $Z^2/A \geq 47$, cioè $A \geq 300$, la differenza di energia è positiva, $Q - E_b > 0$: i nuclei sono instabili per fissione spontanea;

- per i nuclei vicino alla soglia di instabilità cioè $Z^2/A \geq 17$, $A \approx 100$, la differenza di energia è molto grande $E_b - Q \approx 60\ MeV$: questi nuclei non sono soggetti a fissione;

- per i nuclei stabili più pesanti, $A \approx 240$, la differenza di energia è piccola e il processo di fissione indotta è facilitato dalla probabilità di attraversamento della barriera di potenziale per effetto tunnel. Tenuto conto di questo effetto si ha $E_b - Q \approx 6\ MeV$.

L'*energia di attivazione* necessaria per innescare la fissione, $E_b - Q$, è stata calcolata da Bohr e Wheeler. È diversa per i nuclei *A-dispari* e per i nuclei *A-pari*. Consideriamo, ad esempio, la fissione dell'uranio

- nel caso di ${}^{235}_{92}U$, per cattura di un neutrone si forma lo stato intermedio ${}^{236}_{92}U$; la differenza di massa è

  $$\Delta M = M({}^{235}_{92}U) + m_n - M({}^{236}_{92}U) = 6.5\ MeV$$

  l'energia di attivazione della fissione del ${}^{235}_{92}U$ è 6.2 MeV: quindi non occorre che i neutroni abbiano energia cinetica, la fissione del ${}^{235}_{92}U$ si ottiene con *neutroni termici*;

- nel caso di ${}^{238}_{92}U$, si forma lo stato intermedio ${}^{239}_{92}U$; la differenza di massa è

  $$\Delta M = M({}^{238}_{92}U) + m_n - M({}^{239}_{92}U) = 4.8\ MeV$$

  l'energia di attivazione della fissione del ${}^{238}_{92}U$ è 6.6 MeV: quindi per attivare la fissione del ${}^{238}_{92}U$ occorrono neutroni con energia cinetica $> 1.8\ MeV$.

In questo esempio è importante il contributo del termine $b^4 A^{-1/2}$ nell'energia di legame dei nuclei. Infatti nella massa dei nuclei *pari − pari* come ${}^{236}_{92}U$ e ${}^{238}_{92}U$ va sottratto il termine $b^4 A^{-1/2} = 12\ MeV/\sqrt{236} \approx 0.8\ MeV$. Nel primo caso questa energia è disponibile mentre nel secondo caso occorre fornirla: i due valori di ΔM differiscono approssimativamente di 1.6 MeV.

2.8.4 Fissione dell'uranio

L'uranio naturale è composto di due isotopi ${}^{238}_{92}U$ e ${}^{235}_{92}U$ con abbondanza relativa di 99.28% e 0.72%. La fissione del ${}^{235}_{92}U$ è iniziata da neutroni termici con sezione d'urto $\sigma^{235} = 580\ b$, mentre quella del ${}^{238}_{92}U$ da neutroni con energia cinetica $K_n > 1.8\ MeV$ con sezione d'urto molto più piccola, $\sigma^{238} \approx 0.5\ b$ (Fig.2.30). Nella fissione si libera energia $Q \approx 210\ MeV$ con un rendimento di massa $Q/M = 210\ MeV/220\ GeV \approx 10^{-3}$. Nello stato finale sono prodotti nuclei con $A_X \approx 95$, $A_Y \approx 140$, ad esempio

$$n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{87}_{35}Br + {}^{148}_{57}La + n \qquad\qquad n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{93}_{37}Rb + {}^{141}_{55}Cs + n + n$$

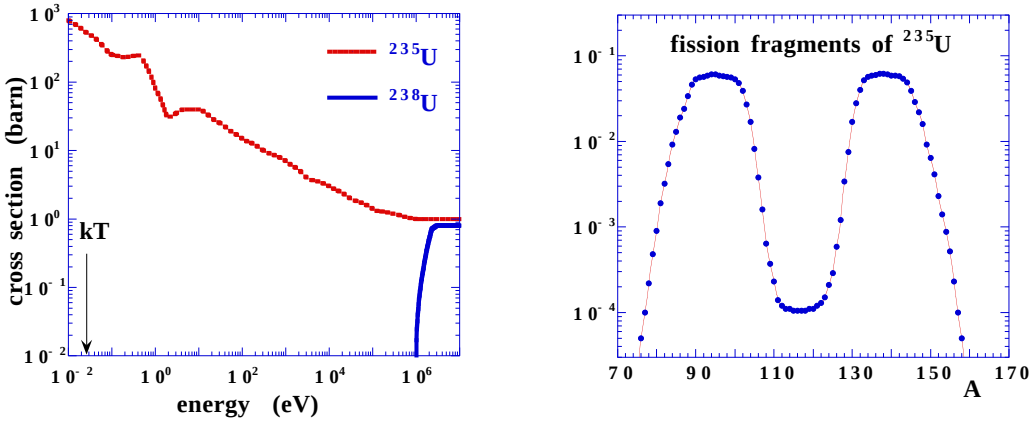


Figure 2.30: Sezione d'urto di cattura di neutroni in funzione dell'energia - Distribuzione dei frammenti di fissione del $^{235}_{92}U$

e un numero medio $\langle n_n \rangle \approx 2.5$ di *neutroni immediati* con energia cinetica $K_n \approx 2\ MeV$. La fissione avviene con tempi di reazione brevissimi $\tau = (10^{-16} \div 10^{-14})\ s$ e l'emissione di neutroni è accompagnata dall'emissione di *fotoni immediati*. L'energia dei prodotti leggeri è $E_n \approx 5\ MeV$, $E_\gamma \approx 8\ MeV$. Il resto dell'energia è energia cinetica dei due nuclei. Questi hanno un eccesso di neutroni e raggiungono la banda di stabilità nel piano $A - Z$ con emissione β^-. L'energia rilasciata nei decadimenti β è in media $E_\beta \approx 20\ MeV$, di cui approssimativamente 12 MeV in anti-neutrini. Nei decadimenti si formano anche nuclei in stati eccitati che decadono emettendo raggi γ con $E_\gamma \approx 8\ MeV$. Quindi la reazione di fissione è una sorgente di neutroni, fotoni, elettroni e anti-neutrini.

2.8.5 Reattore nucleare

Nella reazione di fissione si produce tipicamente un numero di neutroni > 1 e questi possono a loro volta produrre altre reazioni di fissione. Si possono quindi realizzare le condizioni per autoalimentare la reazione di fissione in un processo di *reazione a catena* e produrre energia dalla fissione. La prima *pila nucleare* è stata realizzata da Fermi e collaboratori nel 1942. Esistono diversi metodi per realizzare un *reattore nucleare* basato su reazioni a catena controllate, secondo il tipo di utilizzo

- per produrre energia;

- per produrre sorgenti di neutroni per la ricerca;
- per produrre radio-isotopi o altre sostanze fissili, quali ${}^{239}_{94}Pu$ o ${}^{233}_{92}U$.

Un tipico reattore nucleare per produrre energia è basato su reazioni a catena in uranio. In ogni reazione di fissione si producono in media $\simeq 200\ MeV$ e $\simeq 2.5$ neutroni energetici. La sezione d'urto di cattura di neutroni energetici è piccola, ma, se i neutroni vengono *moderati* facendogli perdere energia in successive collisioni con nuclei leggeri (capitolo ???), la sezione d'urto di neutroni termici in ${}^{235}_{92}U$ è grande e così la probabilità di produrre successive reazioni di fissione. Quindi l'elemento centrale di un reattore nucleare a uranio è costituito da *uranio arricchito* in ${}^{235}_{92}U$ (tipicamente $\simeq 3\%$) e da un materiale *moderatore*.

Per moderare i neutroni si usano di solito H_2O, D_2O o C. Il Carbonio non è molto efficiente, ma si può distribuire in modo efficace nel combustibile. Il vantaggio dell'acqua (pesante) è che può anche costituire il mezzo per raffreddare il reattore. Il nucleo di idrogeno è molto efficiente per moderare neutroni, ma ha una elevata sezione d'urto $n + p \rightarrow {}^{2}_{1}H + \gamma$ che sottrae neutroni al bilancio della reazione a catena. Il nucleo di deuterio ha una sezione d'urto $n + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{1}H + \gamma$ molto più piccola, ma produce trizio radioattivo che va filtrato nel sistema di raffreddamento.

Con una opportuna combinazione di combustibile e moderatore si può raggiungere la situazione in cui vi è in media un neutrone termico prodotto per reazione di fissione: *reattore critico*. Per evitare che questo fattore superi l'unità e che il reattore funzioni in regime *super-critico* con il rischio di esplosione, è opportuno poter inserire nel combustibile un materiale con elevata sezione d'urto di cattura di neutroni termici. Il materiale più indicato è il Cadmio che ha una serie di risonanze che assorbono neutroni termici.

In un reattore che opera in condizione critica, *un grammo* di ${}^{235}_{92}U$ produce energia

$$\frac{6\ 10^{23}}{235}\ 200\ MeV \approx 0.8\ 10^{11}\ J$$

pari a circa tre volte l'energia prodotta nella combustione di *una tonnellata* di carbone.

2.8.6 Fusione

Nella *reazione di fusione* due nuclei fondono per formare un nucleo con peso atomico maggiore. L'andamento dell'energia media di legame dei nuclei, $\overline{BE}$, in funzione del peso atomico, A, mostra che nella reazione di fusione

$${}^{a}_{z}X + {}^{A-a}_{Z-z}Y \rightarrow {}^{A}_{Z}N + Q$$

si libera energia $Q > 0$ se $\partial\overline{BE}/\partial A > 0$, cioè per $A < 60$. Poiché l'interazione nucleare è a breve raggio d'azione, la reazione di fusione può avvenire solo se i nuclei hanno inizialmente sufficiente energia cinetica per compensare la repulsione coulombiana e portare i due nuclei *a contatto*. Ad esempio, nella reazione

$${}^{12}_{6}C + {}^{12}_{6}C \rightarrow {}^{24}_{12}Mg$$

si produce energia $Q = 2M_C - M_{Mg} = 13.9\ MeV$, ma occorre che inizialmente i due nuclei ${}^{12}_{6}C$ abbiano energia

$$E \geq \alpha\hbar c\ \frac{Z^2}{R} = \frac{\alpha\hbar c Z^2}{2R_o A^{1/3}} = 9.0\ MeV$$

Spendendo 9.0 MeV si producono 13.9 MeV. Il rendimento in energia ($Q/2M_C \approx 6\ 10^{-4}$ in questo esempio) è tanto più elevato quanto minore è la massa dei nuclei che fondono.

L'energia liberata nella fusione si trasforma in energia cinetica dei nuclei e, se esiste un campo di forze che tiene i nuclei confinati, aumenta la temperatura di modo che si può raggiungere una situazione di equilibrio in cui la reazione di fusione è capace di autoalimentarsi e quindi produrre energia. Per i nuclei leggeri con $Z \approx A/2$, la temperatura necessaria per compensare la repulsione coulombiana è

$$kT = \frac{\alpha\hbar c A^{5/3}}{8R_o} \approx A^{5/3}\ 0.14\ MeV \qquad\qquad T \approx A^{5/3}\ 1.6\ 10^9\ K$$

Per valutare la probabilità che avvenga la reazione di fusione, consideriamo un gas di nuclei di massa m a temperatura T. Il numero di nuclei con velocità v segue la distribuzione di Maxwell

$$\frac{dn}{dv} = \frac{v^2}{(2kT/m)^{3/2}}\ e^{-mv^2/2kT}$$

La sezione d'urto di reazione è inversamente proporzionale alla velocità relativa e la probabilità di trasmissione attraverso la barriera di potenziale coulombiano è e^{-2G} con il fattore di Gamow (capitolo ???)

$$G = 2\alpha Z_X Z_Y \frac{c}{v}\left(\frac{\pi}{2} + \ldots\right)$$

La probabilità che avvenga la reazione di fusione è proporzionale al prodotto de flusso di nuclei per la sezione d'urto, $\langle nv\sigma\rangle$,

$$\langle nv\sigma\rangle \propto v^2\ exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2} - \frac{v_G}{v}\right) \qquad v_T = c\left(\frac{2kT}{mc^2}\right)^{1/2} \qquad v_G = 2\pi\alpha c Z_X Z_Y$$

che ha un massimo, detto *picco di Gamow*, per

$$\frac{2}{v} - \frac{2v}{v_T^2} + \frac{v_G}{v^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v^* \simeq \left(v_T^2 v_G/2\right)^{1/3}$$

Quindi, anche se i nuclei hanno energia cinetica media kT molto minore dell'energia necessaria a superare la barriera coulombiana, le fluttuazioni statistiche della distribuzione di Maxwell e la probabilità di effetto tunnel attraverso la barriera rendono possibile la fusione nucleare con energia cinetica media $mv^{*2}/2$ (Fig.2.31).

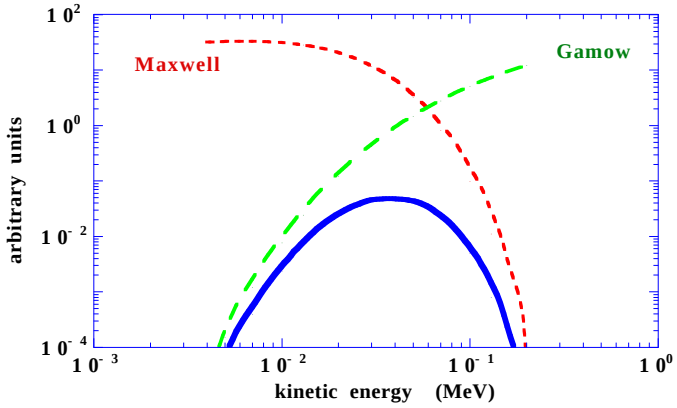


Figure 2.31: Distribuzione in energia dei protoni a temperatura $T = 1.5\ 10^7\ K$ e fattore di Gamow per la fusione protone-protone

2.8.7 Fusione nelle stelle

Il sole produce energia per fusione: quattro protoni formano un nucleo di Elio liberando circa 26 MeV con un rendimento molto elevato, $26\ MeV/3.75\ GeV = 0.007$. La temperatura all'*interno* del sole è $T \approx 1.5\ 10^7\ K$, corrispondente ad un'energia cinetica dei protoni $E_p \approx 1.3\ keV$ molto minore dell'energia di repulsione coulombiana $\approx 0.8\ MeV$.

La materia formatasi nella fase iniziale dell'evoluzione dell'universo, nella *nucleosintesi pimordiale*, è costituita per 3/4 da protoni, 1/4 da nuclei di Elio e solo per circa 1% da nuclei più pesanti. Le fluttuazioni della densità di particelle e l'attrazione gravitazionale hanno prodotto concentrazioni di materia e, quando la densità è diventata sufficientemente elevata si è innescato il ciclo della fusione.

La prima reazione del ciclo avviene per *interazione debole*

$$p\ p \rightarrow\ {}^2_1H\ e^+\ \nu \qquad\qquad Q = 0.42\ MeV$$

La sezione d'urto a bassa energia è estremamente piccola, $\sigma \approx 10^{-55}\ cm^2$: questa è la ragione per cui il sole *brucia* molto lentamente. La probabilità di reazione è molto minore di quella della reazione successiva in cui il deutone formatosi reagisce con i protoni

$$p\ {}^2_1H \rightarrow\ {}^3_2He\ \gamma \qquad\qquad Q = 5.49\ MeV$$

Quindi i deutoni sono consumati non appena prodotti. La reazione $p\ {}^3_2He \rightarrow\ {}^4_3Li\ \gamma$ non è utile per sostenere il ciclo perché il nucleo ${}^4_3Li$ non è stabile. Quando la densità di nuclei ${}^3_2He$ ha raggiunto valori sufficientemente elevati, avviene la reazione

$${}^3_2He\ {}^3_2He \rightarrow\ {}^4_2He\ p\ p \qquad\qquad Q = 12.86\ MeV$$

in cui si formano Elio e due protoni che sono disponibili per iniziare altri cicli. Questo è il modo principale del *ciclo protone-protone*

$$4p \rightarrow\ {}^4_2He\ 2e^+\ 2\gamma\ 2\nu$$

L'energia liberata è $4m_p - m_\alpha - 2m_e = 24.7\ MeV$, cui va aggiunta l'energia prodotta nell'annichilazione $e^+e^- \to \gamma\gamma$ pari a $2 \times 2m_e = 2.0\ MeV$. Ciascun neutrino viene prodotto con energia media $\langle E_\nu \rangle \approx 0.3\ MeV$ che viene sottratta al ciclo poiché i neutrini non interagiscono nel sole. Quindi il bilancio energetico del ciclo è di circa $26\ MeV$.

Vi è un'altra reazione con cui possono interagire i nuclei ${}^3_2He$ che avviene con probabilità $\approx 15\%$

$$ {}^3_2He\ {}^4_2He \to\ {}^7_4Be\ \gamma \qquad\qquad Q = 1.59\ MeV $$

seguita dal decadimento per cattura elettronica in cui vengono emessi neutrini monocromatici

$$ e^-\ {}^7_4Be \to\ {}^7_3Li\ \nu \qquad\qquad Q = 0.86\ MeV $$

e di nuovo dalla formazione di Elio

$$ p\ {}^7_3Li \to\ {}^4_2He\ {}^4_2He \qquad\qquad Q = 17.35\ MeV $$

Con probabilità molto più piccola, $\approx 2\ 10^{-4}$, si ha formazione di Boro

$$ p\ {}^7_4Be \to\ {}^8_5B\ \gamma \qquad\qquad Q = 0.14\ MeV $$

seguito dal decadimento β^+ in cui vengono emessi neutrini con $E_\nu^{max} \approx 14\ MeV$

$$ {}^8_5B \to\ {}^8_4Be^*\ e^+\ \nu \qquad\qquad Q = 14.02\ MeV $$

Il nucleo ${}^8_4Be^*$ non è stabile e decade appena formato in due nuclei di Elio chiudendo di nuovo il ciclo

$$ {}^8_4Be^* \to\ {}^4_2He\ {}^4_2He \qquad\qquad Q = 3.03\ MeV $$

L'energia cinetica dei vari prodotti del ciclo si trasferisce tramite moltissimi altri processi verso la superficie del sole, la *fotosfera*, mentre i neutrini non sono assorbiti e possono essere osservati sulla terra fornendo una evidenza diretta del modo in cui si svolgono i processi di fusione nel sole.

2.8.8 Nucleosintesi nelle stelle

Il sole brucia idrogeno in Elio da circa $5\ 10^9$ anni. Il valore della massa solare e la potenza emessa indicano che continuerà ancora per altri $5\ 10^9$ anni. Una stella che ha approssimativamente la massa del sole, quando l'idrogeno è esaurito, tende a contrarsi aumentando di densità poiché l'energia prodotta non è più in grado di bilanciare l'energia potenziale gravitazionale. Nella contrazione l'energia gravitazionale si converte in energia cinetica dei nuclei di modo che aumenta la temperatura e si possono innescare altre reazioni di fusione che formano nuclei più pesanti.

Il punto critico è quello della formazione del Carbonio. In una stella formata essenzialmente di nuclei ${}^4_2He$ si forma continuamente ${}^8_4Be$ che ha però massa leggermente maggiore di due volte la massa dell' ${}^4_2He$

$$ {}^4_2He\ {}^4_2He \to\ {}^8_4Be \qquad\qquad Q = -0.09\ MeV $$

e quindi decade immediatamente

$$^{8}_{4}Be \rightarrow \ ^{4}_{2}He\ ^{4}_{2}He \qquad\qquad \tau = 0.7\ 10^{-16}\ s$$

Anche con una densità di nuclei $^{4}_{2}He$ estremamente elevata, è molto improbabile la formazione di Carbonio per fusione $^{4}_{2}He\ ^{8}_{4}Be \rightarrow \ ^{12}_{6}C\ \gamma$. La reazione di fusione è resa possibile dal fatto che il Carbonio ha uno stato eccitato con massa di poco superiore alla somma delle masse di Elio e Berillio. La fusione avviene attraverso questo stato risonante

$$^{4}_{2}He\ ^{8}_{4}Be \rightarrow \ ^{12}_{6}C^{*} \qquad\qquad Q = 0.29\ MeV$$

che decade prevalentemente α nello stato di partenza, ma che ha anche una piccola probabilità, $\simeq 4\ 10^{-4}$, di decadere in modo radiativo allo stato fondamentale

$$^{12}_{6}C^{*}(0^{+}) \rightarrow \ ^{12}_{6}C^{*}(1^{-})\ \gamma \qquad\qquad ^{12}_{6}C^{*}(1^{-}) \rightarrow \ ^{12}_{6}C(0^{+})\ \gamma$$

Il Carbonio ha nell'universo *abbondanza relativa* elevata e può essere presente anche nelle stelle che non hanno esaurito il ciclo energetico del protone. In presenza di protoni il nucleo $^{12}_{6}C$ agisce come catalizzatore di un altro ciclo, analogo al ciclo protone-protone, che produce energia trasformando protoni in nuclei di Elio: il *ciclo C-N-O*.

reazione	$Q\ (MeV)$
$p\ ^{12}_{6}C \rightarrow \ ^{13}_{7}N\ \gamma$	1.94
$^{13}_{7}N \rightarrow \ ^{13}_{6}C\ e^{+}\ \nu$	1.20
$p\ ^{13}_{6}C \rightarrow \ ^{14}_{7}N\ \gamma$	7.55
$p\ ^{14}_{7}N \rightarrow \ ^{15}_{8}O\ \gamma$	7.29
$^{15}_{8}O \rightarrow \ ^{15}_{7}N\ e^{+}\ \nu$	1.74
$p\ ^{15}_{7}N \rightarrow \ ^{12}_{6}C\ ^{4}_{2}He$	4.96

$4p \rightarrow \ ^{4}_{2}He\ 2e^{+}\ 3\gamma\ 2\nu$. Sommando le energie e quella prodotta nell'annichilazione dei positroni si ottiene di nuovo $\sum Q = 26.7\ MeV$.

Il $^{12}_{6}C$ è un nucleo fortemente legato ed è il punto di partenza per la formazione di nuclei pesanti per fusione, ad esempio

reazione	$Q\ (MeV)$	*energia coulombiana* (MeV)
$^{4}_{2}He\ ^{12}_{6}C \rightarrow \ ^{16}_{8}O\ \gamma$	7.16	3.6
$^{4}_{2}He\ ^{16}_{8}O \rightarrow \ ^{20}_{10}Ne\ \gamma$	4.73	4.5
$^{4}_{2}He\ ^{20}_{10}Ne \rightarrow \ ^{24}_{12}Mg\ \gamma$	9.31	5.4

Poiché la barriera di potenziale aumenta col numero atomico, l'abbondanza relativa dei nuclei diminuisce all'aumentare di A.

Una volta esaurito l'Elio come combustibile, la stella, se ha massa sufficientemente elevata, tende di nuovo a contrarsi aumentando densità e temperatura e

può iniziare a utilizzare come combustibile Carbonio e Ossigeno. La barriera di potenziale è rispettivamente 9.0 e 14.6 MeV e, per sostenere le reazioni di fusione occorrono temperature $T \geq 10^9\ K$

reazione	$Q(MeV)$	*reazione*	$Q(MeV)$
${}^{12}_{6}C\ {}^{12}_{6}C \rightarrow\ {}^{20}_{10}Ne\ \alpha$	4.62	${}^{16}_{8}O\ {}^{16}_{8}O \rightarrow\ {}^{28}_{14}Si\ \alpha$	9.59
${}^{12}_{6}C\ {}^{12}_{6}C \rightarrow\ {}^{23}_{11}Na\ p$	2.24	${}^{16}_{8}O\ {}^{16}_{8}O \rightarrow\ {}^{31}_{15}P\ p$	7.68
${}^{12}_{6}C\ {}^{12}_{6}C \rightarrow\ {}^{23}_{12}Mg\ n$	-2.61	${}^{16}_{8}O\ {}^{16}_{8}O \rightarrow\ {}^{31}_{16}S\ n$	1.46
${}^{12}_{6}C\ {}^{12}_{6}C \rightarrow\ {}^{24}_{12}Mg\ \gamma$	13.93	${}^{16}_{8}O\ {}^{16}_{8}O \rightarrow\ {}^{32}_{16}S\ \gamma$	16.54

In queste reazioni, oltre ai nuclei pesanti, si producono fotoni, protoni, neutroni e particelle α con energie sufficientemente elevate da produrre altri nuclei pesanti a partire dai nuclei ${}^{28}_{14}Si$ e ${}^{32}_{16}S$. Queste reazioni sono energeticamente favorite rispetto a reazioni di fusione del tipo ${}^{28}_{14}Si\ {}^{28}_{14}Si \rightarrow\ {}^{56}_{28}Ni\ \gamma$ che richiede una temperatura ancora più elevata.

La nucleosintesi per fusione nucleare procede fino alla formazione dei nuclei con $A \approx 60$. Per $A \geq 60$ si ha $\partial\overline{BE}/\partial A < 0$ e quindi la fusione diventa endotermica: occorre fornire energia per produrre nuclei più pesanti. La formazione di nuclei pesanti è molto più probabile con neutroni energetici che non con particelle cariche, p o α. Quindi la produzione di nuclei con peso atomico maggiore procede per cattura di neutroni e per decadimento β^-

$$n\ {}^{A}_{Z}X\ \rightarrow\ {}^{A+1}_{Z}X\ \gamma \qquad\qquad {}^{A+1}_{Z}X \rightarrow\ {}^{A+1}_{Z+1}Y\ e^-\ \overline{\nu}$$

L'abbondanza relativa dei nuclei pesanti dipende dalla probabilità di cattura neutronica nell'unità di tempo λ_n e dalla costante di decadimento λ_β

- se $\lambda_n \ll \lambda_\beta$ il nucleo ${}^{A+1}_{Z}X$ formato per cattura di un neutrone ha tempo di decadere β^- e quindi i nuclei si formano lungo la banda di stabilità; poiché λ_n è piccolo e le reazioni avvengono con frequenza bassa, questi sono chiamati *processi-s* (*slow*);

- se $\lambda_n \gg \lambda_\beta$ il nucleo formato non decade e con successive reazioni gli isotopi si allontanano dalla banda di stabilità (${}^{A}_{Z}X \rightarrow\ {}^{A+1}_{Z}X \rightarrow\ {}^{A+2}_{Z}X \rightarrow \ldots$) aumentando il numero di neutroni e quindi anche l'instabilità per decadimento β^-; poiché λ_n è grande e le reazioni avvengono con frequenza elevata, questi sono chiamati *processi-r* (*rapid*).

La maggior parte della materia è concentrata in nuclei di Idrogeno (75%) e Elio (24%) formati nella nucleosintesi primordiale. La nucleosintesi nelle stelle non aumenta l'abbondanza dei nuclei leggeri, litio, berillio e boro, che sono particolarmente rari. I nuclei più diffusi sono quelli formati con particelle α, (Carbonio, Ossigeno, Neon, Magnesio, Silicio, ...) e i nuclei con $A \approx 60$ vicino al valore massimo dell'energia di legame media, $\overline{BE}$, (Ferro, Nichel, ...). I nuclei con $A > 60$ hanno abbondanza relativa che diminuisce con A, con un valore maggiore in corrispondenza dei numeri magici. La Fig.2.32 mostra l'abbondanza relativa degli elementi nel sistema solare.

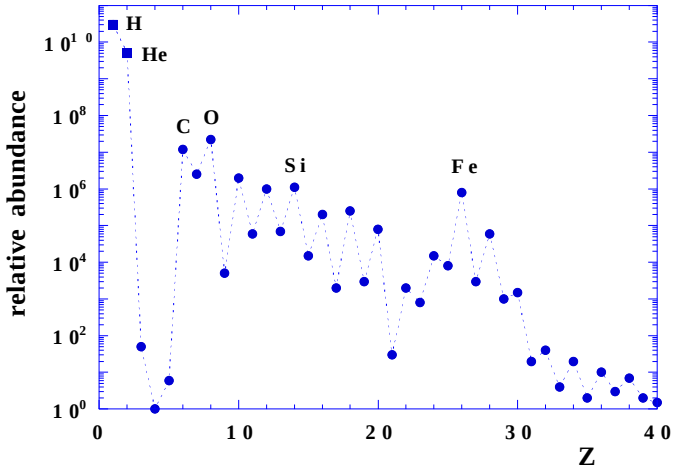


Figure 2.32: Abbondanza relativa degli elementi nel sistema solare

2.8.9 Fusione in laboratorio

La fusione ha un rendimento energetico maggiore della fissione e, usando come combustibile nuclei leggeri, non produce materiali radioattivi. È però molto più difficile realizzare e mantenere in laboratorio le condizioni di temperatura e densità per produrre energia dalla fusione. La barriera di potenziale coulombiana aumenta col numero atomico Z e per nuclei leggeri è tipicamente di $\simeq 1\ MeV$. Tenendo conto della probabilità di effetto tunnel occorre comunque raggiungere energie $\simeq 10\ keV$ cioè temperature $\simeq 10^8\ K$. In queste condizioni gli atomi sono completamente ionizzati e si produce un *plasma* di ioni e elettroni. In un plasma ad alta densità gli elettroni, accelerati nei forti campi elettrici dei nuclei emmettono radiazione di bremsstrahlung sottraendo energia al plasma. La potenza irraggiata è proporzionale a Z^2. Quindi le condizioni per poter alimentare le reazioni di fusione e produrre energia sono

- utilizzare nuclei con numero atomico Z piccolo;
- operare a temperatura elevata, $T > 10^8\ K$;
- operare a densità elevata;
- utilizzare reazioni con sezione d'urto grande e che producono energia elevata nello stato finale.

Alcune reazioni di fusione di nuclei leggeri sono

reazione	$Q\ (MeV)$
${}^2_1H\ {}^2_1H \rightarrow {}^4_2He\ \gamma$	23.8
${}^2_1H\ {}^2_1H \rightarrow {}^3_2He\ n$	3.3
${}^2_1H\ {}^2_1H \rightarrow {}^3_1H\ p$	4.0
${}^2_1H\ {}^3_1H \rightarrow {}^4_2He\ n$	17.6
${}^2_1H\ {}^3_2He \rightarrow {}^4_2He\ p$	18.3

La prima reazione ha una sezione d'urto piccola. Le reazioni di fusione ${}^2_1H\ {}^2_1H$ hanno un rendimento energetico basso. La fusione ${}^2_1H\ {}^3_1H$ ha, nelle stesse condizioni, un rendimento molto maggiore. La fusione ${}^2_1H\ {}^3_2He$ richiede temperatura più elevata perché l'Elio ha $Z = 2$. Quindi la reazione più promettente è la fusione deuterio-trizio. C'è lo svantaggio che l'energia viene convertita prevalentemente in energia cinetica del neutrone, $K_n = 14.1\ MeV$, ma in condizioni di densità molto elevata questo cede rapidamente l'energia agli altri nuclei.

La difficoltà maggiore nel realizzare la fusione in laboratorio è il confinamento del plasma in modo da mantenere le condizioni di densità elevata durante la fusione. I metodi che sembrano più promettenti sono

- il confinamento magnetico;
- il confinamento inerziale.

Nel primo si sfrutta la forza di Lorentz, ad esempio con un campo toroidale, per mantenere le particelle cariche, ioni e elettroni, in una limitata regione di spazio. Nel secondo si utilizza per il confinamento l'energia di fasci laser o fasci di ioni opportunamente diretti e focalizzati.

Chapter 3

Fisica subnucleare

3.1 Particelle e interazioni

I costituenti *elementari* degli atomi sono il protone, il neutrone e l'elettrone. Nei decadimenti β dei nuclei sono emesse, oltre l'elettrone, alcune nuove particelle: il positrone, i neutrini e gli antineutrini. Tutte queste particelle sono fermioni di spin 1/2. Nei decadimenti radiativi di atomi o nuclei sono emessi fotoni, bosoni di spin 1. Il quadro delle particelle note è:

$fermioni$		$antifermioni$	$bosoni$
p	ν	$\bar{\nu}$	γ
n	e^-	e^+	

Le interazioni tra i fermioni sono descritte da *campi bosonici* e la loro intensità è definita da *costanti di accoppiamento*. Ad esempio, l'interazione tra due cariche elettriche ha intensità proporzionale al prodotto delle cariche e all'inverso della distanza: è mediata da un campo di bosoni di massa nulla, i fotoni, e la costante di accoppiamento è proporzionale al prodotto delle cariche elettriche.

Se H_I è la hamiltoniana che descrive l'interazione, la probabilità che avvenga un processo fisico da uno stato iniziale $|i\rangle$ a uno stato finale $|f\rangle$ è proporzionale a $|\langle f|H_I|i\rangle|^2$. Se il campo di interazione è descritto da un potenziale $U(\vec{r},t)$ l'elemento di matrice è la trasformata di Fourier del campo, il *propagatore*, ed è una funzione dell'impulso trasferito nell'interazione $(\vec{q},\nu)$.

L'interazione elettromagnetica tra due cariche elettriche è descritta da un potenziale $U(\vec{r}) \propto QQ'/r$ e per l'ampiezza di transizione si ha $\langle f|H_I|i\rangle \propto 4\pi QQ'/q^2$. Nella teoria di Fermi del decadimento β dei nuclei (capitolo ???) l'interazione debole è descritta con un potenziale di interazione a contatto, $U(\vec{r}) \propto \delta(\vec{r})$, e l'ampiezza di transizione è costante. Nel modello di Yukawa (capitolo ???) l'interazione nucleare a corto raggio d'azione è descritta con un potenziale $U(\vec{r}) \propto e^{-\mu r}/r$, dove μ è la massa del bosone che trasmette l'interazione. L'ampiezza di transizione è $\langle f|H_I|i\rangle \propto 4\pi/(q^2+\mu^2)$.

Per l'interazione elettromagnetica la costante di accoppiamento adimensionale è $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_o\hbar c = 1/137$. Le costanti di accoppiamento dell'interazione debole e

dell'interazione nucleare sono definite in modo analogo e dipendono dalle *cariche* rispettivamente di tipo debole e di tipo nucleare (Fig.3.1)

interazione	*campo*	*propagatore*	*costante di accoppiamento*
elettromagnetica	$\alpha\hbar c/r$	α/q^2	$\alpha = 1/137$
debole	$g\delta(\vec{r})$	$g/(\hbar c)^3$	$G = 1.16\ 10^{-5}\ GeV^{-2}$
nucleare	$\alpha_s\hbar c e^{-\mu r}/r$	$\alpha_s/(q^2+\mu^2)$	$\alpha_s \simeq \mu/m_p$

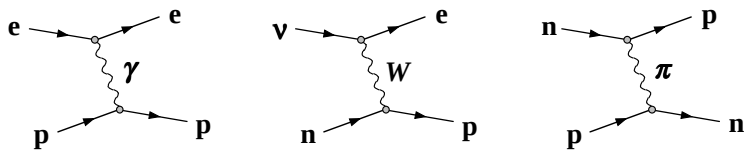


Figure 3.1: Rappresentazione della diffusione $e^- p \to e^- p$ con scambio di un fotone, $\nu n \to e^- p$ con scambio di un bosone W, $np \to pn$ con scambio di un mesone π

L'interazione a contatto di Fermi definisce una costante di accoppiamento $G = g/(\hbar c)^3$ *non* adimensionale. Vedremo nel seguito che il modello con un propagatore costante descrive in modo accurato le interazioni deboli a bassa energia ma non può trattare in modo corretto le interazioni a energia elevata e modificheremo il propagatore $G \to GM^2/(q^2+M^2)$. La massa del bosone che trasmette l'interazione è molto grande e quindi finché $q^2 \ll M^2$ la teoria di Fermi dà risulati corretti. La costante adimensionale ha un valore simile alla costante di accoppiamento dell'interazione elettromagnetica: $GM^2 \approx \alpha$.

Con lo studio delle reazioni prodotte dai raggi cosmici e, a partire dalla metà del '900, di reazioni prodotte con l'impiego di acceleratori furono scoperte moltissime nuove particelle. La maggior parte di queste, inclusi il protone e il neutrone non sono particelle elementari, ma sono formate da costituenti elementari che sono chiamati *quark*. Questi, come l'elettrone e il neutrino, sono fermioni di spin 1/2. La suddivisione delle particelle in fermioni di spin 1/2 sorgenti dei campi, e bosoni di spin 1 mediatori delle tre interazioni non viene sostanzialmente cambiata.

3.1.1 Raggi cosmici

Già all'inizio del '900 era noto che sostanze radioattive producono ionizzazione, ma era stato osservato che la ionizzazione, ad esempio in un gas, veniva prodotta anche in assenza di sorgenti radioattive. Nel 1912 Victor Hess [1] misurò il livello di radiazione ionizzante con rivelatori montati su palloni aerostatici e registrò un notebole aumento di attività con l'aumentare della quota: scoprì che l'atmosfera è investita da particelle ionizzanti che vengono dall'alto. Negli anni successivi furono fatti molti esperimenti a livello del mare e ad alta quota per studiare i raggi cosmici. Quelli che venivano osservati sono la *componente secondaria* della radiazione cosmica

[1] premio Nobel per la fisica nel 1936

prodotta nell'interazione dei raggi cosmici primari con l'atmosfera terrestre. Quando l'energia è molto elevata vengono prodotte molte particelle secondarie e queste a loro volta possono fare nuove interazioni e moltiplicare il numero di secondari. La grandezza che caratterizza la produzione di questi *sciami di particelle* è la *lunghezza di interazione* nucleare

$$\lambda_{int} = \frac{1}{n\sigma_{nucl}} = \frac{A}{N\rho} \frac{1}{\pi R_o^2 A^{2/3}} \simeq 34\ g\ cm^{-2} \times \frac{A^{1/3}}{\rho}$$

Per Azoto e una densità media dell'atmosfera $\rho \simeq 2\ 10^{-4}\ g\ cm^{-3}$ si ha $\lambda_{int} \simeq 4\ km$. Quindi tutti i raggi cosmici primari producono interazioni nell'atmosfera.

3.1.2 Raggi cosmici primari

Lo studio di questi *sciami atmosferici estesi* a livello del mare e in quota permette di avere informazioni sull'energia, sulla direzione e sul tipo di particella primaria. In anni più ecenti sono stati fatti anche esperimenti su satelliti e su sonde spaziali per studiare direttamente i raggi cosmici primari. L'energia si estende su un enorme intervallo da $10^8\ eV$ a circa $10^{20}\ eV$ che costituisce l'attuale limite di sensibilità delle misure. A bassa energia, $E < 10^9\ eV$, la distribuzione angolare e di energia è fortemente influenzata dalla radiazione solare e dal campo magnetico terrestre. Per energie maggiori la distribuzione angolare è approssimativamente isotropa.

Il flusso di raggi cosmici che investe l'atmosfera è circa 1000 $cm^{-2}\ s^{-1}$. Il flusso (Fig.3.2) diminuisce rapidamente con l'energia seguendo una legge di potenza, $\Phi \propto E^{-\gamma}$, con $\gamma = 2.7$ nell'intervallo $E = 10^{10} \div 3\ 10^{15}\ eV$ e $\gamma = 3.0$ nell'intervallo $E = 3\ 10^{15} \div 3\ 10^{18}\ eV$. Il punto $E = 3\ 10^{15}\ eV$ è chiamato *ginocchio* (*knee*). Per $E > 3\ 10^{18}\ eV$, chiamato *caviglia* (*ankle*), il valore dell'esponente aumenta leggermente.

Per energia minore di $10^{15}\ eV$ il flusso è sufficientemente elevato per studiare la composizione dei raggi cosmici. Si è osservato che questi sono costituiti per il 98% da nuclei (85% protoni, 12% particelle α, 1% nuclei più pesanti) e solo per il 2% da elettroni. L'abbondanza relativa di elementi osservata nei raggi cosmici riproduce approssimativamente quella osservata nel sistema solare, ma c'è un eccesso di nuclei con massa maggiore dell'Elio. Questo fa ritenere che le sorgenti di raggi cosmici in questo intervallo di energia siano connesse a esplosioni di stelle che hanno completato la nucleosintesi di tutti gli elementi. Nei raggi cosmici non si osservano positroni, né antiprotoni, né antiparticelle α: la radiazione cosmica primaria non contiene antimateria.

Le informazioni sullo spettro di energia e sulla distribuzione angolare permette di fare ipotesi sulle sorgenti, sui meccanismi di accelerazione e sulla propagazione dei raggi cosmici nello spazio. Si ritiene che le sorgenti di raggi cosmici che producono l'andamento a potenza fino alla regione della caviglia sia all'interno della Galassia, mentre per spiegare lo spettro di energia per $E > 10^{19}\ eV$ è necessario ipotizzare sorgenti extragalattiche con potenza notevolmente superiore a quella di

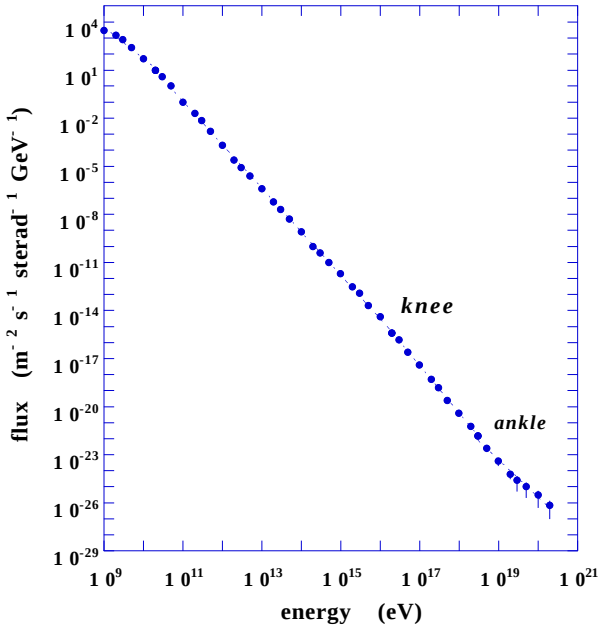


Figure 3.2: Flusso dei raggi cosmici primari

esplosioni di supernovae. In questa regione di energia i campi magnetici nella Galassia, $\langle B \rangle \simeq 2\ 10^{-10}\ T$, non sono sufficienti a deviare apprezzabilmente la traiettoria e quindi la direzione con cui i raggi cosmici arrivano sulla terra dà informazioni sulla locazione della sorgente. Questa si può anche ottenere su tutto lo spettro studiando la distribuzione angolare di raggi γ e neutrini, ma la sezione d'urto di interazione è molto più bassa.

3.1.3 Raggi cosmici secondari

Il flusso di raggi cosmici secondari a livello del mare è circa 100 $cm^{-2}\ s^{-1}$. I primi esperimenti erano fatti con camere a nebbia (capitolo ???) in campo magnetico per misurare impulso e carica elettrica delle particelle (Fig.3.3). Lo sviluppo di questo metodo sperimentale negli anni '30 è dovuto essenzialmente a Patrick Blackett [2]. All'interno del rivelatore era inserito un piccolo spessore di materiale di densità elevata in modo da poter misurare la perdita di energia e la direzione delle particelle.

Con questa tecnica nel 1932 Anderson [3] osservò la produzione di particelle di carica elettrica positiva che non potevano essere identificate con protoni. Studiando il percorso residuo di queste particelle nel rivelatore concluse che la massa è molto minore di quella del protone: quindi non si tratta di protoni, scoprì l'anti-elettrone e confermò la teoria formulata da Dirac pochi anni prima.

Nel 1937 Anderson e Neddermeyer individuarono due diversi comportamenti dei

[2] premio Nobel per la fisica nel 1948
[3] premio Nobel per la fisica nel 1936

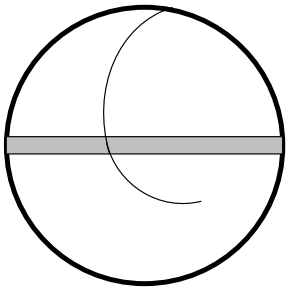


Figure 3.3: Traiettoria di una particella carica in camera a nebbia

raggi cosmici secondari

- una *componente penetrante* per cui la perdita di energia per ionizzazione è indipendente dall'energia;
- e una *componente non penetrante* per cui la perdita di energia è proporzionale all'energia.

La componente non penetrante è originata da fotoni o elettroni che producono cascate elettrofotoniche (capitolo ???). La componente penetrante è invece costituita da particelle di carica elettrica sia positiva che negativa che non erano identificate né con elettroni né con protoni e che avevano una massa intermedia $m_e < m < m_p$. Per questa ragione queste particelle vennero chiamate *mesoni* (particelle di massa intermedia).

Pochi mesi dopo, Street e Stevenson, misurando l'impulso e la perdita di energia di queste particelle, stimarono il valore della massa: $m = 100 \div 200\ m_e$. Il mesone della componente penetrante dei raggi cosmici fu chiamato μ (*muone*). La massa è $m_\mu = 106\ MeV/c^2$. Si osservò che i muoni sono particelle instabili che decadono in elettroni e radiazione neutra che non era rivelata dagli strumenti, quindi non si tratta di raggi γ. Nel 1942 Rasetti, misurando il ritardo tra il passaggio di un muone e l'emissione dell'elettrone, determinò la vita media: $\tau_\mu \simeq 2.2\ 10^{-6}\ s$. Gli elettroni sono emessi con una distribuzione continua di energia come nel caso del decadimento β dei nuclei e con valore massimo $E_{max} \simeq m_\mu/2$: quindi le particelle neutre sono almeno due e hanno massa molto minore della massa del muone. Se si tratta di due neutrini il muone deve essere un fermione. Se è un fermione, in base alla teoria di Dirac, esiste il corrispondente antifermione con la stessa massa e la stessa vita media. Il decadimento fu interpretato

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm\ \nu\ \bar{\nu}$$

L'esistenza di particelle di massa $m = 100 \div 200\ MeV/c^2$ era prevista nel modello di Yukawa come mediatori dell'interazione nucleare (capitolo ???), ma questi devono essere bosoni. Nel 1946 Conversi, Pancini e Piccioni fecero un esperimento per misurare l'intensità dell'interazione dei mesoni. Osservarono che i mesoni μ^+ assorbiti in un materiale decadono senza interagire, mentre i mesoni μ^- vengono catturati dai

nuclei e poi decadono. Studiando il comportamento in diversi materiali conclusero che il muone non è soggetto a interazioni nucleare e che quindi non è il mesone di Yukawa.

L'anno successivo studiando le interazioni di raggi cosmici ad alta quota in emulsioni nucleari Lattes, Occhialini e Powell osservarono delle particelle cariche che, arrivate a fine percorso nel rivelatore, decadono in una particella carica che ha una lunghezza di traccia costante, cioè energia costante. Questa a sua volta, come la particella μ, decade in un elettrone. Quindi la nuova particella, chiamata *mesone* π, decade in una particella μ e una particella neutra non rivelata. Se questa è un neutrino, il bilancio energetico del decadimento

$$\pi \rightarrow \mu\ \nu$$

fornisce una stima del valore della massa $m_\pi \simeq 1.3\ m_\mu$. La particella π decade in due fermioni: è un bosone e quindi può essere identificata con il mesone di Yukawa. Il mesone π è stato identificato in due stati di carica elettrica, π^+ e π^-, la massa è 140 MeV/c^2 e la vita media è $\tau_\pi = 2.6\ 10^{-8}\ s$. Il valore della vita media indica che si tratta di un decadimento per interazione debole come nel caso del decadimento $\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}$.

Le interazioni nucleari non dipendono dalla carica elettrica delle particelle e il modello di Yukawa prevedeva l'esistenza di mesoni in tre stati di carica elettrica. Quindi nell'interazione dei raggi cosmici primari si producono mesoni π^-, π^0, π^+ con uguale abbondanza. Subito dopo la scoperta del mesone $\pi^\pm$ Oppenheimer propose che la componente non penetrante dei raggi cosmici fosse originata dal decadimento del mesone neutro, $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. I raggi γ interagendo con in nuclei dell'atmosfera originano a loro volta cascate elettrofotoniche costituite da molti elettroni, positroni e fotoni. Questo decadimento avviene per interazione elettromagnetica, quindi con vita media molto più breve del decadimento $\pi \rightarrow \mu\nu$.

Il mesone π^0 fu osservato nel 1950 in uno dei primi esperimenti fatti con fasci secondari presso un acceleratore di protoni. Il fascio primario interagendo su un bersaglio produce mesoni e i mesoni carichi possono essere guidati con campi magnetici su altri bersagli. La sezione d'urto di reazione è quella tipica dell'interazione nucleare, $\sigma \simeq \pi(R + \hbar/p^*)^2$, dove R è il raggio del nucleo bersaglio e p^* è l'impulso nel centro di massa della reazione. Nell'interazione di mesoni di bassa energia su nuclei fu osservata la produzione di fotoni con energia $\approx 70\ MeV$ che fu intepretata

$$\pi^+\ N \rightarrow \pi^0\ X \qquad\qquad \pi^0 \rightarrow \gamma\ \gamma$$

La misura dell'energia e della direzione dei due fotoni permette di ricostruire la massa dalla relazione $m^2 = 2E_1E_2(1 - \cos\theta)$. Il valore misurato è $m_{\pi^0} = 135\ MeV/c^2$. La vita media è $\tau_{\pi^0} = 0.84\ 10^{-16}\ s$.

3.1.4 I mesoni π

Il muone è un fermione di spin 1/2 e ha le stesse caratteristiche dell'elettrone. È soggetto solo ad interazione elettromagnetica e debole. Il neutrino è anch'esso un

fermione di spin 1/2 soggetto solo all'interazione debole. Le particelle che non sono soggette a interazione nucleare, l'elettrone, il muone e il neutrino, sono chiamati *leptoni* (particelle di massa piccola). I leptoni sono *particelle elementari*, cioè non hanno una struttura interna, e soddisfano l'equazione di Dirac. L'elettrone è *per convenzione* un fermione e il positrone il corrispondente antifermione. Per la conservazione del numero fermionico e della carica elettrica μ^- è un fermione e μ^+ un antifermione. Come verrà mostrato nel seguito i due neutrini prodotti nel decadimento del leptone μ sono distinguibili, uno è associato all'elettrone e l'altro al muone. Quindi il decadimento dei due stati coniugati di carica è

$$\mu^+ \to \bar{\nu}_\mu \; e^+ \; \nu_e \qquad\qquad \mu^- \to \nu_\mu \; e^- \; \bar{\nu}_e$$

I mesoni π, chiamati *pioni*, sono invece bosoni, sono soggetti oltre alle interazioni elettromagnetica e debole anche all'interazione nucleare e *non* sono particelle elementari, ma hanno una estensione spaziale finita e una struttura interna. I numeri quantici dei mesoni π sono definiti dalle leggi di conservazione. Facciamo alcuni esempi, che hanno per lo più interesse storico, di reazioni con cui sono stati determinati i numeri quantici.

Spin

La simmetria dell'interazione nucleare per inversione temporale definisce una relazione tra le sezioni d'urto $\pi^+ d \to pp$ e $pp \to \pi^+ d$ (d è il nucleo di deuterio che è uno stato $spin^{parita'} = 1^+$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(\pi^+ d \to pp\right) = costante \times |\langle pp|H|\pi^+ d\rangle|^2 \; (2s_p+1)^2 \; \frac{p_p^2}{v_{\pi d} v_{pp}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(pp \to \pi^+ d\right) = costante \times |\langle \pi^+ d|H|pp\rangle|^2 \; (2s_d+1)(2s_\pi+1) \; \frac{p_\pi^2}{v_{\pi d} v_{pp}}$$

Integrando sull'angolo, tenendo conto che i due protoni nello stato finale sono indistinguibili, si ottiene

$$\frac{\sigma(pp \to \pi^+ d)}{\sigma(\pi^+ d \to pp)} = \frac{(2s_\pi+1)(2s_d+1)}{(2s_p+1)^2/2} \; \frac{p_\pi^2}{p_p^2} = \frac{3}{2}\,(2s_\pi+1)\,\frac{p_\pi^2}{p_p^2}$$

I risultati delle misure sono

$$\begin{array}{ccc} K_p = 340 \; MeV & p_{cm} = 82 \; MeV & \sigma(pp \to \pi^+ d) = 0.18 \; mb \\ K_\pi = 28 \; MeV & p_{cm} = 400 \; MeV & \sigma(\pi^+ d \to pp) = 3.1 \; mb \end{array}$$

da cui otteniamo $2s_\pi + 1 \simeq 1$: il pione carico ha *spin zero*.

Il pione neutro decade $\pi^0 \to \gamma\gamma$ in uno stato di due bosoni identici, il momento angolare dello stato finale è *pari*: $s_\pi = 0,\ 2, \ldots$. Inoltre nelle interazioni nucleari vengono prodotti mesoni neutri con la stessa molteplicità $2s_\pi + 1$ dei mesoni carichi, quindi è escluso che sia $s \geq 2$: anche il mesone π^0 ha spin zero.

Parità

Per un bosone si può definire la *parità intrinseca* studiando reazioni in cui si conserva la parità, cioè nelle interazioni elettromagnetiche e nucleari. A energia bassa, $p_\pi \to 0$, la reazione $\pi^- d \to nn$ avviene per cattura del pione in uno stato di momento angolare orbitale $\ell = 0$, (*onda S*). La reazione $\pi^- d \to nn\pi^0$ è energeticamente possibile anche per $p_\pi \to 0$ ma si osserva solo a energia maggiore di circa 100 MeV.

Nella prima reazione il momento angolare totale è $\vec{J} = \vec{s}_\pi + \vec{s}_d + \vec{\ell} = \vec{s}_d = 1$. La parità nello stato iniziale e finale è

$$P(\pi^- d) = P_\pi P_d (-1)^\ell = P_\pi \qquad\qquad P(nn) = P_n^2 (-1)^L = (-1)^L$$

Lo stato finale è costituito da due fermioni identici ed è antisimmetrico rispetto allo scambio $n \leftrightarrow n$. Lo stato di singoletto ($\Uparrow\Downarrow, S = 0$) è antisimmetrico, quindi deve essere $L = pari$, ma questo non è possibile perché non conserva il momento angolare $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L} \neq 1$. Lo stato di tripletto ($\Uparrow\Uparrow, S = 1$) è simmetrico, quindi deve essere $L = dispari$. Ne consegue che il pione carico ha *parità negativa*: $P_\pi = -1$.

Consideriamo lo stato finale $nn\pi^0$: L_o è il momento angolare orbitale del mesone rispetto al centro di massa nn. A bassa energia, quando le particelle nello stato finale hanno impulso $p \approx 0$, si ha $L_o = 0$. Se $P_{\pi^0} = P_{\pi^\pm}$ le parità dello stato iniziale e finale sono diverse

$$P_i = P_{\pi^\pm} \qquad\qquad P_f = (-1)^L (-1)^{L_o} P_{\pi^0} = -P_{\pi^0}$$

La reazione può avvenire solo a energia sufficientemente elevata per cui si ha $\ell \neq 0$ oppure $L_o \neq 0$.

Il mesone π è uno stato $spin^{parita'} = 0^-$ ed è chiamato *mesone pseudo-scalare*.

Coniugazione di carica

Dai decadimenti $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, $\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu$, osserviamo che gli stati π^+ e π^- sono uno il coniugato di carica dell'altro: $C|\pi^+\rangle = \alpha|\pi^-\rangle$, $C|\pi^-\rangle = \alpha|\pi^+\rangle$, con $|\alpha|^2 = 1$. Il mesone neutro ha carica elettrica nulla, momento magnetico nullo, numero fermionico nullo, quindi è un autostato della coniugazione di carica. L'interazione elettromagnetica conserva la coniugazione di carica e il decadimento $\pi^0 \to \gamma\gamma$ permette di definire l'autovalore

$$C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle \qquad \Rightarrow \qquad C|\pi^0\rangle = (-1)^2|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle$$

Ne consegue che il decadimento $\pi^0 \to \gamma\gamma\gamma$ in uno stato con $C = (-1)^3 = -1$ non è permesso dalla conservazione della coniugazione di carica. Il limite sperimentale sulla probabilità di decadimento è $3\ 10^{-8}$.

Isospin

L'operatore di isospin è stato introdotto nel capitolo ??? per rappresentare con una legge di simmetria l'indipendenza delle interazioni nucleari dallo stato di carica

elettrica: la hamiltoniana è invariante per rotazioni nello spazio dell'isospin. Protone e neutrone sono due autostati di isospin $I = 1/2$ della stessa particella, il nucleone. La terza componente dell'isospin I_3 è legata alla carica elettrica e al peso atomico dalla relazione

$$Q = \frac{A}{2} + I_3$$

Il numero A di nucleoni (fermioni) si conserva. Questo non è necessario per i mesoni (bosoni). Il nucleone è anche chiamato *barione* (particella pesante). Per estendere la relazione ai mesoni definiamo il *numero barionico*

- $A = +1$ per i barioni;
- $A = 0$ per i mesoni.

Il mesone π esiste in tre stati di carica: è un multipletto di isospin con molteplicità $2I + 1 = 3$, quindi $I_\pi = 1$. La terza componente dell'isopsin è $I_3 = Q$.

nucleone	$I = 1/2$	$n = \|1/2, -1/2\rangle$			$p = \|1/2, +1/2\rangle$
pione	$I = 1$	$\pi^- = \|1, -1\rangle$	$\pi^0 = \|1, 0\rangle$		$\pi^+ = \|1, +1\rangle$

Le interazioni nucleari hanno intensità molto maggiore delle altre e per questo sono anche chiamate interazioni forti o *interazioni adroniche* (dal greco $\alpha\delta\rho o\varsigma$ = forte). Barioni e mesoni sono chiamati *adroni*.

Possiamo quindi fare una prima classificazione delle particelle in base alle definizione fatte

fermioni			$\overline{fermioni}$			*bosoni*
ν_e	ν_μ	p	$\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_\mu$		π^+
e^-	μ^-	n	e^+	μ^+	γ	π^0
						π^-

Gli adroni sono soggetti all'interazione debole, elettromagnetica e adronica; i leptoni carichi all'interazione debole e elettromagnetica; i neutrini solo all'interazione debole e i fotoni solo all'interazione elettromagnetica.

	interazione	*debole*	*elettromagnetica*	*adronica*
fermioni	ν_e ν_μ	$\surd$		
	e^- μ^-	$\surd$	$\surd$	
	barioni	$\surd$	$\surd$	$\surd$
bosoni	*fotone*		$\surd$	
	mesoni	$\surd$	$\surd$	$\surd$

3.1.5 Le particelle strane

Le particelle *strane* furono osservate nel 1947 nelle interazioni dei raggi cosmici in camera a nebbia con campo magnetico. Furono così chiamate per il loro comportamento bizzarro. Infatti sono prodotte con sezioni d'urto grandi, tipiche dell'interazione adronica, e decadono in mesoni π e in nucleoni che sono particelle adroniche, ma

con vite medie tipiche dei decadimenti deboli $\tau \simeq 10^{-10}\ s$ ($c\tau \simeq 3\ cm$). Inoltre in una stessa interazione si osserva la *produzione associata* di due particelle strane.

La vita media è determinata misurando l'impulso delle particelle cariche e il percorso tra il punto di produzione e il punto di decadimento che ha valor medio

$$\lambda = \beta\gamma c\tau = \frac{p}{mc}\, c\tau$$

La massa delle nuove particelle è determinata dalla cinematica dei prodotti di decadimento facendo ipotesi sul valore della massa di questi, ad esempio mesoni π oppure nucleoni

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

Esempi di particelle strane e dei modi di decadimento sono

particella	*massa* (MeV/c^2)	*decadimento*	*vita media* (s)
$K^{\pm}$	494	$K^{\pm} \to \pi^{\pm}\pi^0$	$1.24\ 10^{-8}$
K^0	498	$K^0 \to \pi^-\pi^+$	$0.89\ 10^{-10}$
Λ^0	1116	$\Lambda^0 \to p\pi^-$	$2.63\ 10^{-10}$

La particella Λ decade in un barione e un mesone: è un barione (spin semi-intero), la particella K decade in due mesoni: è un mesone (spin intero). Esempi di *produzione associata* di particelle strane in interazioni pione-nucleone sono

$$\pi^-p \to K^0\Lambda^0 \qquad \pi^-p \to K^0K^-p$$
$$\pi^+n \to K^+\Lambda^0 \qquad \pi^+n \to K^+K^-p$$

ma *non si osserva* $\pi^-n \to K^-\Lambda^0$. Un'altra peculiarità osservata è

$$\begin{array}{rcl} \text{probabilità di produzione di } K^+ & \gg & \text{probabilità di produzione di } K^- \\ \text{probabilità di interazione di } K^+ & \ll & \text{probabilità di interazione di } K^- \end{array}$$

Le stranezze delle particelle strane furono interpretate da Pais e Gell-Mann con queste ipotesi

- le particelle strane sono caratterizzate da un nuovo numero quantico additivo chiamato *stranezza* e indicato con S;
- la stranezza è nulla per le particelle note: leptoni, nucleoni e mesoni π;
- la stranezza si conserva nell'interazione adronica e nell'interazione elettromagnetica;
- la stranezza *non* si conserva nell'interazione debole.

In base a queste ipotesi, poiché lo stato iniziale delle reazioni di produzione ha stranezza nulla, si conclude che

- K^0 e Λ^0 hanno stranezza opposta;
- K^0 e K^- hanno stranezza opposta;

- K^+ e K^0 hanno stranezza uguale;
- K^- e Λ^0 hanno stranezza uguale.

Come nel caso del nucleone e del mesone π esistono due stati di carica del mesone K con masse simili e che hanno lo stesso valore di stranezza. Invece il barione Λ esiste in un solo stato di carica. Gell-Mann e Nishijima proposero di estendere la relazione tra carica elettrica, numero barionico e isospin introducendo l'*ipercarica*: $Y = A + S$

$$\textit{legge di Gell-Mann Nishijima} \qquad Q = \frac{Y}{2} + I_3 = \frac{A+S}{2} + I_3$$

- il barione Λ^0 è un singoletto di isospin $I = 0$, $I_3 = 0$ e ha numero barionico $A = +1$, quindi $Y(\Lambda) = 0$, $S(\Lambda) = -1$;
- i mesoni K^0, K^+, hanno numero barionico nullo, $Y(K) = S(K) = +1$ e costituiscono un doppietto di isospsin

$$K^0 = |1/2, -1/2\rangle \qquad K^+ = |1/2, +1/2\rangle$$

- esiste un altro doppietto di isospin con $Y(\bar{K}) = S(\bar{K}) = -1$ ottenuto applicando la coniugazione di carica

$$C|K^+\rangle = \alpha|K^-\rangle \qquad C|K^0\rangle = \alpha|\bar{K^0}\rangle \qquad |\alpha|^2 = 1$$

In interazioni pione-nucleone, oltre al barione Λ^0, è stata osservata la produzione di un barione chiamato Σ che esiste in tre stati di carica

$$\begin{array}{lll} \pi^- p \to K^0\Sigma^0 & \pi^- p \to K^+\Sigma^- & \\ \pi^+ n \to K^+\Sigma^0 & \pi^+ n \to K^0\Sigma^+ & \pi^+ p \to K^+\Sigma^+ \end{array}$$

con valori di massa $m(\Sigma^+) = 1189$, $m(\Sigma^0) = 1193$, $m(\Sigma^-) = 1197\ MeV/c^2$ e modi di decadimento

$$\begin{array}{lll} \Sigma^+ \to p\pi^0 \qquad \Sigma^+ \to n\pi^+ & & \tau = 0.80\ 10^{-10}\ s \\ \Sigma^- \to n\pi^- & & \tau = 1.48\ 10^{-10}\ s \end{array}$$

Il barione Σ è un triletto di isospin $I = 1$, $I_3 = -1, 0, +1$, con numero barionico $A = +1$: quindi $Y(\Sigma) = 0$, $S(\Sigma) = -1$

$$\Sigma^- = |1, -1\rangle \qquad \Sigma^0 = |1, 0\rangle \qquad \Sigma^+ = |1, +1\rangle$$

Poiché il tripletto Σ e il singoletto Λ hanno gli stessi numeri quantici, il barione Σ^0 può decadere per interazione elettromagnetica che conserva la stranezza. La probabilità di decadimento è molto maggiore dei modi di decadimento per interazione debole

$$\Sigma^0 \to \Lambda^0\ \gamma \qquad \tau = 7.4\ 10^{-20}\ s$$

I due barioni hanno la stessa parità: si tratta di una transizione di dipolo magnetico.

Interazioni dei mesoni K

I mesoni K vengono prodotti nelle interazioni di fasci di protoni o mesoni π su nucleoni e possono essere selezionati per produrre altre reazioni adroniche in cui si conserva la stranezza, ad esempio

$K^+p \to$	K^+p					
$K^+n \to$	K^+n	K^0p				
$K^-p \to$	K^-p	$\overline{K}^0n$	$\pi^0\Lambda^0$	$\pi^+\Sigma^-$	$\pi^0\Sigma^0$	$\pi^-\Sigma^+$
$K^-p \to$	$K^0\Xi^0$	$K^+\Xi^-$				
$K^-n \to$	K^-n	$\pi^-\Lambda^0$	$\pi^0\Sigma^-$			
$K^-n \to$	$K^0\Xi^-$					

è evidente che i mesoni K^- possono produrre molti più stati finali che non i mesoni K^+. In particolare nelle interazioni dei mesoni K^- ($S = -1$) si possono produrre mesoni K ($S = +1$) e due stati di un barione con stranezza $S = -2$, chiamato Ξ, che formano un doppietto di isospin $I = 1/2, I_3 = -1/2, +1/2$. Questi decadono per interazione debole prevalentemente nel barione Λ^0 e in un mesone π

barione	*massa* (MeV/c^2)	*decadimento*	*vita media* (s)
Ξ^0	1315	$\Xi^0 \to \Lambda^0\pi^0$	$2.90\ 10^{-10}$
Ξ^-	1321	$\Xi^- \to \Lambda^0\pi^-$	$1.64\ 10^{-10}$

I barioni dotati di stranezza sono anche chiamati *iperoni*. La tabella mostra l'assegnazione dei numeri quantici ai mesoni e ai barioni in base alla legge di Gell-Mann e Nishijima

barioni $\frac{1}{2}^+$	A	S	Y	I_3	Q	*mesoni* 0^-	A	S	Y	I_3	Q
p	$+1$	0	$+1$	$+1/2$	$+1$	K^+	0	$+1$	$+1$	$+1/2$	$+1$
n	$+1$	0	$+1$	$-1/2$	0	K^0	0	$+1$	$+1$	$-1/2$	0
Λ^0	$+1$	-1	0	0	0	η^0	0	0	0	0	0
Σ^+	$+1$	-1	0	$+1$	$+1$	π^+	0	0	0	$+1$	$+1$
Σ^0	$+1$	-1	0	0	0	π^0	0	0	0	0	0
Σ^-	$+1$	-1	0	-1	-1	π^-	0	0	0	-1	-1
Ξ^0	$+1$	-2	-1	$+1/2$	0	$\bar{K}^0$	0	-1	-1	$+1/2$	0
Ξ^-	$+1$	-2	-1	$-1/2$	-1	K^-	0	-1	-1	$-1/2$	-1

Si nota una completa simmetria dei vari stati degli adroni nelle variabili *isospin* e *ipercarica* (Fig.3.4): i mesoni e i barioni formano un *ottetto* e sono gli autostati della Simmetria Speciale Unitaria in tre dimensioni $SU(3)$ (appendice 4.12). Nella tabella è stato introdotto un nuovo mesone pseudoscalare η^0 singoletto di isospin.

3.1.6 I mesoni K

Ogni particella decade in stati di massa più piccola. La probabilità di decadimento è definita dalla hamiltoniana di interazione e dallo spazio delle fasi. Per i mesoni di

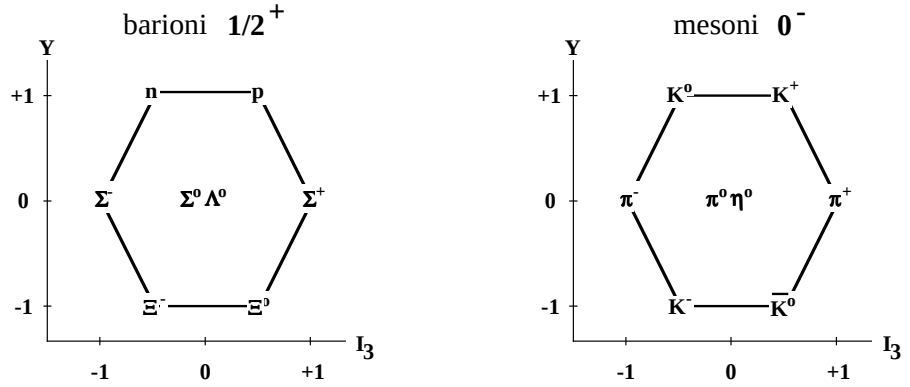


Figure 3.4: Rappresentazione degli stati dei barioni $\frac{1}{2}^+$ e dei mesoni 0^- nelle variabili $I_3 \times Y$

massa più piccola, i mesoni π, i modi di decadimento sono

$\pi^0 \to \gamma\gamma$	0.988	*interazione elettromagnetica*
$\pi^0 \to e^+e^-\gamma$	0.012	$\tau = 0.84\ 10^{-16}\ s$
$\pi^0 \to e^+e^-$	$6.2\ 10^{-8}$	
$\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$	1.000	*interazione debole*
$\pi^+ \to e^+\nu_e$	$1.2\ 10^{-4}$	$\tau = 2.60\ 10^{-8}\ s$

I modi di decadimento dei mesoni K carichi e le probabilità di decadimento sono

$K^+ \to$	$\mu^+\nu_\mu$	0.635	*decadimenti*
	$e^+\nu_e$	$1.6\ 10^{-5}$	*leptonici*
	$\pi^0 e^+\nu_e$	0.048	*decadimenti*
	$\pi^0\mu^+\nu_\mu$	0.032	*semileptonici*
	$\pi^+\pi^0$	0.212	*decadimenti*
	$\pi^+\pi^+\pi^-$	0.056	*adronici*
	$\pi^+\pi^0\pi^0$	0.017	

I decadimento dei mesoni K neutri sono trattati nel capitolo ???. I decadimenti leptonici sono in tutto simili a quelli dei mesoni π. Questo indica che sono mesoni pseudoscalari con $spin^{parita'} = 0^-$. I decadimenti semileptonici sono simili ai decadimenti β dei nuclei. Inoltre i mesoni K possono decadere in stati adronici con due o tre mesoni π.

I mesoni π hanno spin zero. Nel decadimento $K^+ \to \pi^+\pi^0$ lo spin del mesone K è uguale al momento angolare orbitale $L_{\pi\pi}$. La parità del mesone K, *se* si conserva nel decadimento, è

$$P_K = P_\pi^2(-1)^{L_{\pi\pi}}$$

I possibili stati di $spin^{parita'}$ sono: $0^+, 1^-, 2^+, \ldots$.

Nel decadimento $K^+ \to \pi^+\pi^+\pi^-$, $K^+ \to \pi^+\pi^0\pi^0$, chiamiamo L il momento angolare orbitale dei due mesoni identici e ℓ il momento angolare del terzo mesone

nel centro di massa dei primi due. Per la simmetria dei bosoni L è pari. Il momento angolare totale è

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{\ell} \qquad\qquad |L - \ell| \leq J \leq L + \ell$$

La parità dello stato è: $P_K = P_\pi^3 (-1)^L (-1)^\ell = (-1)^{\ell+1}$. Le possibili combinazioni sono

L	=	0	0	0	0	2	2	2
ℓ	=	0	1	2	...	0	1	...
J^P	=	0^-	1^+	2^-		2^-	$1^+ 2^+ 3^+$	

Lo stato di momento angolare J si può determinare sperimentalmente. Infatti per un decadimento del tipo $K \to \pi\pi\pi$ la conservazione di energia, $E_1 + E_2 + E_3 = m$, e impulso, $\vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3} = 0$, definisce due variabili indipendenti, ad esempio E_1 E_2. La densità dello spazio delle fasi $d^2n/dE_1 dE_2$ è uniforme (appendice 4.21). La probabilità di decadimento in funzione delle due variabili

$$\frac{d^2\Gamma}{dE_1 dE_2} \propto |\langle \pi\pi\pi | H | K \rangle|^2 \; \frac{d^2 n}{dE_1 dE_2}$$

è proporzionale al quadrato dell'elemento di matrice. Quindi si può misurare la dipendenza dell'elemento di matrice dalle variabili cinematiche. Questo metodo di analisi è stato proposto da Dalitz nel 1955 per determinare gli stati di $spin^{parita'}$ del decadimento $K \to \pi\pi\pi$: il diagramma della probabilità di decadimento in funzione di due variabili è chiamato *diagramma di Dalitz*.

In particolare, se il momento angolare totale è nullo non si ha alcuna direzione definita nello spazio e la densità nel diagramma di Dalitz è uniforme. Questo è stato osservato nel decadimento $K \to \pi\pi\pi$ per cui si è concluso che il mesone K ha spin zero. Quindi lo stato finale del decadimento $K \to \pi\pi\pi$ ha $spin^{parita'} = 0^-$ mentre nel decadimento $K \to \pi\pi$ ha $spin^{parita'} = 0^+$. Per alcuni anni il mesone $K^\pm$ è stato considerato come due particelle distinte perché non era credibile che la parità non si conservasse nel decadimento. Ma era anche difficilmente credibile che due particelle con la stessa massa e la stessa vita media potessero esistere in due stati diversi.

L'analisi fatta da Lee e Yang nel 1956 mostrò che non esisteva alcuna evidenza sperimentale di conservazione della parità nelle interazioni deboli. Lee e Yang proposero alcuni esperimenti per mettere in luce eventuali effetti di violazione della simmetria per parità. Il primo di questi esperimenti, il decadimento del nucleo di Cobalto polarizzato (capitolo ???) confermò che la parità non è conservata nell'interazione debole. Il secondo fu fatto pochi mesi dopo e mostrò che la parità non si conserva nel decadimento del mesone $\pi^\pm$ (capitolo ???).

Raggio dei mesoni

Protone e neutrone hanno una dimensione spaziale di $0.8 \div 0.9\ fm$ che si può determinare sia misurando i fattori di forma elettromagnetici, ad esempio con esperimenti di diffusione elastica elettrone-protone o elettrone-deuterio, sia misurando la sezione d'urto protone-protone o neutrone-protone ad alta energia. Nel primo caso si misura

la distribuzione di carica elettrica e di magnetizzazione, nel secondo la distribuzione della materia adronica.

Poiché non si hanno bersagli di mesoni, per misurare il fattore di forma dei mesoni $\pi^{\pm}$ e $K^{\pm}$, si possono fare esperimenti di diffusione elastica di fasci secondari di mesoni sugli elettroni atomici, ad esempio usando un bersaglio di idrogeno liquido. In questo caso, per eliminare le reazioni di interazione mesone-protone che sono molto più probabili, occorre osservare l'elettrone diffuso nello stato finale e misurarne le variabili cinematiche. Nel riferimento in cui l'elettrone è inizialmente in quiete si ha $-q^2 = 4EE' \sin^2\theta/2 = 2m_e E'_e$. La sezione d'urto di diffusione di particelle di spin zero, sezione d'urto di Mott (capitolo ???), è modificata per il fattore di forma elettrico

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \, \frac{(m_e c^2)^2}{4p^2c^2 \sin^4\theta/2} \, \frac{p'}{p} \, \cos^2\theta/2 \, |F_E(q^2)|^2$$

Un fattore di forma $F_E(q^2) = (1 + \langle r^2\rangle q^2/6)^{-1}$ riproduce bene i dati sperimentali. Dai risultati si estrae il raggio quadratico medio dei mesoni

$$\sqrt{\langle r_\pi^2\rangle} = 0.66 \ fm \qquad\qquad \sqrt{\langle r_K^2\rangle} = 0.58 \ fm$$

La misura della sezione d'urto totale di interazione di mesoni su protone ad alta energia, $\sigma(\pi^{\pm}p) \simeq 23 \ mb$, $\sigma(K^{\pm}p) \simeq 20 \ mb$, interpretata con il modello di diffusione da un disco assorbente (capitolo ???), fornisce valori simili per il raggio dei mesoni.

3.1.7 Il mesone η

Nella tabella che mostra le proprietà degli adroni, per completare la simmetria, è stato introdotto il mesone η^0 che è il singoletto di isospin con gli stessi numeri quantici del mesone π^0. Il mesone η^0 è stato osservato nel 1960 studiando la reazione $\pi^+ d \to \pi^+\pi^0\pi^- pp$ in cui i tre mesoni π formano uno stato legato che decade per interazione elettromagnetica

$$m_\eta = 547 \ MeV/c^2 \qquad\qquad \tau_\eta = 0.56 \ 10^{-18} \ s$$

I decadimenti più probabili e le frazioni di decadimento sono

$\eta^0 \to$	$\gamma\gamma$	0.393
	$\pi^0\pi^0\pi^0$	0.322
	$\pi^+\pi^-\pi^0$	0.230

I numeri quantici del mesone η^0 sono

- **J = 0**: dall'analisi del diagramma di Dalitz del decadimento $\eta \to \pi\pi\pi$ si deduce che lo spin è zero;
- **P = -1**: non si osserva il decadimento $\eta \to \pi\pi$: se ne deduce che la parità è negativa. Infatti due mesoni π in uno stato di momento angolare orbitale $L = 0$ hanno parità positiva: $P = P_\pi^2(-1)^L = +1$;

- $\mathbf{C = +1}$: il mesone η^0 è autostato della coniugazione di carica, il decadimento $\eta^0 \to \gamma\gamma$ indica che l'autovalore è $+1$ (il decadimento $\eta \to \gamma\gamma\gamma$ non è mai stato oseervato);

- $\mathbf{I = 0}$: se fosse $I \neq 0$ il decadimento $\eta \to \pi\pi\pi$ avverrebbe per interazione adronica con vita media molto più breve di quella osservata.

Oltre al mesone η^0 esite un'altra particella con gli stessi numeri quantici, chiamata η'. Ha massa 958 MeV/c^2 e come il mesone η^0 decade per interazione elettromagnetica. Non si tratta di uno stato eccitato del mesone η^0 perché non può decadere né $\eta' \to \eta^0\gamma$ (non esistono transizioni elettromagnetiche spin zero $\to$ spin zero) né $\eta' \to \eta^0\pi$ (non si conserva la parità). Il decadimento più frequente è $\eta' \to \eta^0\pi\pi$.

3.1.8 Simmetria dell'isospin

Esistono gruppi di particelle soggette all'interazione adronica che hanno valori di massa molto simili, ma valori diversi della carica elettrica. Poiché l'interazione adronica è indipendente dalla carica elettrica le particelle dello stesso *multipletto* sono state identificate come una singola particella autostato dell'operatore di isospin $\vec{I}$ con molteplicità $2I + 1$ pari al numero di stati di carica. L'operatore di isospin così definito ha le stesse proprietà di un generatore di rotazioni e commuta con la hamiltoniana dell'interazione adronica. Nell'interazione adronica si conserva sia I_3 che il modulo dell'isospin.

Gli autovalori di isospin di un sistema di particelle si ottengono seguendo le leggi di composizione dei momenti angolari. Se due particelle hanno isospin $|j_1, m_1\rangle$, $|j_2, m_2\rangle$, i possibili *stati di due particelle* $|J, M\rangle$ con

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \qquad\qquad M = m_1 + m_2$$

sono

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M\rangle \cdot |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$$

i *coefficienti di Clebsch-Gordan* $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M\rangle$ sono calcolati nell'appendice 4.10 per alcuni casi semplici.

Esempio 1

Le reazioni $pp \to d\pi^+$, $np \to d\pi^0$, hanno la stessa distribuzione angolare, ma sezione d'urto $\sigma(pp \to d\pi^+) = 2\ \sigma(np \to d\pi^0)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(pp \to d\pi^+\right) = costante\ |\langle d\pi^+|H|pp\rangle|^2\ (2s_d + 1)(2s_\pi + 1)\ \frac{p_\pi^2}{v_{pp} v_{\pi d}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(np \to d\pi^0\right) = costante\ |\langle d\pi^0|H|np\rangle|^2\ (2s_d + 1)(2s_\pi + 1)\ \frac{p_\pi^2}{v_{np} v_{\pi d}}$$

Le masse delle particelle sono approsimativamente uguali e, per gli stessi valori di energia, i fattori cinematici sono uguali. Quindi il rapporto tra le sezioni d'urto dipende solo dal rapporto tra gli elementi di matrice. Gli stati di isospin sono

$$p = |1/2, +1/2\rangle \quad n = |1/2, -1/2\rangle \qquad d = |0, 0\rangle \qquad \pi^0 = |1, 0\rangle \quad \pi^+ = |1, +1\rangle$$

Gli stati combinati sono

$$\begin{array}{ll} pp = |1, +1\rangle & np = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1, 0\rangle - |0, 0\rangle\right) \\ d\pi^+ = |1, +1\rangle & d\pi^0 = |1, 0\rangle \end{array}$$

Gli elementi di matrice tra gli autostati di isospin sono

$$\langle d\pi^+|H|pp\rangle = \langle 1|H|1\rangle \qquad \langle d\pi^0|H|np\rangle = \frac{\langle 1|H|1\rangle - \langle 1|H|0\rangle}{\sqrt{2}}$$

ma $\langle 1|H|0\rangle = 0$ perché la hamiltoniana commuta con $\vec{I}$, quindi

$$\frac{\sigma(pp \to d\pi^+)}{\sigma(np \to d\pi^0)} = \frac{|\langle d\pi^+|H|pp\rangle|^2}{|\langle d\pi^0|H|np\rangle|^2} = 2$$

Esempio 2

Le sezioni d'urto delle reazioni $\pi^+ d \to pp$, $\pi^- d \to nn$, sono uguali perché

$$pp = \pi^+ d = |1, +1\rangle \qquad nn = \pi^- d = |1, -1\rangle$$

Esempio 3

Il mesone η^0 è autostato di isospin $|0, 0\rangle$ e autostato di coniugazione di carica con autovalore $C = +1$ e non decade per interazione adronica:

- il decadimento $\eta^0 \to \pi\pi$ è vietato dalla conservazione della parità;
- il decadimento $\eta^0 \to \pi\pi\pi$ è vietato dalla conservazione dell'isospin. Infatti l'isospin dello stato $\pi\pi\pi$ è

  $$\vec{I}_{\pi\pi\pi} = \vec{I}_{\pi\pi} + \vec{I}_{\pi} \qquad\qquad I_\pi = 1$$

  quindi per avere $I_{\pi\pi\pi} = 0$ deve essere $I_{\pi\pi} = 1$. I possibili stati $I_{\pi\pi}$ sono

  $$|1, +1\rangle = \frac{\pi^+\pi^0 - \pi^0\pi^+}{\sqrt{2}} \qquad |1, 0\rangle = \frac{\pi^+\pi^- - \pi^-\pi^+}{\sqrt{2}} \qquad |1, -1\rangle = \frac{\pi^0\pi^- - \pi^-\pi^0}{\sqrt{2}}$$

  tutti antisimmetrici per lo scambio $\pi \leftrightarrow \pi$. Quindi lo stato $\pi^+\pi^0\pi^-$ con $I = 0$ ha coniugazione di carica $C = -1$. L'altra combinazione, lo stato $\pi^0\pi^0\pi^0$, non può avere $I = 0$;
- il decadimento $\eta^0 \to \pi\pi\pi\pi$ non avviene perché $m_\eta < 4m_\pi$.

3.1.9 Gli antibarioni

I barioni, protone, neutrone e gli iperoni, sono fermioni di spin 1/2. In base alla teoria di Dirac devono esistere i corrispondenti stati coniugati di carica, gli *antibarioni*, con numero fermionico, carica elettrica, momento magnetico e stranezza opposti. La teoria è confermata dai leptoni: esiste il positrone (e^+), il leptone μ^+ e l'antineutrino.

Per verificare la predizione di Dirac fu costruito nel 1955 un acceleratore di protoni che potesse raggiungere la soglia di produzione di antibarioni. Un antiprotone può essere prodotto in interazioni di protoni su nuclei con le reazioni $pp \to \bar{p}ppp$, $pn \to \bar{p}ppn$, che conservano il numero barionico e la carica elettrica, se l'energia cinetica del fascio è maggiore di $6m_p = 5.6\ GeV$. In effetti l'energia può essere leggeremente minore se si tiene conto del moto di Fermi dei nucleoni legati nel nucleo.

La produzione dell'antiprotone è segnalata dalla presenza nello stato finale di una particella di carica negativa e massa pari a quella del protone. A questa energia, nell'interazione protone-nucleo vengono prodotti mesoni π^- con probabilità molto maggiore, quindi è necessario selezionare particelle con massa m_p facendo misure sia di impulso che di velocità delle particelle prodotte. L'esperimento fu fatto utilizzando magneti curvanti per selezionare le particelle di carica negativa e sia tecniche di tempo di volo che rivelatori Čerenkov per misurarne la velocità. Nel 1956 Chamberlain, Segré [4] e collaboratori scoprirono l'antiprotone.

Una volta scoperto il metodo per produrre un fascio secondario di antiprotoni, questo può essere utilizzato per produrre altri antibarioni in reazioni di *annichilazione* $p\bar{p} \to barione - antibarione$. Nel 1957 Cork, Lamberston e Piccioni scoprirono in questo modo l'antineutrone. L'esperimento fu fatto osservando la scomparsa dell'antiprotone in un bersaglio che era anche rivelatore di ionizzazione, questo era seguito da un rivelatore di veto che segnalava l'assenza di ionizzazione (i neutroni non ionizzano) e da un terzo rivelatore capace di misurare l'energia totale rilasciata nella annichilazione dell'antineutrone prodotto $\bar{n}n$, $E = 2m_n$.

Con fasci di antiprotoni si possono produrre altri antibarioni. Ad esempio, $\overline{\Lambda^0}$ è stato asservato nell'annichilazione di antiprotoni in camera a bolle a idrogeno liquido $\bar{p}p \to \overline{\Lambda^0}\Lambda^0$. Si osserva la traccia dell'antiprotone fino al punto in cui avviene l'interazione e più avanti le tracce dei prodotti di decadimento $\overline{\Lambda^0} \to \bar{p}\pi^+$, $\Lambda^0 \to p\pi^-$. Il cammino delle particelle Λ, neutre e quindi non visibili nella camera a bolle, è in media $\lambda = (p_\Lambda/m_\Lambda c)c\tau_\Lambda$, con $c\tau_\Lambda = 7.9\ cm$.

Con questo metodo sono stati scoperti gli altri antibarioni $\overline{\Sigma}, \overline{\Xi}, \ldots$: per ogni barione è stato osservato il corrispondente antibarione. Gli antibarioni hanno numero barionico negativo, $A = -1$ per $\bar{p}, \bar{n}, \overline{\Lambda^0}, \ldots$; $A = -2$ per l'antideutone; e decadono negli stati coniugati di carica dei corrispondenti barioni, ad esempio l'antineutrone decade β^+, $\bar{n} \to \bar{p}e^+\nu_e$; $\overline{\Lambda^0} \to \bar{p}\pi^+$ oppure $\overline{\Lambda^0} \to \bar{n}\pi^0$; $\overline{\Sigma^0} \to \overline{\Lambda^0}\gamma$, ...

[4] premi Nobel per la fisica nel 1959

3.1.10 Risonanze adroniche

Barioni e mesoni sono soggetti a decadimenti elettromagnetici o deboli. Nelle interazioni adroniche si possono produrre degli *stati eccitati* che sono chiamati *risonanze*. Nel caso di atomi o nuclei si possono formare stati eccitati che decadono emettendo fotoni, i bosoni del campo elettromagnetico. Allo stesso modo le risonanze adroniche decadono emettendo mesoni

$$\gamma N \to N^*_{e.m.} \to N\gamma \qquad\qquad \pi N \to N^*_{hadr} \to N\pi$$

La *larghezza* di una risonanza è tipicamente $\Gamma \approx m_\pi c^2$ e a questa corrisponde una vita media $\tau = \hbar/m_\pi c^2 \approx 10^{-23}\ s$. In questo brevissimo intervallo di tempo il cammino di decadimento è pari al raggio d'azione dell'interazione adronica $c\tau = \hbar c/m_\pi c^2 \approx 1\ fm$. È chiaro che la vita media di una risonanza non si può determinare né con misure di tempo né con misure di distanze. La larghezza si determina misurando la curva di eccitazione della risonanza oppure misurando la *massa invariante* delle particelle nello stato finale $m^2 = (\Sigma_k P_k)^2$ con $P_k = (\vec{p}_k, E_k)$.

Le risonanze possono essere stati eccitati barionici con spin semi-intero oppure stati eccitati mesonici con numero barionico nullo e spin intero. Sono caratterizzate dai numeri quantici, carica elettrica, spin, isospin, parità e coniugazione di carica che si conservano nel decadimento per interazione adronica.

La risonanza Δ

La prima risonanza adronica fu ossevata da Fermi e Anderson nel 1949 studiando la diffusione elastica di mesoni π^+ da un bersaglio di idrogeno liquido ($\pi^+ p \to \pi^+ p$). La dipendenza della sezione d'urto dall'energia si può rappresentare come sviluppo in onde parziali (capitolo ???)

$$\sigma = \frac{\pi\hbar^2}{p^2_{cm}} \sum_\ell (2\ell+1)\ |1 - a_\ell|^2$$

p_{cm} è l'impulso nel centro di massa della reazione e a_ℓ sono le ampiezze delle onde parziali, $a_\ell = \eta_\ell e^{2i\delta_\ell}$. Per la diffusione elastica si ha $\eta_\ell = 1$. Se si eccita una risonanza di massa m che ha spin $\vec{J}$ la sezione d'urto ha un massimo per $\delta_J = \pi/2$ e la dipendenza dall'energia è caratterizzata dalla curva di eccitazione lorentziana

$$\sigma(ab \to N^*_J) = \frac{4\pi\hbar^2}{p^2_{cm}}\ \frac{2J+1}{(2s_a+1)(2s_b+1)}\ \frac{(\Gamma/2)^2}{(E_{cm}-m)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

che ha il massimo per $E_{cm} = m$ e larghezza a metà altezza pari a Γ.

La sezione d'urto di diffusione elastica $\pi^+ p$ in funzione dell'impulso del pione è mostrata in Fig.3.5. Il valore di picco della sezione d'urto si ha per $E_\pi \simeq 330\ MeV$ che corrisponde all'energia totale nel centro di massa $m = (m^2_\pi + m^2_p + 2m_p E_\pi)^{1/2}$. La risonanza Δ^{++} ha massa $m_\Delta = 1232\ MeV/c^2$ e larghezza $\Gamma_\Delta \simeq 120\ MeV$.

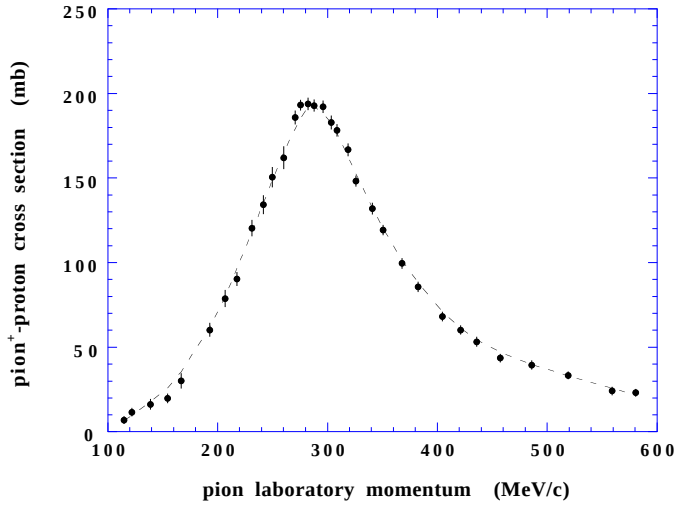


Figure 3.5: Sezione d'urto $\pi^+ p \to \pi^+ p$ in funzione dell'impulso del mesone π^+

Il picco della risonanza corrisponde al valore $p_{cm} = 230\ MeV/c$. Da questo e dal valore della sezione d'urto si può derivare lo spin della risonanza

$$\sigma_{max} = \frac{4\pi(\hbar c)^2}{(p_{cm}c)^2}\,\frac{2J+1}{2} \simeq 200\ mb \qquad \Rightarrow \qquad 2J+1 = 4 \qquad J = 3/2$$

Spin. Lo spin della risonanza si può anche determinare dalla distribuzione angolare del pione e del protone nel centro di massa della reazione. Il momento angolare è $\vec{J} = \vec{s}_\pi + \vec{s}_p + \vec{\ell}$ ($s_\pi = 0$, $\vec{\ell}$ è il momento angolare orbitale). Consideriamo come asse di quantizzazione la linea di volo π-p: il momento angolare $\vec{\ell}$ ha componente $m = 0$, quindi nello stato iniziale $\vec{J}$ ha componente $M = 1/2$.

- se $\ell = 0$, l'ampiezza di diffusione è proporzionale all'armonica sferica $Y_{0,0}(\theta,\phi) = 1/\sqrt{4\pi} = costante$;
- se $\ell = 1$, si può avere $J = 1/2$ oppure $J = 3/2$; le combinazioni dei momenti angolari sono

$$J = 1/2 \qquad |1/2,+1/2\rangle = \sqrt{2/3}\ Y_{1,1}(\theta,\phi)\ |1/2,-1/2\rangle - \sqrt{1/3}\ Y_{1,0}(\theta,\phi)\ |1/2,+1/2\rangle$$

$$= -\sqrt{1/4\pi}\ \sin\theta\ e^{i\phi}\ |1/2,-1/2\rangle - \sqrt{1/4\pi}\cos\theta\ |1/2,+1/2\rangle$$

$$J = 3/2 \qquad |3/2,+1/2\rangle = \sqrt{1/3}\ Y_{1,1}(\theta,\phi)\ |1/2,-1/2\rangle + \sqrt{2/3}\ Y_{1,0}(\theta,\phi)\ |1/2,+1/2\rangle$$

$$= -\sqrt{1/8\pi}\ \sin\theta\ e^{i\phi}\ |1/2,-1/2\rangle + \sqrt{1/2\pi}\cos\theta\ |1/2,+1/2\rangle$$

- per $J = 1/2$, $|f(\theta)|^2 = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)/4\pi = costante$;
- per $J = 3/2$, $|f(\theta)|^2 = (1 + 3\cos^2\theta)/8\pi$; i risultati sono in accordo con questa seconda ipotesi e quindi confermano che la risonanza ha spin 3/2.

Isospin. Poiché $I_\pi = 1$ e $I_N = 1/2$ le combinazioni π-N hanno isospin $I = 1/2$ oppure $I = 3/2$. La risonanza Δ^{++} ha terza componente dell'isospin $I_3 = Q - A/2 = +3/2$ e fa parte di un multipletto di stati risonanti π-N con isospin $I = 3/2$

$$
\begin{array}{ll|l}
|3/2,+3/2\rangle = \pi^+ p & \Delta^{++} & \\
|3/2,+1/2\rangle = \sqrt{1/3}\;\pi^+ n + \sqrt{2/3}\;\pi^0 p & \Delta^{+} & |1/2,+1/2\rangle = \sqrt{2/3}\;\pi^+ n - \sqrt{2/3}\;\pi^0 p \\
|3/2,-1/2\rangle = \sqrt{2/3}\;\pi^0 n + \sqrt{1/3}\;\pi^- p & \Delta^{0} & |1/2,-1/2\rangle = \sqrt{1/3}\;\pi^0 n - \sqrt{2/3}\;\pi^- p \\
|3/2,-3/2\rangle = \pi^- n & \Delta^{-} &
\end{array}
$$

Esistono quindi quattro stati con isospin $I = 3/2$ e spin $J = 3/2$ con massa approssimativamente uguale; i modi e le frazioni di decadimento sono

$$
\begin{array}{lll}
\Delta^{++} \to \pi^+ p & 1 & \\
\Delta^{+} \to \pi^0 p & 2/3 & \Delta^{+} \to \pi^+ n \quad 1/3 \\
\Delta^{0} \to \pi^0 n & 2/3 & \Delta^{0} \to \pi^- p \quad 1/3 \\
\Delta^{-} \to \pi^- n & 1 &
\end{array}
$$

Parità. Le risonanze Δ sono stati legati π-N con momento angolare orbitale $\ell = 1$: la parità è $P_\Delta = P_\pi P_N (-1)^\ell = +1$.

3.1.11 Risonanze barioniche

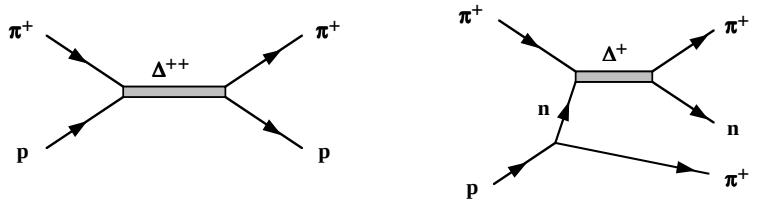


Figure 3.6: Eccitazione e produzione della risonanza Δ

Una risonanza si può osservare come eccitazione nella diffusione elastica (esempio precedente) oppure producendo uno stato finale con massa e numeri quantici definiti. La Fig.3.6 mostra questi due modi per la risonanza Δ. Nel secondo caso, per individuare uno stato risonante occorre identificare le particelle prodotte nel decadimento (o fare ipotesi sul valore della massa) e misurarne l'impulso in modo da poter calcolare la massa invariante. Lo strumento utilizzato in questo tipo di esperimenti negli anni '50 e '60 è la camera a bolle (capitolo ???) e i metodi di analisi sono stati sviluppati da Luis Alvarez [5] e collaboratori. Nelle interazioni di fasci di mesoni K^- con bersagli di idrogeno o deuterio si producono risonanze barioniche con stranezza $S = -1$ (Fig.3.7)

$$K^- p \to \pi^- \Sigma^{*+} \qquad K^- p \to \pi^0 \Sigma^{*o} \qquad K^- p \to \pi^+ \Sigma^{*-}$$

[5] premio Nobel per la fisica nel 1968

La risonanza Σ^* ha larghezza $\Gamma \simeq 37\ MeV$. Le masse (in MeV/c^2) e i modi di decadimento sono

$$\Sigma^{*+}(1382.8) \to \Lambda^0\pi^+ \qquad \Sigma^{*o}(1383.7) \to \Lambda^0\pi^0 \qquad \Sigma^{*-}(1387.2) \to \Lambda^0\pi^-$$

Lo spin, $J = 3/2$, si misura studiando la distribuzione angolare dei prodotti di decadimento. L'isopin, $\vec{I}_\Sigma = \vec{I}_\Lambda + \vec{I}_\pi$, è $I_\Sigma = 1$. Allo stesso modo, con fasci di mesoni K^- si producono risonanze barioniche con stranezza $S = -2$ in associazione con mesoni K $(S = +1)$

$$K^-p \to K^0\Xi^{*o} \qquad K^-p \to K^+\Xi^{*-}$$

La risonanza Ξ^* ha numeri quantici $J = 3/2$, $I = 1/2$, ha larghezza $\Gamma \simeq 9\ MeV$ e decade

$$\Xi^{*o}(1531.8) \to \Xi^-\pi^+ \quad oppure \quad \to \Xi^0\pi^0$$
$$\Xi^{*-}(1531.8) \to \Xi^-\pi^0 \quad oppure \quad \to \Xi^0\pi^-$$

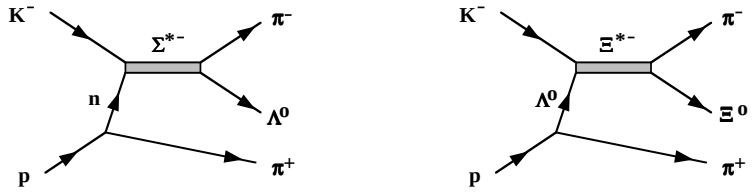


Figure 3.7: Esempi di produzione di risonanze barioniche con stranezza

Tutte queste risonanze hanno numero barionico $A = +1$, spin $3/2$, parità positiva. Gli altri numeri quantici sono

barioni $\frac{3}{2}^+$	S	Y	I_3	Q
Δ^{++}	0	+1	+3/2	+2
Δ^+	0	+1	+1/2	+1
Δ^0	0	+1	−1/2	0
Δ^-	0	+1	−3/2	−1
Σ^{*+}	−1	0	+1	+1
Σ^{*o}	−1	0	0	0
Σ^{*-}	−1	0	−1	−1
Ξ^{*o}	−2	−1	+1/2	0
Ξ^{*-}	−2	−1	−1/2	−1
Ω^-	−3	−2	0	−1

La rappresentazione delle risonanze barioniche nelle variabili $I_3 \times Y$ è mostrata in Fig.3.8 dove è stato aggiunto il barione Ω^-. L'esistenza di questa particella di stranezza $S = -3$ e isospin $I = 0$, e il valore della massa, erano stati previsti da Gell-Mann prima che fosse osservata. Si nota infatti una regolarità dei valori delle masse

- le particelle nello stesso multipletto di isospin, allineate lungo l'asse I_3, differiscono per il valore della carica elettrica: la piccola perturbazione dovuta all'interazione elettromagnetica produce una differenza di massa di circa 1 MeV;

- le particelle con la stessa carica elettrica sono allineate lungo un asse inclinato a 120° e hanno stranezza che differisce di una unità: la differenza di massa è di circa 150 MeV.

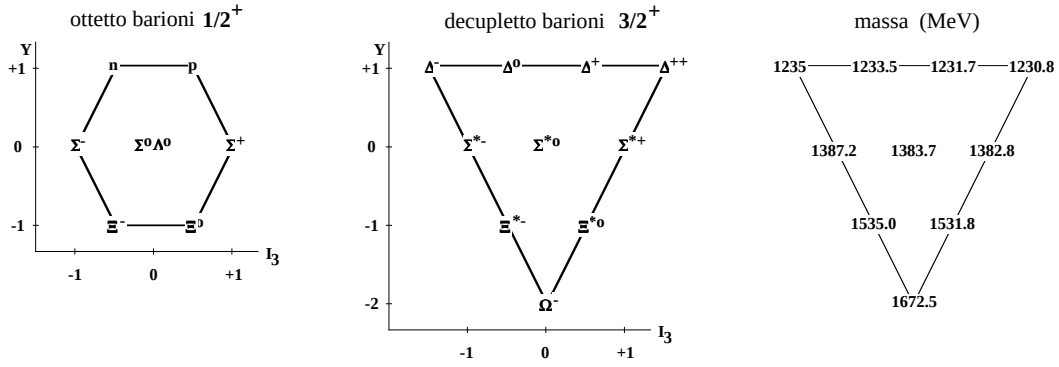


Figure 3.8: Ottetto di barioni $1/2^+$ e decupletto di barioni $3/2^+$

In effetti Ω^- non decade per interazione adronica, quindi non è una risonanza. Questo perché nell'ottetto dei barioni $1/2^+$ non esiste una particella con stranezza $S = -3$ e nel decupletto $3/2^+$ la differenza di massa che corrisponde a $\Delta S = 1$ è minore della massa del mesone K. Ω^- non decade neppure per interazione elettromagnetica che conserva la stranezza. Decade per interazione debole con cambio di stranezza di una unità, come le altre particelle strane,

$$\Omega^- \to \Xi^0\pi^- \qquad \Omega^- \to \Xi^-\pi^0 \qquad \Omega^- \to \Lambda^0 K^- \qquad\qquad \tau = 0.82\ 10^{-10}\ s$$

3.1.12 Risonanze mesoniche

In modo analogo si producono risonanze mesoniche con $A = 0$ che decadono in stati di due o più mesoni pseudoscalari. L'analisi della distribuzione angolare dei prodotti di decadimento indica che hanno spin $J = 1$ e per questo sono chiamati *mesoni vettori*. Si possono quindi rappresentare come stati legati di mesoni di spin zero con momento angolare orbitale $\ell = 1$ e hanno parità negativa: $P = P_a P_b (-1)^\ell = -1$. La Fig.3.9 mostra alcuni esempi di produzione di risonanze mesoniche.

- La risonanza K^* è uno stato π-K costituito da due doppietti di isospin $I = 1/2$.

- La risonanza ρ esiste in tre stati di carica con modi di decadimento

$$\rho^+ \to \pi^+\pi^0 \qquad \rho^0 \to \pi^+\pi^- \qquad \rho^- \to \pi^0\pi^-$$

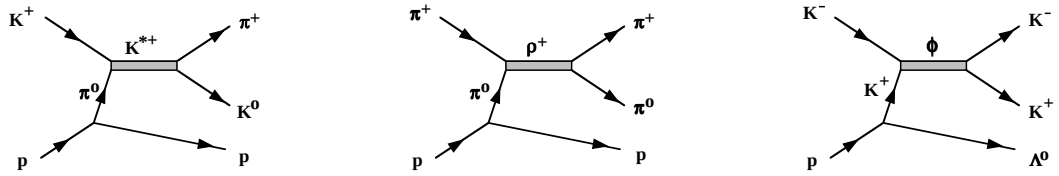


Figure 3.9: Esempi di produzione di risonanze mesoniche

è uno stato legato π-π tripletto di isospin, $I = 1$, gli autostati di isospin, $\rho^+ = |1, +1\rangle$, $\rho^0 = |1, 0\rangle$, $\rho^- = |1, -1\rangle$, sono antisimmetrici per lo scambio $\pi \leftrightarrow \pi$

$$\rho^+ = \frac{\pi^+ \, \pi^0 - \pi^0 \pi^+}{\sqrt{2}} \qquad \rho^0 = \frac{\pi^+ \, \pi^- - \pi^- \pi^+}{\sqrt{2}} \qquad \rho^- = \frac{\pi^0 \, \pi^- - \pi^- \pi^0}{\sqrt{2}}$$

Il decadimento $\rho^0 \to \pi^0 \pi^0$ non avviene perché due bosoni identici non possono esistere in uno stato antisimmetrico. Il mesone ρ^0 è autostato di coniugazione di carica con autovalore $C = -1$. Infatti la trasformazione di coniugazione di carica $\pi^+\pi^- \to \pi^-\pi^+$ corrisponde all'inversione delle coordinate spaziali e cioè alla trasformazione di parità: $C|\pi^+\pi^-\rangle = (-1)^\ell |\pi^-\pi^+\rangle = -|\pi^-\pi^+\rangle$.

- La risonanza ω è un singoletto di isospin con carica elettrica nulla. È uno stato simmetrico dell'isospin e quindi non decade in uno stato π-π che è antisimmetrico per lo scambio $\pi \leftrightarrow \pi$. Il modo di decadimento è $\omega \to \pi^+\pi^0\pi^-$.

- Esite un altro stato singoletto di isospin con massa maggiore di $2m_K$, la risonanza ϕ, che decade prevalentemente in stati K-$\bar{K}$ antisimmetrici rispetto allo scambio (i mesoni K hanno isospin 1/2), ad esempio

$$\phi = |0, 0\rangle = \frac{K^+K^- - K^-K^+}{\sqrt{2}}$$

come ρ^0, i mesoni vettori ω e ϕ sono autostati della coniugazione di carica con autovalore $C = -1$.

La massa e larghezza delle risonanze mesoniche 1^- sono elencate nella tabella che segue con i principali modi di decadimento

	m (MeV/c^2)	Γ (MeV)	*decadimento*		
K^*	894	51	$K\pi$		
ρ	770	150	$\pi\pi$		
ω	783	8.4	$\pi^+\pi^0\pi^-$		
ϕ	1019	4.4	K^+K^-	$K^0\bar{K}^0$	$\pi^+\pi^0\pi^-$

I numeri quantici mostrano le stesse regolarità dei mesoni pseudoscalari

$mesoni\ 1^-$	S	Y	I_3	Q
K^{*+}	$+1$	$+1$	$+1/2$	$+1$
K^{*o}	$+1$	$+1$	$-1/2$	0
ρ^+	0	0	$+1$	$+1$
ρ^0	0	0	0	0
ρ^-	0	0	-1	-1
ω	0	0	0	0
$\bar{K}^{*o}$	-1	-1	$+1/2$	0
K^{*-}	-1	-1	$-1/2$	-1
ϕ	0	0	0	0

La Fig.3.10 mostra la rappresentazione dei numeri quantici dei mesoni pseudoscalari e dei mesoni vettori come un ottetto e un singoletto della simmetria SU(3).

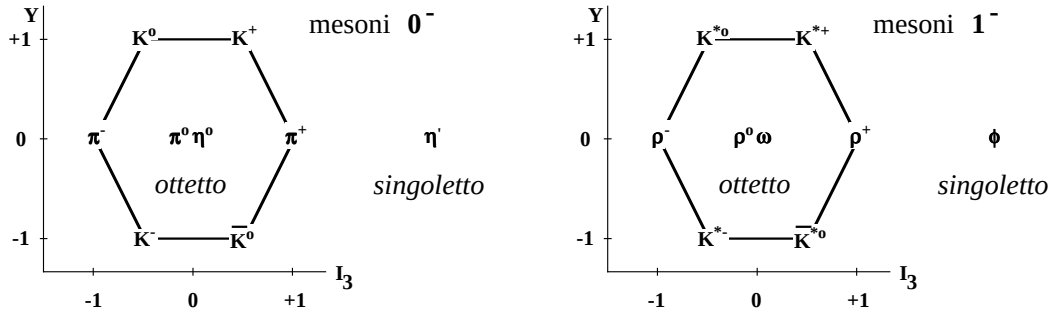


Figure 3.10: Ottetto e singoletto dei mesoni pseudoscalari e vettori

3.2 Modello statico a quark

I numeri quantici delle particelle soggette a interazione adronica mostrano una interessante regolarità sia per i barioni (fermioni) che per i mesoni (bosoni). Questo ordine deve quindi corrispondere a qualche legge di simmetria della hamiltoniana di interazioni che è più generale che non le leggi di conservazione delle singole grandezze: carica elettrica, isospin, ipercarica e numero barionico. Infatti queste grandezze sono legate dalla relazione di Gell-Mann e Nishijima $Q = Y/2 + I_3$.

Le particelle senza stranezza si possono costruire a partire dagli autostati di isospin 1/2 che corrispondono al protone e al neutrone e alle relative antiparticelle

$$p = |1/2, +1/2\rangle \qquad \bar{p} = |1/2, -1/2\rangle \qquad n = |1/2, -1/2\rangle \qquad \bar{n} = |1/2, +1/2\rangle$$

Con questi due stati si costruisce un tripletto e un singoletto con numero barionico nullo

$$|1, +1\rangle = p\bar{n}$$
$$|1,\ 0\rangle = (p\bar{p} + n\bar{n})/\sqrt{2} \qquad |0,\ 0\rangle = (p\bar{p} - n\bar{n})/\sqrt{2}$$
$$|1, -1\rangle = n\bar{p}$$

che corrispondono ai numeri quantici dei mesoni pseudoscalari π e η^0, se si considera lo stato di due fermioni con momento angolare orbitale $\ell = 0$ e spin opposti, oppure ai mesoni vettori ρ e ω, nello stato di spin paralleli. In entrambe i casi la parità dello stato è negativa perché fermione e antifermione hanno parità opposta. In questo esempio è implicita l'invarianza della hamiltoniana di interazione per coniugazione di carica. Questo è il primo tentativo, dovuto a Fermi e Sakata, di riprodurre i numeri quantici dei mesoni.

3.2.1 Modello a quark

La simmetria degli stati di isospin 1/2 è chiamata $SU(2)$ e i generatori della simmetria sono le tre matrici di Pauli (moltiplicate per $\frac{1}{2}$) di cui una è diagonale. Per riprodurre anche i numeri quantici delle particelle strane, oltre alla conservazione dell'isospin occorre introdurre la conservazione della stranezza. Nella simmetria $SU(3)$ (appendice 4.12) i generatori sono otto e di questi due sono diagonali: uno è associato alla terza componente dell'isospin e l'altro all'ipercarica. I generatori sono le *matrici di Gell-Mann* moltiplicate per $\frac{1}{2}$

$$G_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_7 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad G_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Esiste una terza matrice diagonale, combinazione delle precedenti,

$$G^2 = \sum_k G_k^2 = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autostati sono i vettori di base

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se $SU(3)$ è una simmetria dell'interazione adronica

- tutte le particelle a interazione adronica si rappresentano come combinazione di questi stati;

- tutte le grandezze conservate sono operatori diagonali in questa rappresentazione.

G_1, G_2, G_3 sono le componenti dell'operatore isospin

$$G_3 u = +\frac{1}{2}\, u \qquad G_3 d = -\frac{1}{2}\, d \qquad G_3 s = 0$$

u, d formano un doppietto di isospin 1/2, s è un singoletto. L'operatore *stranezza*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha autovalori $Su = 0$, $Sd = 0$, $Ss = -s$. Gli autostati hanno gli stessi autovalori di protone, neutrone e Λ^0, che hanno numero barionico $A = +1$. L'operatore *numero barionico*

$$A = \sum_k G_k^2 - 1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha autovalore $A = +1$ per la combinazione $u + d + s$. Gli operatori *ipercarica* e *carica elettrica* sono

$$Y = A + S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad Q = Y/2 + G_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori delle grandezze fisiche che si conservano sono

	A	I	I_3	S	Y	Q
u	$+1/3$	$1/2$	$+1/2$	0	$+1/3$	$+2/3$
d	$+1/3$	$1/2$	$-1/2$	0	$+1/3$	$-1/3$
s	$+1/3$	0	0	-1	$-2/3$	$-1/3$

I vettori di base sono chiamati *quark*. Il modello a quark basato sulla simmetria $SU(3)$ fu introdotto da Gell-Mann [6] e da Zweig nel 1964. Per dare un significato fisico agli autostati di $SU(3)$ occorre fare un'altra importante ipotesi: *i quark sono fermioni di spin 1/2*. Quindi secondo la teoria di Dirac esistono gli stati coniugati di carica, gli *antiquark*. La trasformazione da uno stato all'altro è la coniugazione complessa e i generatori della simmetria degli antiquark si ottengono con la trasformazione $G_k \rightarrow -G_k^*$. Per i generatori diagonali si cambia il segno. Quindi gli autovalori degli antiquark hanno tutti il segno opposto

	A	I	I_3	S	Y	Q
$\bar{u}$	$-1/3$	$1/2$	$-1/2$	0	$-1/3$	$-2/3$
$\bar{d}$	$-1/3$	$1/2$	$+1/2$	0	$-1/3$	$+1/3$
$\bar{s}$	$-1/3$	0	0	$+1$	$+2/3$	$+1/3$

I quark sono chiamati *up*, *down* e *strange*. I differenti tipi di quark sono detti *sapori*. La rappresentazione nel piano $I_3 \times Y$ è mostrata in Fig.3.11.

[6] premio Nobel per la fisica nel 1969

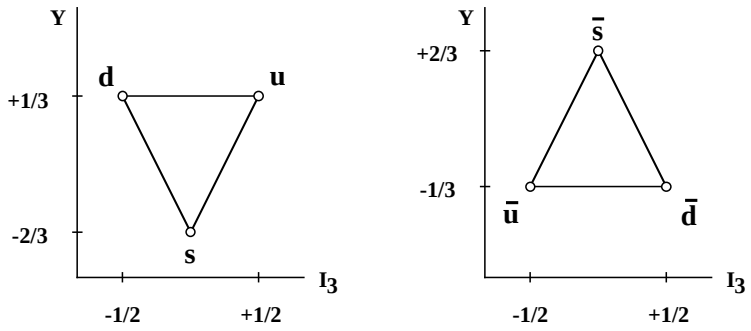


Figure 3.11: Rappresentazione grafica degli stati di quark e antiquark

3.2.2 Mesoni e barioni nel modello a quark

Le particelle adroniche sono rappresentate come combinazioni di quark e antiquark

- i mesoni sono costituiti da una coppia quark-antiquark $q_1\bar{q}_2$: hanno spin intero e numero barionico nullo;
- i barioni sono costituiti da tre quark $q_1q_2q_3$: hanno spin semi-intero e numero barionico $A = +1$;
- gli antibarioni sono costituiti da tre antiquark $\bar{q}_1\bar{q}_2\bar{q}_3$: hanno spin semi-intero e numero barionico $A = -1$.

Le combinazioni si ottengono agendo sugli stati dei quark con gli operatori $I^{\pm} = G_1 \pm iG_2$, $U^{\pm} = G_4 \pm iG_5$, $V^{\pm} = G_6 \pm iG_7$, analoghi agli operatori di salto dei momenti angolari, che aumentano e diminuiscono gli autovalori lungo i tre assi di simmetria, l'asse I_3 e due assi inclinati a $\pm 120°$.

Mesoni

Le combinazioni $q\bar{q}$ sono nove e formano un ottetto e un singoletto. Formalmente questo si indica con il simbolo $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$. La rappresentazione grafica è illustrata in Fig.3.12. I mesoni pseudoscalari hanno spin $J = 0$: quark e antiquark sono nello

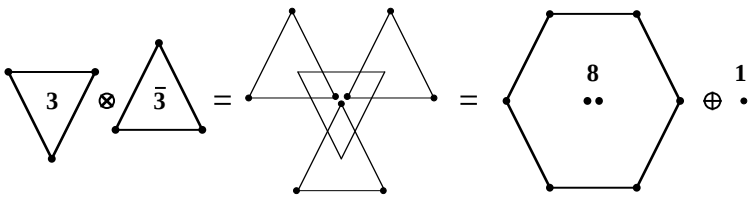


Figure 3.12: Rappresentazione grafica dell'ottetto e del singoletto degli stati $q\bar{q}$

stato di minima energia cinetica, con momento angolare orbitale $\ell = 0$, e hanno spin opposti ($\Uparrow\Downarrow$). La corrispondenza tra i mesoni pseudoscalari e gli stati $q\bar{q}$ è

$$\begin{array}{lll} K^+ = u\bar{s} & K^- = d\bar{s} & \pi^+ = u\bar{d} \\ K^0 = \bar{u}s & \bar{K}^0 = \bar{d}s & \pi^+ = \bar{u}d \end{array}$$

Esistono tre stati con $Q = 0$, $I_3 = 0$, $Y = 0$, per rappresentare i mesoni π^0, η^0, η'. Questi si rappresentano con combinazioni $a_u u\bar{u} + a_d d\bar{d} + a_s s\bar{s}$, con ampiezze normalizzate $|a_u|^2 + |a_d|^2 + |a_s|^2 = 1$. Uno di questi stati è il singoletto, simmetrico per scambio dei sapori: $a_u = a_d = a_s = 1/\sqrt{3}$. Gli altri due stati fanno parte dell'ottetto e sono simmetrici per coniugazione di carica, $C = +1$, e antisimmetrici per scambio delle coordinate, $P = -1$, e degli spin, $J = 0$. Poiché lo stato di due fermioni identici deve essere antisimmetrico, la combinazione di $u\bar{u}$ e $d\bar{d}$ con isospin $I = 1$ (π^0, simmetrica) è antisimmetrica per scambio dei sapori $u \leftrightarrow d$, mentre quelle con isospin $I = 0$ (η^0, η', antisimmetriche) sono simmetriche. Tenendo conto che i tre stati sono tra loro ortogonali, $a_u a'_u + a_d a'_d + a_s a'_s = 0$, si ottengono queste combinazioni

$$\pi^0 = \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} \qquad \eta^0 = \frac{u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}}{\sqrt{6}} \qquad \eta' = \frac{u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}}{\sqrt{3}}$$

I mesoni vettori hanno spin $J = 1$: quark e antiquark hanno spin paralleli ($\Uparrow\Uparrow$). La rappresentazione come un ottetto e un singoletto di $SU(3)$ è identica alla precedente. Va notato che i tre stati con $Q = 0$, $I_3 = 0$, $S = 0$, sono ora antisimmetrici per coniugazione di carica, $C = -1$, ma simmetrici per scambio degli spin $J = 1$. I mesoni ρ^0 e ω hanno masse simili ma decadono in stati 2π e 3π rispettivamente, mentre il mesone ϕ decade in stati di particelle strane $K\bar{K}$; la rappresentazione naturale di questi tre stati è

$$\rho^0 = \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} \qquad \omega = \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} \qquad \phi = s\bar{s}$$

L'ottetto dei mesoni è mostrato in Fig.3.13.

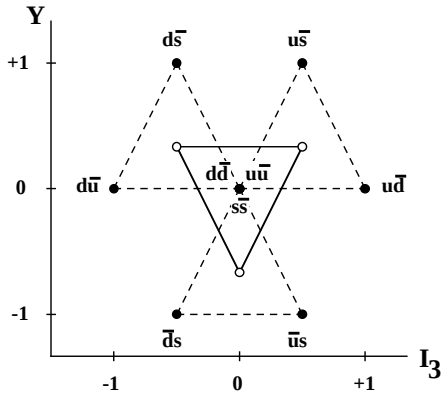


Figure 3.13: Costruzione grafica dell'ottetto dei mesoni

Barioni

I barioni sono combinazioni $q_1 q_2 q_3$. Combinando due quark si ottiene $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \overline{\mathbf{3}}$. Combinando questi con il terzo quark ($\mathbf{6} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8}$, $\overline{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$) si ottiene un

decupletto, due rappresentazioni equivalenti di ottetto e un singoletto

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

L'otteto rappresenta i barioni di spin 1/2. I tre quark hanno momento angolare orbitale $\ell = 0$ e la somma degli spin $J = 1/2$ ($\Uparrow\Uparrow\Downarrow$). Ci sono due stati uds, con $Q = 0$, $I_3 = 0$, $Y = 0$: Σ^0 è uno stato di isospin $I = 1$ simmetrico ed è simmetrico anche per lo scambio $u \leftrightarrow d$, mentre il singoletto di isospin Λ^0 è antisimmetrico. Il decupletto rappresenta gli stati dei barioni con spin 3/2. In questo caso i tre quark hanno spin paralleli ($\Uparrow\Uparrow\Uparrow$). Il singoletto rappresenta un barione simile a Λ^0 con spin 3/2 e massa più grande. La costruzione grafica dell'ottetto e del decupletto è mostrata in Fig.3.14

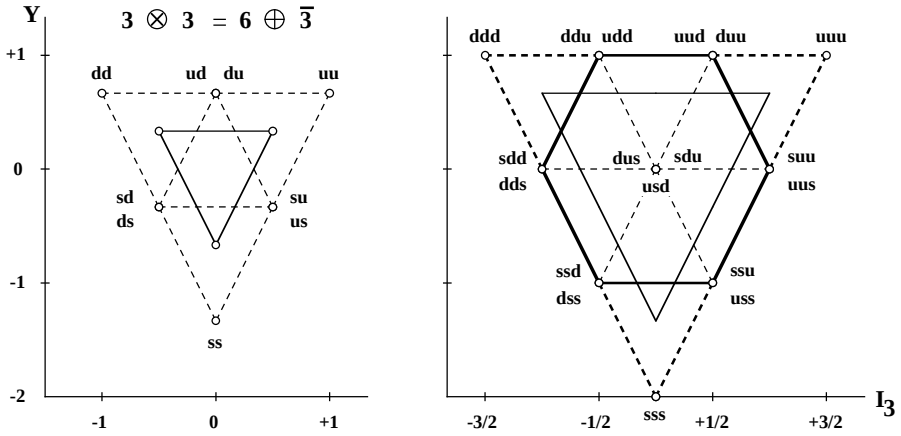


Figure 3.14: Costruzione grafica dell'ottetto dei barioni $1/2^+$ e del decupletto dei barioni $3/2^+$: $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$

Il decupletto contiene tre stati che non sono presenti nell'ottetto dei barioni $1/2^+$: $\Delta^{++} = uuu$, $\Delta^- = ddd$, $\Omega^- = sss$. Questo è sorprendente perché questi stati sono completamente simmetrici rispetto allo scambio di ogni coppia di fermioni identici: una chiara violazione del principio di Pauli.

3.2.3 Momenti magnetici dei barioni

Nel modello a quark i barioni $1/2^+$ sono rappresentati da stati $|q_1 \Uparrow q_2 \Uparrow q_3 \Downarrow\rangle$ in tutte le possibili combinazioni di sapore e orientamento degli spin. Se $j_{12} = 1$ è lo spin della coppia $q_1 q_2$ e $j_3 = 1/2$ lo spin del terzo quark, la combinazione dei tre spin è

$$|J, M\rangle = |1/2, +1/2\rangle = \sqrt{2/3}\ |1, +1; 1/2, -1/2\rangle - \sqrt{1/3}\ |1, 0; 1/2, +1/2\rangle$$

Ci sono due possibilità: quark uguali hanno spin paralleli, oppure quark uguali hanno spin opposti. La prima viola il principio di Pauli. Calcoliamo il momento magnetico di protone e neutrone nei due casi con l'ipotesi che i quark siano fermioni

di Dirac con momento magnetico $\vec{\mu}_q = g(Qe\hbar/2m_q)\vec{s}$ con $g = 2$ (Qe è la carica elettrica).

$$\mu_u = +\frac{2}{3}\,\frac{e\hbar}{2m_u} \qquad \mu_d = -\frac{1}{3}\,\frac{e\hbar}{2m_d} \qquad \mu_s = -\frac{1}{3}\,\frac{e\hbar}{2m_s}$$

Poiché gli adroni nello stesso multipletto di isospin hanno massa molto simile, facciamo l'ipotesi che la massa dei quark u e d sia uguale: $m_u = m_d$.

- Nel primo caso: $|p\rangle = |u \Uparrow u \Uparrow d \Downarrow\rangle$, $|n\rangle = |d \Uparrow d \Uparrow u \Downarrow\rangle$

$$\mu_p = \langle p|\ \mu\ |p\rangle = \frac{2}{3}\,(2\mu_u - \mu_d) + \frac{1}{3}\,\mu_d = \frac{4}{3}\,\mu_u - \frac{1}{3}\,\mu_d = +\frac{e\hbar}{2m_u}$$

$$\mu_n = \langle n|\ \mu\ |n\rangle = \frac{2}{3}\,(2\mu_d - \mu_u) + \frac{1}{3}\,\mu_u = -\frac{1}{3}\,\mu_u + \frac{4}{3}\,\mu_d = -\frac{2}{3}\,\frac{e\hbar}{2m_u}$$

  Ricordando i valori sperimentali, $\mu_p = +2.793\ \mu_N$, $\mu_n = -1.913\ \mu_N$, osserviamo che il modello dà una previsione corretta del segno dei momenti magnetici e del loro rapporto.

- Nel secondo caso: $|p\rangle = |u \Uparrow d \Uparrow u \Downarrow\rangle$, $|n\rangle = |d \Uparrow u \Uparrow d \Downarrow\rangle$

$$\mu_p = \frac{2}{3}\,(\mu_u + \mu_d - \mu_d) + \frac{1}{3}\,\mu_u = \frac{1}{3}\,\mu_u + \frac{2}{3}\,\mu_d = 0$$

$$\mu_n = \frac{2}{3}\,(\mu_d + \mu_u - \mu_d) + \frac{1}{3}\,\mu_d = \frac{2}{3}\,\mu_u + \frac{1}{3}\,\mu_d = +\frac{1}{3}\,\frac{e\hbar}{2m_u}$$

  la previsione del modello è chiaramente errata.

Quindi si ottiene di nuovo che il principio di Pauli è violato nelle configurazioni in cui i quark formano i barioni. Questo risultato è confermato dalla previsione per i momenti magnetici degli iperoni

barione	*stato*	*previsione*	*misura* (μ_N)
Λ^0	$(u \Uparrow d \Downarrow - d \Uparrow u \Downarrow) s \Uparrow$	μ_s	-0.613 ± 0.004
Σ^+	$u \Uparrow u \Uparrow s \Downarrow$	$(4\mu_u - \mu_s)/3$	$+2.46 \pm 0.01$
Σ^-	$d \Uparrow d \Uparrow s \Downarrow$	$(4\mu_d - \mu_s)/3$	-1.16 ± 0.03
Ξ^0	$s \Uparrow s \Uparrow u \Downarrow$	$(4\mu_s - \mu_u)/3$	-1.25 ± 0.01
Ξ^-	$s \Uparrow s \Uparrow d \Downarrow$	$(4\mu_s - \mu_d)/3$	-0.651 ± 0.003
Ω^-	$s \Uparrow s \Uparrow s \Uparrow$	$3\mu_s$	-2.02 ± 0.05

Il barione Σ^0, che è nello stato simmetrico rispetto allo scambio $u \leftrightarrow d$, ha una vita media troppo breve per poter misurare il momento magnetico. L'elemento di matrice della transizione di dipolo magnetico $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$ si può calcolare nel modello a quark e il risultato è in accordo con quello che si ottiene dalla misura della larghezza di decadimento.

Massa dei quark costituenti

Dal confronto tra la previsione del modello e i risultati sperimentali dei momenti magnetici dei barioni si può dare una stima della massa dei quark

$$m_u \approx m_d \approx 330 \qquad m_s \approx 500 \quad MeV/c^2$$

Questo valore deve essere inteso come la massa dei costituenti quando sono *legati* negli stati adronici.

3.2.4 Le masse degli adroni

Se la simmetria SU(3) fosse esatta le masse degli adroni dello stesso multipletto J^P sarebbero uguali, invece sono piuttosto diverse. Se consideriamo come assi di simmetria la terza componente dell'isospin I_3 e l'ipercarica Y possiamo esprimere la massa come $m_0+\delta m_I+\delta m_Y$. La differenza di massa di adroni dello stesso multipletto di isospin è associata al diverso stato di carica elettrica Q, e δm_I è di pochi MeV. Questo suggerisce che la massa dei quark u e d sia approssimativamente uguale, con $m_d > m_u$ perché la massa aumenta con il numero di quark d. La differenza di massa di adroni con ipercarica diversa è più grande, $\delta m_Y = 100 \div 200\ MeV$, e questo indica che la massa del quark s è maggiore: $m_s \sim m_u + \delta m_Y$.

La differenza di massa di adroni nello stesso multipletto deve dipendere da quantità invarianti di SU(3), cioè il modulo dell'isospin e l'ipercarica, e si può esprimere come combinazione lineare di queste secondo la *legge di Gell-Mann−Okubo*

$$\delta m = m_1 Y + m_2 \left[I(I+1) + Y^2/4 \right]$$

Per analizzare la differenza di massa che dipende da Y e non dipende da Q conviene considerare come assi di simmetria la terza componente dell'*U-spin* U_3 (ottenuto ruotando l'asse I_3 di 120°) e la carica Q. In questa rappresentazione $Y = Q/2 + U_3$. Il decupletto dei barioni $3/2^+$ è rappresentato in Fig.3.8; la differenza di massa dei multipletti di U-spin è approssimativamente uguale

$$m_\Omega - m_{\Xi^*} = m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} = m_{\Sigma^*} - m_\Delta \simeq 150\ MeV$$

e questa osservazione è alla base della previsione di Gell-Mann dell'esistenza del barione Ω^- con massa $\simeq 1670\ MeV$.

Per l'ottetto dei barioni $1/2^+$ (Fig.3.15) occorre distinguere i due stati di singoletto e di tripletto di U-spin. Questi si possono esprimere come combinazioni lineari degli stati di isospin Σ^0 e Λ^0: $\Sigma^0_U = a\Sigma^0 + b\Lambda^0$, $\Lambda^0_U = -b\Sigma^0 + a\Lambda^0$:

- n, p formano un doppietto $I = 1/2$,
- Σ^-, Σ^0, Σ^+ formano un tripletto $I = 1$ e Λ^0 è il singoletto,
- p, Σ^+ formano un doppietto $U = 1/2$,
- n, Σ^0_U, Ξ^0 formano un tripletto $U = 1$ e Λ^0_U è il singoletto.

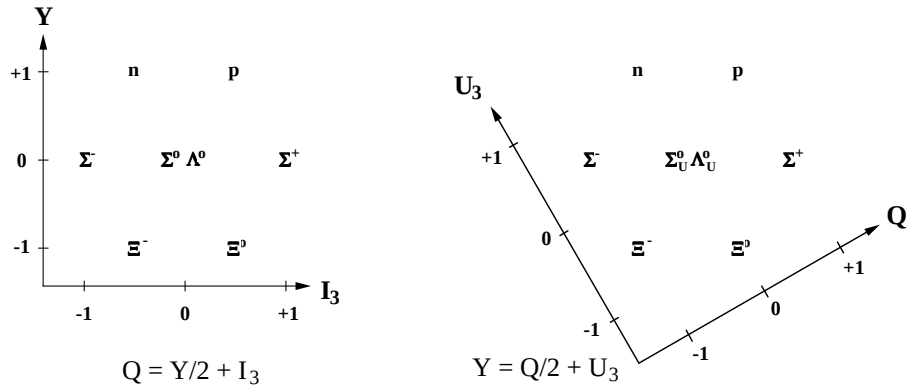


Figure 3.15: Ottetto dei barioni $1/2^+$.

Utilizzando gli operatori di salto del momento angolare

$$J^{\pm}|J, J_3\rangle = [J(J+1) - J_3(J_3 \pm 1)]^{1/2} |J, J_3 \pm 1\rangle$$

e tenendo conto che $[I^+, U^-] = 0$, si ha

- $I^+|n\rangle = I^+|1/2, -1/2\rangle = |1/2, +1/2\rangle = |p\rangle$;
- $U^- I^+|n\rangle = U^-|p\rangle = U^-|1/2, +1/2\rangle = |1/2, -1/2\rangle = |\Sigma^+\rangle$;
- $U^-|n\rangle = U^-|1, +1\rangle = \sqrt{2}|1, 0\rangle = \sqrt{2}\Sigma^0_U = \sqrt{2}|a\Sigma^0 + b\Lambda^0\rangle$;
- $I^+U^-|n\rangle = I^+\sqrt{2}|a\Sigma^0 + b\Lambda^0\rangle = \sqrt{2}aI^+|1, 0\rangle = \sqrt{2}a\sqrt{2}|1, 1\rangle = 2a|\Sigma^+\rangle$

da cui si deduce $a = \frac{1}{2}$, $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, e quindi

$$\Sigma^0_U = \frac{\Sigma^0 + \sqrt{3}\Lambda^0}{2} \qquad \Lambda^0_U = \frac{-\sqrt{3}\Sigma^0 + \Lambda^0}{2}$$

Per la simmetria di U-spin: $m_{\Xi^0} - m_{\Sigma^0_U} = m_{\Sigma^0_U} - m_n$, ovvero

$$\frac{m_{\Xi^0} + m_n}{2} = \frac{m_{\Sigma^0} + 3m_{\Lambda^0}}{4}$$

I valori, 1127 e 1135 MeV, confermano la validità della legge di Gell-Mann−Okubo.

Per applicare le stesse regole di simmetria ai mesoni, occorre notare che nell'equazione del moto compare il quadrato della massa e non la massa come nel caso dei fermioni. Inoltre esistono tre mesoni combinazioni neutre $q\bar{q}$ dello stesso sapore. Mentre è evidente che π^0 e ρ^0 fanno parte dell'ottetto, non è ovvio quale degli altri due mesoni di isospin $I = 0$ assegnare all'ottetto e quale al singoletto. Le masse dei mesoni pseudoscalari e dei mesoni vettori sono riportate nella tabella insieme ai principali

modi di decadimento

	I	m	$\to$	BR		I	m	$\to$	BR
π^0	1	135.0	$\gamma\gamma$	0.99	ρ^0	1	775.8	$\pi^+\pi^-$	1.00
η	0	547.7	$\gamma\gamma$	0.39	ω	0	782.6	$\pi^+\pi^0\pi^-$	0.89
			$\pi^0\pi^0\pi^0$	0.32				$\pi^0\gamma$	0.09
			$\pi^+\pi^0\pi^-$	0.23					
η'	0	957.8	$\eta\pi^+\pi^-$	0.44	ϕ	0	1019.4	K^+K^-	0.49
			$\eta\pi^0\pi^0$	0.21				$K^0_L K^0_S$	0.34
			$\rho^0\gamma$	0.30				$\pi^+\pi^0\pi^-$	0.15

Se applichiamo la formula precedente, la massa dello stato $|0,0\rangle$ dell'ottetto è

$$m^2_{8P} = \frac{4m^2_{K^0} - m^2_{\pi^0}}{3} \qquad m^2_{8V} = \frac{4m^2_{K^{*0}} - m^2_{\rho^0}}{3}$$

i valori sono: $m_{8P} = 569\ MeV \neq m_\eta, m_{\eta'}$; $m_{8V} = 930\ MeV \neq m_\omega, m_\phi$ e quindi nessuno dei due è uno stato di ottetto o singoletto. Invertendo l'argomento, possiamo utilizzare i valori di m_8 per determinare la combinazione degli stati $q\bar{q}$ che rappresentano i mesoni. I mesoni ω e ϕ sono combinazioni lineari degli stati $|0,0\rangle_1$ e $|0,0\rangle_8$

$$\begin{aligned} \phi &= \cos\theta|1\rangle + \sin\theta|8\rangle & |1\rangle &= (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3} \\ \omega &= -\sin\theta|1\rangle + \cos\theta|8\rangle & |8\rangle &= (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6} \end{aligned}$$

e analogamente per i mesoni η e η'. I valori delle masse sono

$$\begin{aligned} m^2_\phi &= m^2_1\cos^2\theta + m^2_8\sin^2\theta + m^2_{18}\ 2\sin\theta\cos\theta \\ m^2_\omega &= m^2_1\sin^2\theta + m^2_8\cos^2\theta - m^2_{18}\ 2\sin\theta\cos\theta \\ 0 &= -m^2_1\sin\theta\cos\theta + m^2_8\sin\theta\cos\theta + m^2_{18}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{aligned}$$

e, risolvendo il sistema di equazioni, si ottiene

$$\tan^2\theta_P = \frac{m^2_8 - m^2_\eta}{m^2_{\eta'} - m^2_8} \qquad \tan^2\theta_V = \frac{m^2_8 - m^2_\omega}{m^2_\phi - m^2_8}$$

$\theta_P = -11°$, $\theta_V = -50°$, per cui (con buona approssimazione) la rappresentazione dei mesoni è

π^0	η	η'		ρ^0	ω	ϕ
$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	$\frac{u\bar{u}+d\bar{d}-s\bar{s}}{\sqrt{3}}$	$\frac{u\bar{u}+d\bar{d}+2s\bar{s}}{\sqrt{6}}$		$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	$\frac{u\bar{u}+d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	$s\bar{s}$

Questo spiega la piccola differenza di massa ρ-ω e il motivo per cui il mesone ϕ decade prevalentemente in stati $K\bar{K}$ anche se il decadimento $\phi \to \pi\pi\pi$ ha un fattore di spazio delle fasi molto maggiore.

Gli adroni rappresentati dalla stessa combinazione di quark appartenenti a multipletti J^P diversi hanno valori di massa diversi, ad esempio $m_{\Delta^+} \neq m_p$. Questo

indica che la massa dipende dallo stato di spin dei quark. Nel caso dell'interazione elettromagnetica, la differenza di energia dei livelli della struttura iperfina è originata dall'interazione tra i momenti magnetici (capitolo ???)

$$\Delta E = \frac{2}{3}\ \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2\ |\psi(0)|^2 = \frac{8\pi\alpha}{3}\ \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{m_1 m_2}\ |\psi(0)|^2$$

dove $\psi(0)$ è il valore della funzione d'onda dello stato legato 1-2 a distanza $r = 0$ e $\vec{\mu} = 2\frac{e}{2m}\vec{s}$ è il momento magnetico di un fermione di massa m. L'interazione tra quark all'interno degli adroni può essere rappresentata dal potenziale (capitolo ???)

$$U_{q\bar{q}}(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r} \qquad\qquad U_{qqq}(r) = -\frac{2\alpha_s}{3r}$$

dove α_s è la costante di accoppiamento dell'interazione adronica. Seguendo l'analogia si ha

$$\Delta E_{mesone} = \frac{32\pi\alpha_s}{9}|\psi_m(0)|^2\ \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{m_1 m_2} \qquad\qquad \Delta E_{barione} = \frac{16\pi\alpha_s}{9}|\psi_b(0)|^2 \sum_{j<k} \frac{\vec{s}_j \cdot \vec{s}_k}{m_j m_k}$$

Quindi in generale possiamo esprimere la massa di mesoni e barioni

$$m(q_1\bar{q}_2) = m_1 + m_2 + a\ \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{m_1 m_2} \qquad\qquad m(q_1 q_2 q_3) = m_1 + m_2 + m_3 + b \sum_{j<k} \frac{\vec{s}_j \cdot \vec{s}_k}{m_j m_k}$$

Il prodotto scalare degli spin si ottiene dalla relazione

$$\vec{J}^{\,2} = (\vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3)^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_2^3 + 2(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1)$$

$$\begin{array}{rcccc} J & = & 0 & 1 & 1/2 \quad 3/2 \\ \sum \vec{s}_j \cdot \vec{s}_k & = & -3/4 & +1/4 & -3/4 \quad +3/4 \end{array}$$

Facendo l'ipotesi aggiuntiva $m_u = m_d$, si ha, per i mesoni:

π : $m_\pi = 2m_u - \frac{3}{4}\frac{a}{m_u^2}$

K : $m_K = m_u + m_s - \frac{3}{4}\frac{a}{m_u m_s}$

η : $\frac{u\bar{u}+d\bar{d}-s\bar{s}}{\sqrt{3}}$; $m_\eta = \frac{4}{3}m_u + \frac{2}{3}m_s - \frac{1}{2}\frac{a}{m_u^2} - \frac{1}{4}\frac{a}{m_s^2}$

η' : $\frac{u\bar{u}+d\bar{d}+2s\bar{s}}{\sqrt{6}}$; $m_{\eta'} = \frac{2}{3}m_u + \frac{4}{3}m_s - \frac{1}{4}\frac{a}{m_u^2} - \frac{1}{2}\frac{a}{m_s^2}$

$\rho\ \omega$: $\frac{u\bar{u}\mp d\bar{d}}{\sqrt{2}}$; $\frac{m_\rho + m_\omega}{2} = 2m_u + \frac{1}{4}\frac{a}{m_u^2}$

K^* : $m_{K^*} = m_u + m_s + \frac{1}{4}\frac{a}{m_u m_s}$

ϕ : $m_\phi = 2m_s + \frac{1}{4}\frac{a}{m_s^2}$

per i barioni:

N : $m_N = 3m_u - \frac{3}{4}\frac{b}{m_u^2}$

Λ : lo stato è antisimmetrico per lo scambio $u \leftrightarrow d$, quindi $J_{ud} = 0$, $\vec{s}_u \cdot \vec{s}_d = -3/4$, $(\vec{s}_u + \vec{s}_d) \cdot \vec{s}_s = 0$; $\quad m_\Lambda = 2m_u + m_s - \frac{3}{4}\frac{b}{m_u^2}$

Σ : lo stato è simmetrico per lo scambio $u \leftrightarrow d$, quindi $J_{ud} = 1$, $\vec{s}_u \cdot \vec{s}_d = +1/4$, $(\vec{s}_u + \vec{s}_d) \cdot \vec{s}_s = -3/4 - 1/4 = -1$; $\quad m_\Sigma = 2m_u + m_s + \frac{1}{4}\frac{b}{m_u^2} - \frac{b}{m_u m_s}$

Ξ : analogo al precedente scambiando $u \leftrightarrow s$; $\quad m_\Sigma = m_u + 2m_s + \frac{1}{4}\frac{b}{m_s^2} - \frac{b}{m_u m_s}$

Δ : nel caso di spin 3/2 ciascuna coppia di quark contribuisce con un termine $+1/4$, $\quad m_\Delta = 3m_u + \frac{3}{4}\frac{b}{m_u^2}$

Σ^* : $m_{\Sigma^*} = 2m_u + m_s + \frac{1}{4}\frac{b}{m_u^2} + \frac{1}{2}\frac{b}{m_u m_s}$

Ξ^* : $m_{\Xi^*} = m_u + 2m_s + \frac{1}{4}\frac{b}{m_s^2} + \frac{1}{2}\frac{b}{m_u m_s}$

Ω : $m_\Omega = 3m_s + \frac{3}{4}\frac{b}{m_s^2}$

I valori delle masse che si ottengono sono leggermente diversi nei due casi

	$m_u\ (GeV)$	$m_s\ (GeV)$	GeV^3
mesoni	0.31	0.49	$a = 0.060$
barioni	0.36	0.54	$b = 0.026$

I parametri a e b sono determinati dal valore di α_s e dalla dimensione dell'adrone. Se assumiamo che la funzione d'onda soluzione del potenziale sia del tipo $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi R^3}} e^{-r/R}$ (appendice 4.11) si ha

$$a = \frac{32\alpha_s}{9}\frac{(\hbar c)^3}{R_m^3} \qquad b = \frac{16\alpha_s}{9}\frac{(\hbar c)^3}{R_b^3}$$

Introducendo i valori del raggio quadratico medio dei mesoni e dei barioni si ha $\alpha_s = 0.5 \div 1$.

3.2.5 Colore dei quark

Il modello a quark riproduce i numeri quantici degli adroni assumendo che i quark costituenti siano fermioni di spin 1/2. Inoltre la previsione dei momenti magnetici è basata sull'ipotesi che siano puntiformi. La verifica sperimentale di queste ipotesi è presentata nel capitolo ???. Ma quark identici si trovano in uno stato simmetrico rispetto allo scambio di coordinate, spin e sapore e questo non è possibile.

In effetti i quark sono caratterizzati da un'altro numero quantico: la *carica adronica* che è la sorgente del campo dell'interazione adronica. Questa carica è chiamata *colore*. Per rendere antisimmetriche le combinazioni dei quark che corrispondono agli stati degli adroni, occorre che ci siano tre colori: ciascun sapore di quark esiste in tre stati di colore. Questi sono di solito indicati con rosso, blu e giallo R, B, G.

La simmetria degli stati di colore è la stessa simmetria $SU(3)$ (introdotta per gli stati di sapore). I generatori della simmetria sono otto e corrispondono agli otto modi con cui i colori dei quark possono interagire tra loro

$$\begin{array}{cccc} R\bar{B} & B\bar{G} & G\bar{R} & (R\bar{R}-B\bar{B})/\sqrt{2} \\ B\bar{R} & G\bar{B} & R\bar{G} & (R\bar{R}+B\bar{B}-2G\bar{G})/\sqrt{3} \end{array}$$

Oltre a questi esiste lo stato simmetrico, singoletto di colore, $(R\bar{R}+B\bar{B}+G\bar{G})/\sqrt{3}$ in cui le tre combinazioni incolori hanno lo stesso peso.

I colori dei quark sono le sorgenti dell'interazione adronica e l'interazione è trasmessa con otto campi bosonici chiamati *gluoni*. (Il nome ha origine dalla natura dell'interazione: gli adroni interagiscono fortemente quando sono "incollati"). Per spiegare perché nelle interazioni degli adroni non si osserva un'intensa radiazione di colore si fa l'ipotesi che le particelle osservate siano sempre in uno stato *incolore*. Per gli stati dei mesoni, questo corrisponde alle combinazioni $q_1^R \bar{q}_2^{\bar{R}}, \ldots$. Gli stati dei barioni sono rappresentati dalle combinazioni antisimmetriche $\Sigma_{RBG}\ \epsilon_{RBG} q_1^R q_2^B q_3^G$ in cui sono presenti i tre colori.

Esempio: decadimento $\pi^0 \to \gamma\gamma$

I quark sono dotati di carica elettrica e quindi sono anche autostati dell'interazione elettromagnetica. Come verifica dell'esitenza di tre stati di colore consideriamo il decadimento elettromagnetico del mesone π neutro (capitolo ???). Lo stato iniziale è costituito dalla combinazione di coppie quark-antiquark: $\pi^0 = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$. La transizione $q\bar{q} \to \gamma\gamma$ (Fig.3.16) è simile a quella del positronio, ma occorre tener conto della carica frazionaria dei quark, del numero di stati di colore, N_c, e della funzione d'onda della coppia $q\bar{q}$ nel pione, f_π

$$\langle \gamma\gamma |\ H_{em}\ |(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}\rangle \propto f_\pi\ \frac{N_c}{\sqrt{2}} \left(\frac{4e^2}{9} - \frac{e^2}{9} \right)$$

La larghezza di decadimento è quindi proporzionale al quadrato del numero di colori: $\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) \propto |f_\pi|^2 N_c^2 \alpha^2/18$. Il confronto con il valore misurato indica che il numero di colori è $N_c = 3$.

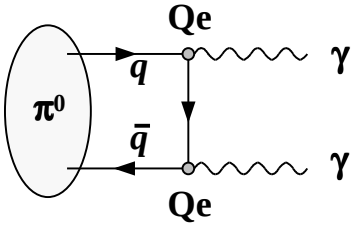


Figure 3.16: Decadimento $\pi^0 \to \gamma\gamma$ nel modello a quark

3.3 Interazioni deboli

Il modello a quark ha portato una notevole semplificazione nel panorama delle particelle: gli adroni *non* sono particelle elementari ma sono costituiti da fermioni di spin 1/2 puntiformi, come i leptoni, ma dotati di una carica di colore sorgente dell'interazione adronica. L'interazione adronica avviene mediante lo scambio di gluoni, bosoni di spin 1. I quark sono dotati di carica elettrica e quindi partecipano anche all'interazione elettromagnetica. Gli adroni sono soggetti anche all'interazione debole: esempi sono il decadimento β dei nuclei, il decadimento del pione e delle particelle strane. In questi decadimenti sono emessi leptoni $\mu^{\pm}$, $e^{\pm}$, ν, $\bar{\nu}$, quindi anch'essi soggetti all'interazione debole.

L'interazione debole è universale: coinvolge tutti i fermioni, quark e leptoni, e la costante di accoppiamento è la stessa per quark e per leptoni: la costante universale di Fermi.

3.3.1 Decadimento del muone

Nella teoria di Fermi la hamiltoniana di interazione è costruita con due correnti fermioniche, J^+ e J^-, che si comportano come gli operatori dell'isospin $G^{\pm} = G_1 \pm iG_2$: cambiano la carica elettrica di una unità

$$G^+u = 0 \qquad G^+d = u \qquad G^-u = d \qquad G^-u = 0$$

l'interazione debole è quindi mediata da due bosoni dotati di carica elettrica, chiamati $W^{\pm}$ (W indica *weak*).

Nel decadimento β^-, ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y\ e^-\ \bar{\nu}_e$, un neutrone del nucleo X si trasforma in un protone del nucleo Y emettendo un bosone W^- che produce la coppia leptone-antileptone $e^-\bar{\nu}_e$. E analogamente per il decadimento β^+. Lo stesso avviene con i quark, ad esempio nel decadimento del neutrone un quark d si trasforma in un quark u emettendo un bosone W^-

$$n = udd \rightarrow ud\ uW^- \rightarrow udu\ e^-\bar{\nu}_e = pe^-\bar{\nu}_e$$

e analogamente per un protone legato in un nucleo. La vita media del decadimento β, derivata nel capitolo ???, è

$$\frac{\hbar}{\tau} = \frac{G^2}{2\pi^3}\ |M_{if}|^2\ \int_o^{p_{max}} (\ldots)\ dp_e$$

dove M_{if} è l'elemento di matrice della transizione adronica e l'integrale, nel limite $p_{max} \gg m_e c$, è proporzionale a p^5_{max} (legge di Sargent). Le transizioni β, rappresentate in modo grafico in Fig.3.17, sono simili al decadimento del muone. In questo caso sono coinvolti solo leptoni (Fig.4.32) e il calcolo dell'elemento di matrice non ha incertezze dovute a effetti di interazione adronica. La probabilità di decadimento del muone è

$$\frac{d^2\Gamma(\mu^{\pm})}{dE_e\ d\cos\theta} = \frac{4\pi^2\ G_F^2}{3(2\pi)^5}\ [(3m_\mu - 4E_e) \mp (m_\mu - 4E_e)\cos\theta]\ \frac{1 \pm h_e}{2}\ m_\mu p_e E_e$$

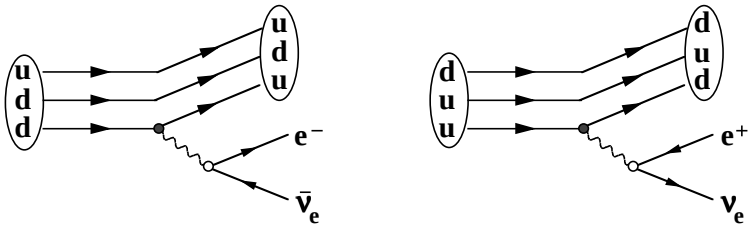


Figure 3.17: Decadimento β^- del neutrone e decadimento β^+ di un protone legato nel nucleo

dove θ è l'angolo tra lo spin del muone e l'impulso dell'elettrone e $h_e = \vec{s}_e \cdot \vec{p}_e / s_e p_e$ è l'elicità dell'elettrone. I positroni sono emessi con elicità $h_{e^+} = +1$ e gli elettroni con elicità $h_{e^-} = -1$. L'elettrone ha impulso massimo quando è emesso in direzione

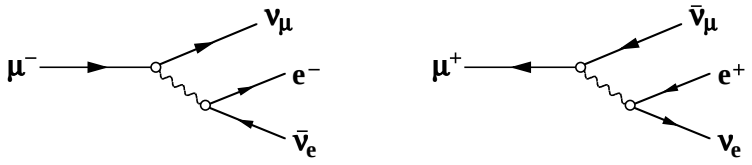


Figure 3.18: Decadimento del muone

opposta ai due neutrini e poiché $m_e \ll m_\mu$ si ha $E_{max} \simeq p_{max} \simeq m_\mu/2$. Introducendo la variabile adimensionale $\varepsilon = E_e/E_{max}$ si ha

$$\frac{d^2\Gamma(\mu^\pm)}{d\varepsilon \; d\cos\theta} = \frac{G_F^2 \; m_\mu^5}{192\pi^3} \left[(3-2\varepsilon) \mp (1-2\varepsilon)\cos\theta\right] \varepsilon^2$$

La distribuzione in energia dell'elettrone aumenta con ε ed è massima per $\varepsilon = 1$

$$\frac{d\Gamma}{d\varepsilon} = \frac{G_F^2 \; m_\mu^5}{192\pi^3} \; 2\,(3-2\varepsilon)\,\varepsilon^2$$

La distribuzione angolare mostra che l'elettrone [positrone] ha maggiore probabilità di essere emesso nella direzione opposta [concorde] a quella dello spin del muone

$$\frac{d\Gamma(\mu^\pm)}{d\cos\theta} = \frac{G_F^2 \; m_\mu^5}{192\pi^3} \; \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\cos\theta}{3}\right)$$

Nel limite $\beta \to 1$ l'elicità si conserva in una interazione vettoriale o assialvettoriale (appendice 4.18) e questo fa in modo che l'elettrone sia emesso con impulso mediamente maggiore di quello dei neutrini e che la direzione di emissione sia correlata con quella dello spin del muone come illustrato in Fig.3.19. La vita media del muone dipende solo dalla massa e dalla costante universale di Fermi G_F; questa è appunto determinata dalla misura di τ_μ

$$\Gamma(\mu \to e\nu\bar{\nu}) = \frac{\hbar}{\tau_\mu} = \frac{G_F^2 \; m_\mu^5}{192\pi^3} \qquad \Rightarrow \qquad G_F = 1.16639 \pm 0.0001 \times 10^{-5} \; GeV^{-2}$$

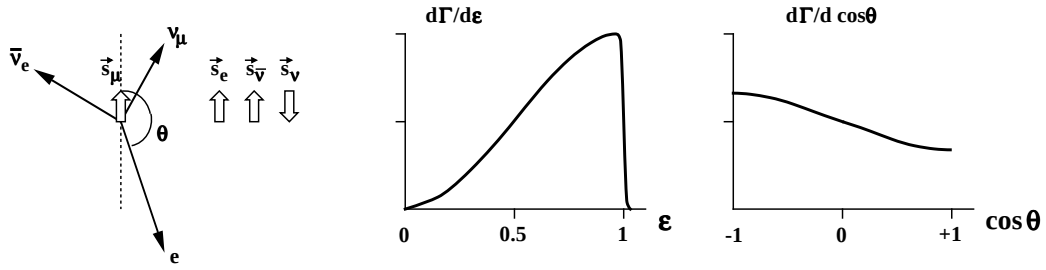


Figure 3.19: Decadimento $\mu^- \to \nu_\mu e^- \bar{\nu_e}$: distribuzione dell'energia dell'elettrone e correlazione tra le direzioni dell'impulso e dello spin del muone

Il valore di G_F è leggermente maggiore di quello che si ottiene dallo studio dei decadimenti β dei nuclei: l'accoppiamento del campo debole con i leptoni non è esattamente uguale a quello con i quark ($W^+ \to e^+\nu_e = W^+ \to \mu^+\nu_\mu \neq W^+ \to u\bar{d}$).

3.3.2 Il propagatore dell'interazione debole

Nella teoria di Fermi dell'interazione a contatto il propagatore è costante, ma questo non può descrivere le interazioni deboli a energia elevata. Consideriamo la diffusione elastica di neutrini da un bersaglio di elettroni $\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e$. Il quadrato dell'energia totale $s = (P_\nu + P_e)^2$ è invariante. Nel riferimento del laboratorio $s = 2m_e c^2 E_\nu$. Nel centro di massa della reazione $s = (2pc)^2$. A energia $\sqrt{s} \gg m_e c^2$ il neutrino e l'elettrone hanno la stessa elicità e impulsi opposti, quindi lo stato di momento angolare totale è $J = 0$: la sezione d'urto non dipende dall'angolo di diffusione. La sezione d'urto è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{c}\,\frac{2\pi}{\hbar}\,|\langle \mu\nu|H_w|\nu e\rangle|^2\,\frac{p^2}{8\pi^3\hbar^3 c}$$

L'elemento di matrice è lo stesso che interviene nel decadimento del muone ed è una costante, quindi la sezione d'urto aumenta con l'energia

$$\sigma(\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e) = \frac{G^2(\hbar c)^2}{\pi}\,s$$

Ma la sezione d'urto non può superare il limite di unitarietà definito dallo sviluppo in onde parziali (capitolo ???)

$$\sigma \leq \frac{4\pi(\hbar c)^2}{(pc)^2}\sum_\ell (2\ell+1)$$

Per un'interazione a contatto contribuisce solo lo stato $\ell = 0$ e quindi si ha il vincolo $G^2 s/\pi \leq 16\pi/s$, per cui il modello con interazione a contatto può essere valido solo per energie minori di $\sqrt{s} = \sqrt{4\pi/G} \approx 10^3\ GeV$. Di qui la necessità di introdurre un propagatore dell'interazione, ad esempio nella forma $(1 + q^2/M^2)^{-1}$ (M è la massa del bosone mediatore dell'interazione), in modo che per valori dell'impulso trasferito $q > M$ la sezione d'urto diminuisca proporzionalmente a $G^2(1 + q^2/M^2)^{-2}$.

3.3.3 Decadimenti leptonici dei mesoni

I mesoni pseudoscalari decadono per interazione debole. La tabella indica i modi di decadimento con solo leptoni nello stato finale, le frazioni di decadimento e la vita media

$\Delta S = 0$	$\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$	1.00	$\pi^+ \to e^+ \nu_e$	$1.23\ 10^{-4}$	$\tau = 2.60\ 10^{-8}\ s$
$\Delta S = 1$	$K^+ \to \mu^+ \nu_\mu$	0.635	$K^+ \to e^+ \nu_e$	$1.55\ 10^{-5}$	$\tau = 1.24\ 10^{-8}\ s$

La stranezza non si conserva nell'interazione debole: esistono decadimenti con $\Delta S = 0$ e decadimenti con $\Delta S = 1$. Poiché l'interazione è mediata da un bosone carico le transizioni tra quark sono

$$\Delta S = 0 \quad u \leftrightarrow d \qquad\qquad \Delta S = 1 \quad u \leftrightarrow s$$

e non esistono transizioni deboli $d \leftrightarrow s$. (Fig.3.20). Prendendo come esempio il

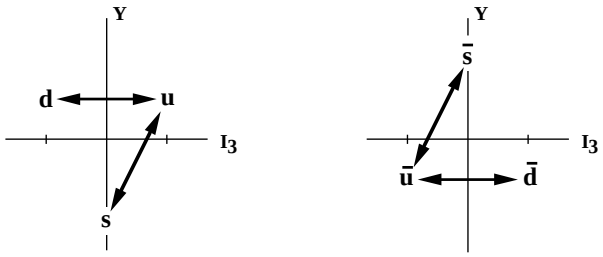


Figure 3.20: Transizioni deboli dei quark con $\Delta S = 0$ e $\Delta S = 1$

decadimento $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, la larghezza è

$$d\Gamma(\pi \to \mu\nu) = costante \times |\langle \mu\nu | H_w | u\bar{d} \rangle|^2 \; p^2 \frac{dp}{dE} \; d\Omega$$

I mesoni π e K hanno spin zero e quindi la probabilità di decadimento non dipende dall'angolo di emissione. I mesoni hanno parità negativa e quindi l'elemento di matrice è di tipo *assialvettoriale*. I decadimenti leptonici dei mesoni pseudoscalari sono rappresentati in Fig.3.21. L'impulso del muone e del neutrino è $p = (M^2 -$

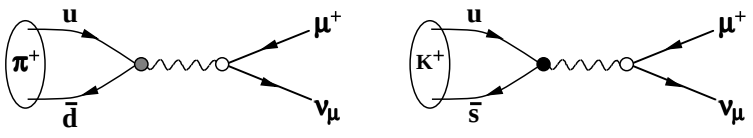


Figure 3.21: Rappresentazione grafica dei decadimenti leptonici dei mesoni π e K

$m^2)/2M$ (M è la massa del mesone, m è la massa del leptone carico). Il fattore di spazio delle fasi è

$$p^2 \; \frac{dp}{dE} = \frac{(M^2 - m^2)^2}{4M^2} \; \frac{M^2 + m^2}{2M^2}$$

L'elemento di matrice dipende dalla costante di accoppiamento, e dalla funzione d'onda dei quark nel pione f_π. Inoltre occorre tener conto che in uno stato di momento angolare totale $J = 0$ i leptoni sono emessi con la stessa elicità. Il neutrino è un autostato di elicità $h_\nu = -1$. La probabilità che il μ^+ (antifermione) abbia elicità negativa è

$$\frac{1-\beta_\mu}{2} = \frac{m^2}{M^2+m^2}$$

Quindi la larghezza di decadimento è proporzionale al quadrato della massa del leptone. Questo spiega perché i decadimenti in elettrone siano fortemente soppressi rispetto ai decadimenti in muone. Introducendo i vari fattori, la larghezza dei decadimenti leptonici dei mesoni pseudoscalari è

$$\Gamma(\pi \to \ell\nu) = \frac{G_d^2}{8\pi}\, f_\pi^2 m_\pi\, m_\ell^2(1-m_\ell^2/m_\pi^2)^2 \qquad \Gamma(K \to \ell\nu) = \frac{G_s^2}{8\pi}\, f_K^2 m_K\, m_\ell^2(1-m_\ell^2/m_K^2)^2$$

Nel primo caso ($\Delta S = 0$) si ha una transizione $u\bar{d} \to W^+ \to \ell^+\nu$: la costante G_d è quella del decadimento β dei nuclei. Nel secondo caso ($\Delta S = 1$) si ha una transizione $u\bar{s} \to W^+ \to \ell^+\nu$ e la costante G_s non è necessariamente uguale a G_d. Il rapporto tra queste costanti si può estrarre dai risultati sperimentali

$$\frac{\Gamma(K \to \mu\nu)}{\Gamma(\pi \to \mu\nu)} = \frac{BR(K \to \mu\nu)}{BR(\pi \to \mu\nu)}\frac{\tau_\pi}{\tau_K} = 1.33 = \frac{G_s^2}{G_d^2}\,\frac{f_K^2 m_K}{f_\pi^2 m_\pi}\,\frac{(1-m_\mu^2/m_K^2)^2}{(1-m_\mu^2/m_\pi^2)^2}$$

Il rapporto che si ottiene dai decadimenti leptonici dei mesoni pseudoscalari per le transizioni di tipo assiale è

$$\frac{|A(\Delta S=1)|^2}{|A(\Delta S=0)|^2} = \frac{G_s^2}{G_d^2} \approx 0.05$$

dove la maggiore incertezza deriva dalla conoscenza delle funzioni d'onda, chiamate (impropriamente) costanti di decadimento, $f_\pi \simeq 130\ MeV$ e $f_K \simeq 160\ MeV$.

Fasci di neutrini

I neutrini sono fermioni puntiformi soggetti solo all'interazione debole ed è quindi di grande interesse avere a disposizione intensi fasci di neutrini per studiarne le interazioni su bersagli di nuclei o di elettroni. Il metodo di produrre fasci di neutrini è stato suggerito da Bruno Pontecorvo e Melvin Schwarz (Fig.3.22).

Se si invia un fascio di protoni di alta energia su un bersaglio si producono mesoni $\pi^\pm$ e $K^\pm$. I mesoni emessi in avanti con impulso elevato si possono selezionare con un opportuno sistema magnetico, una *lente magnetica*, che ha il fuoco nel bersaglio e produce un fascio quasi parallelo di mesoni con carica elettrica positiva oppure negativa. I mesoni decadono a valle del bersaglio: quelli di carica positiva producono neutrini ν_μ, quelli di carica negativa antineutrini $\bar{\nu}_\mu$. Scegliendo la polarità della lente si selezionano ν_μ oppure $\bar{\nu}_\mu$.

Il cammino di decadimento dei mesoni è $\lambda = (p/mc)c\tau$, tipicamente di alcune centinaia di metri. A valle del bersaglio si lascia un lungo spazio vuoto in cui gran

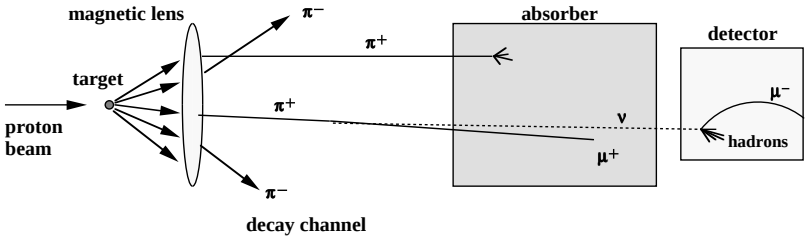


Figure 3.22: Fascio di neutrini ν_μ.

parte dei mesoni decadono. In questo *canale di decadimento* si propagano i neutrini, i muoni e i mesoni che non sono decaduti. A valle del canale di decadimento c'è un lungo assorbitore di materiale di elevata densità in cui i mesoni residui sono assorbiti per interazione nucleare e i muoni perdono energia per ionizzazione. I neutrini, soggetti solo ad interazione debole, lo attraversano indisturbati.

Consideriamo un mesone con impulso p e energia E ($E \approx p$). Nel riferimento del mesone l'impulso e l'energia del neutrino e del muone sono

$$p^* = \frac{M^2 - m^2}{2M} = E^*_\nu \qquad\qquad E^*_\mu = \frac{M^2 + m^2}{2M}$$

Il mesone ha spin zero e quindi la distribuzione angolare nel suo riferimento è uniforme. Nel riferimento del laboratorio le componenti trasversa e longitudinale dell'impulso sono

$$p_T = p^* \sin\theta^* \qquad p_L = \gamma p^* \cos\theta^* + \beta\gamma E^* = \frac{E}{M}\ p^* \cos\theta^* + \frac{p}{M}\ E^*$$

Tipicamente γ è molto grande e quindi $p_L \gg p_T$. La distribuzione della componente longitudinale è uniforme

$$\frac{dn}{dp_L} = \frac{dn}{d\cos\theta^*}\ \frac{d\cos\theta^*}{dp_L} = \frac{1}{2\gamma p^*} = costante$$

Il valore minimo dell'energia del neutrino si ha quando è emesso all'indietro nel riferimento del mesone ($\cos\theta^* = -1$) $p_{min} = 0$; il valore massimo quando è emesso in avanti ($\cos\theta^* = +1$) $p_{max} = (2p^*/M)p$.

Se invece si vuole selezionare un fascio di muoni si riduce lo spessore dell'assorbitore in modo da eliminare solo i mesoni. Il valore minimo dell'impulso è $p^\mu_{min} = p^\nu_{max}$, e il valore massimo è pari all'impulso del mesone. Si possono realizzare fasci di muoni, μ^+ oppure μ^-, con energia molto maggiore dei fasci di elettroni perché questi perdono energia per irraggiamento ed è più difficile raggiungere energie elevate. Inoltre i fasci di muoni sono naturalmente polarizzati: un μ^+ con impulso minimo ha elicità positiva e con impulso massimo ha elicità negativa, e l'inverso avviene per un μ^-.

Due diversi neutrini

Uno dei primi esperimenti con un fascio di neutrini fu fatto nel 1961 da Lederman, Schwartz e Steinberger [7] e aveva lo scopo di verificare se i due neutrini emessi nel decadimento del muone fossero diversi. Se esiste un solo tipo di neutrino, questo nell'interazione con i nuclei di un bersaglio può produrre con unguale probabilità sia elettroni che muoni: $\sigma(\nu N \to e^- X) = \sigma(\nu N \to \mu^- X)$. Se invece i due neutrini sono diversi, il fascio contiene essenzialmente neutrini ν_μ perché i mesoni hanno bassa probabilità di decadere in elettroni. In questo caso si deve ossevare solo la produzione di muoni nello stato finale: $\nu_\mu N \to \mu^- X$. Questo è quanto si è osservato nell'esperimento per cui si può concludere che esistono due distinte *famiglie* di leptoni e che il numero leptonico associato all'elettrone (e al neutrino ν_e) si conserva separatamente da quello associato al muone (e al neutrino ν_μ).

$$\textit{leptoni} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \qquad \textit{antileptoni} \quad \begin{pmatrix} \bar{\nu}_e \\ e^+ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{\nu}_\mu \\ \mu^+ \end{pmatrix}$$

3.3.4 La Parità non si conserva

La parità di uno stato non si conserva necessariamente nell'interazione debole. Questo fenomeno, osservato nel decadimento dei mesoni $K^\pm$, è confermato dallo studio dei decadimenti β di nuclei polarizzati (capitolo ???). Un secondo esempio è il decadimento leptonico dei mesoni π e K, ad esempio $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ (Fig.3.23). Il pione ha spin zero e quindi μ^+ e ν_μ hanno la stessa elicità negativa (il neutrino è autostato dell'elicità con $h_\nu = -1$)

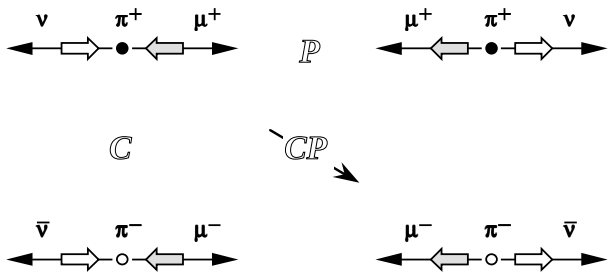


Figure 3.23: Decadimento $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$

- se si applica a questo stato la trasformazione di parità, gli spin rimangono invariati e gli impulsi cambiano direzione: si ottiene uno stato in cui μ^+ e ν_μ hanno elicità positiva, questo non è uno stato possibile;
- se si applica allo stato iniziale la trasformazione di coniugazione di carica, $\pi^+ \to \pi^-$, $\mu^+\nu_\mu \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$, si ottiene un antineutrino nello stato di elicità negativa: anche questo non è uno stato possibile;

[7] premi Nobel per la fisica nel 1988

- se si applicano le due trasformazioni, *parità* × *coniugazione di carica*, si passa dallo stato $\mu^+\nu_\mu$ con elicità negativa allo stato $\mu^-\bar{\nu}_\mu$ con elicità positiva che sono i soli due stati possibili.

Quindi l'interazione debole non rispetta la simmetria per parità né quella per coniugazione di carica, ma rispetta la *simmetria CP*.

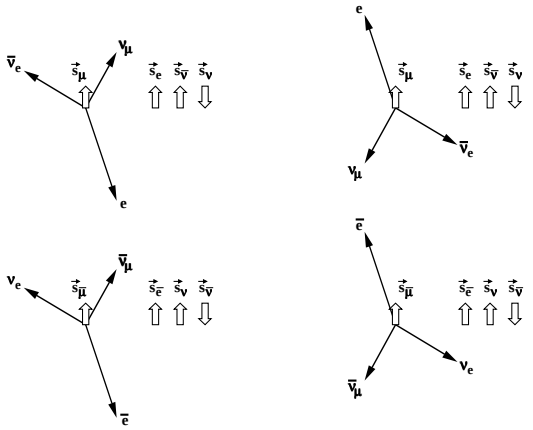


Figure 3.24: Decadimento $\mu^- \to \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$

Lo stesso avviene per il decadimento del muone, $\mu^- \to \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ (Fig.3.24). La probabilità di decadimento dipende da una quantità pseudoscalare, il prodotto $\vec{s}_\mu \cdot \vec{p}_e$, che si inverte per trasformazione di parità. Se si ha un μ^- polarizzato, l'elettrone è emesso preferenzialmente nella direzione opposta allo spin $\vec{s}_\mu$. Applicando la trasformazione P, $\vec{s}_\mu$ non cambia direzione ma $\vec{p}_e$ si inverte: non si ha la configurazione del decadimento di partenza. Applicando la trasformazione C, cambia il segno della carica elettrica e la direzione del campo magnetico, ma non la direzione di emissione del positrone: di nuovo non si ha una configurazione possibile. Applicando la trasformazione CP si ottiene il decadimento $\mu^+ \to \bar{\nu}_\mu e^+ \nu_e$ con il positrone emesso preferenzialmente nella direzione dello spin del μ^+.

Questo è stato verificato sperimentalmente. Il primo esperimento fu fatto da Garwin, Lederman e Weinreich nel 1957 pochi mesi dopo l'esperimento sul decadimento del ^{60}Co polarizzato. Si usa un fascio di mesoni π^+ di bassa energia e i pioni perdono tutta l'energia cinetica in un assorbitore di Carbonio "C" prima di decadere (Fig.3.25). La coincidenza temporale di due rivelatori, "A" e "D", posti lungo la direzione di volo dei π^+ prima e dopo l'assorbitore segnala che i μ^+ sono emessi in avanti e quindi sono naturalmente polarizzati con elicità negativa. I μ^+ perdono l'energia cinetica e si arrestano in un secondo assorbitore, "B", dove decadono $\mu^+ \to \bar{\nu}_\mu e^+ \nu_e$. L'assorbitore è circondato da rivelatori, "E" e "F", che segnalano la direzione di emissione dei positroni. Tra questi rivelatori c'è uno spessore di materiale e si possono selezionare i positroni con energia prossima al valore massimo $E_{max} = m_\mu/2$. Si osserva che questi sono emessi preferenzialmente nella direzione opposta a quella del fascio di π^+, cioè nella direzione dello spin dei μ^+. Quindi la direzione (e il modulo) dell'impulso del positrone, $\vec{p}_e$, è correlata con la direzione

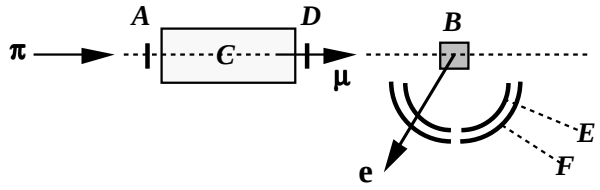


Figure 3.25: Decadimento $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$, $\mu^+ \to \bar{\nu}_\mu e^+\nu_e$: misura della correlazione tra l'impulso del positrone e lo spin del muone

dello spin del muone $\vec{s}_\mu$ secondo la previsione della teoria $V-A$ dell'interazione debole.

Per verificare che l'interpretazione del risultato fosse corretta, il secondo assorbitore fu immerso in un campo magnetico con direzione normale alla linea di volo dei π^+. In questo caso il momento della forza che agisce sul momento magnetico del muone, $\vec{\mu}_\mu \wedge \vec{B}$, produce la precessione del momento magnetico attorno alla direzione del campo e quindi anche la rotazione dell'impulso dell'elettrone con la stessa frequenza $\omega = g_\mu eB/2m_\mu$. Il risultato è che il numero di positroni rivelato ad un certo angolo nel piano normale a $\vec{B}$ è modulato dalla frequenza ω. Con questo metodo fu fatta la prima misura del fattore giromagnetico del muone, g_μ, e fu dimostrato che è uguale a quello dell'elettrone, $g_\mu \simeq 2$.

3.3.5 Decadimenti semileptonici

Decadimenti semileptonici dei mesoni

I mesoni π e K possono decadere in un adrone e una coppia elettrone-antineutrino, come avviene nel decadimento β. La tabella indica i modi possibili e le relative frazioni di decadimento

$\Delta S = 0$	$\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$	$1.03\ 10^{-8}$		
$\Delta S = 1$	$K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$	0.048	$K^+ \to \pi^0 \mu^+ \nu_\mu$	0.032

I mesoni nello stato iniziale e finale hanno spin zero: si tratta di una transizione di Fermi $0^- \to 0^-$ e quindi l'elemento di matrice è di tipo *vettoriale*. Nelle transizioni con $\Delta S \neq 0$ cambia l'isospin e la carica elettrica dell'adrone

$s \to u$	$K^- \to \pi^0 e^- \bar{\nu}_e$	$\Delta I = 1/2$	$\Delta S = \Delta Q = -1$
$\bar{s} \to \bar{u}$	$K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$	$\Delta I = 1/2$	$\Delta S = \Delta Q = +1$

La rappresentazione dei decadimenti semileptonici dei mesoni è mostrata in Fig.3.26. Nel caso del decadimento del mesone π si può utilizzare l'approssimazione della legge di Sargent con $p_{max} \simeq \Delta m = m_{\pi^+} - m_{\pi^0} \gg m_e$. Nel secondo caso l'approssimazione con $p_{max} = (m_K/2)(1 - m_\pi^2/m_K^2)$ è meno accurata. Le larghezze di decadimento sono

$$\Gamma(\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e) \simeq 2\,\frac{G_d^2}{2\pi^3}\,\frac{\Delta m^5}{30} \qquad \Gamma(K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e) \simeq \frac{G_s^2}{48\pi^3}\,\frac{m_K^5(1 - m_\pi^2/m_K^2)^5}{32}$$

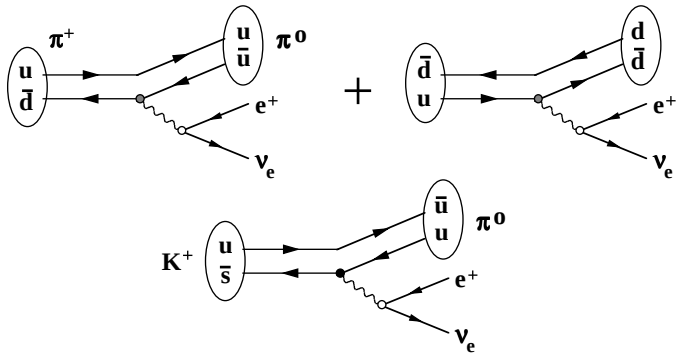


Figure 3.26: Rappresentazione grafica dei decadimenti semileptonici $\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$ e $K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$

Il valore misurato del rapporto tra le larghezze di decadimento è

$$\frac{\Gamma(K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e)} = \frac{BR(K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e)}{BR(\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e)} \frac{\tau_\pi}{\tau_K} = 9.9\ 10^6$$

Da questo si ottiene che il rapporto tra le costanti di accoppiamento per le transizioni di tipo vettoriale è simile a quello per le transizioni di tipo assiale

$$\frac{|V(\Delta S = 1)|^2}{|V(\Delta S = 0)|^2} = \frac{G_s^2}{G_d^2} \approx 0.05$$

Decadimenti semileptonici dei barioni

Anche i barioni con stranezza decadono β come il neutrone. I grafici sono simili a quelli della Fig.3.17. Esempi dei modi semileptonici con $\Delta S = 0$ e $\Delta S = 1$ e delle frazioni di decadimento sono

		$\Delta m\ (MeV)$	BR	$\tau\ (s)$
$\Delta S = 0$	$n \to p e^- \bar{\nu}_e$	1.29	1	887
	$\Sigma^+ \to \Lambda^0 e^+ \nu_e$	73.7	$0.20\ 10^{-4}$	$0.80\ 10^{-10}$
	$\Sigma^- \to \Lambda^0 e^- \bar{\nu}_e$	81.7	$0.57\ 10^{-4}$	$1.48\ 10^{-10}$
$\Delta S = 1$	$\Lambda^0 \to p e^- \bar{\nu}_e$	177.4	$8.32\ 10^{-4}$	$2.63\ 10^{-10}$
	$\Sigma^- \to n e^- \bar{\nu}_e$	257.8	$1.02\ 10^{-3}$	$1.48\ 10^{-10}$
	$\Xi^0 \to \Sigma^+ e^- \bar{\nu}_e$	125.5	$2.7\ 10^{-4}$	$2.90\ 10^{-10}$
	$\Xi^- \to \Lambda^0 e^- \bar{\nu}_e$	205.6	$5.63\ 10^{-4}$	$1.64\ 10^{-10}$
	$\Xi^- \to \Sigma^0 e^- \bar{\nu}_e$	128.7	$0.87\ 10^{-4}$	$1.64\ 10^{-10}$

Gli antibarioni decadono allo stesso modo negli stati coniugati di carica, ad esempio: $\overline{\Sigma^+} \to \overline{\Lambda^0} e^- \bar{\nu}_e$, $\overline{\Lambda^0} \to \bar{p} e^+ \nu_e$, ... Esistono anche i decadimenti con muoni nello stato finale, ad esempio $\Lambda^0 \to p \mu^- \bar{\nu}_\mu$, che confermano che gli accoppiamento dei doppietti di leptoni (μ^-, ν_μ), (e^-, ν_e) sono identici. Le relazioni $\Delta I = 1/2$, $\Delta Q = \Delta S$, sono valide per tutti i decadimenti con $\Delta S = 1$ osservati. Ad esempio, non si osservano i decadimenti $\Sigma^+ \to n e^+ \nu_e$, $\Xi^0 \to \Sigma^- e^+ \nu_e$.

I barioni nello stato iniziale e finale sono $1/2^+$ e quindi l'elemento di matrice è una combinazione di transizioni vettoriali e assiali. Per questi decadimenti la legge di Sargent è una buona approssimazione perché il barione nello stato finale assorbe una piccola frazione dell'energia cinetica e $\Delta m \gg m_e$, per cui $\Gamma \simeq (G^2/2\pi^3)\ (\Delta m^5/30)$. Il rapporto tra le costanti di accoppiamento $G(\Delta S = 1)/G(\Delta S = 0)$ si ottiene dai dati della tabella. Ad esempio

$$\frac{\Gamma(\Sigma^- \to n e^- \bar{\nu}_e)/\Delta m^5_{\Sigma n}}{\Gamma(\Sigma^- \to \Lambda^0 e^- \bar{\nu}_e)/\Delta m^5_{\Sigma\Lambda}} \simeq 0.05 \simeq \frac{G_s^2}{G_d^2}$$

Anche nel caso dei decadimenti semileptonici dei barioni si conferma che gli elementi di matrice delle transizioni $\Delta S = 1$ e $\Delta S = 0$ sono diversi e che il rapporto tra le costanti di accoppiamento, $G_s^2/G_d^2 \approx 0.05$ è lo stesso indipendentemente dal tipo di transizione tra adroni: quindi deve riflettere una proprietà dei quark costituenti.

3.3.6 L'angolo di Cabibbo

L'analisi dei decadimenti semileptonici di mesoni e barioni fornisce un quadro coerente con l'ipotesi che questi siano costituiti di quark. Inoltre sia i decadimenti leptonici che quelli semileptonici mostrano che l'accoppiamento dei doppietti di leptoni (e^-, ν_e), (μ^-, ν_μ), con il campo debole è lo stesso. I leptoni sono autostati dell'interazione debole e i quark sono autostati dell'interazione adronica. Nicola Cabibbo nel 1964 mostrò che i quark sono anche autostati dell'interazione debole. Se i leptoni e i quark sono le sorgenti dell'interazione debole

- l'accoppiamento degli elettroni al campo debole è proporzionale a una *carica debole*, $g_{e\nu}$;
- l'accoppiamento dei muoni è proporzionale a $g_{\mu\nu}$ e queste due cariche sono uguali: $g_{\mu\nu} = g_{e\nu}$;
- l'accoppiamento dei quark (u, d) genera le transizioni con $\Delta S = 0$ ed è proporzionale a g_{ud};
- l'accoppiamento dei quark (u, s) genera le transizioni con $\Delta S = 1$ ed è proporzionale a g_{us}.

Gli elementi di matrice delle transizioni che coinvolgono solo leptoni sono proporzionali alla costante di Fermi: $\langle f|H_w|i\rangle \propto g^2_{\ell\nu} = G_F$. Gli elementi di matrice dei processi semileptonici sono

$$\langle f|H_w|i\rangle_{\Delta S=0} \ \propto g_{e\nu}\ g_{ud} = G_d \qquad\qquad \langle f|H_w|i\rangle_{\Delta S=1} \ \propto g_{e\nu}\ g_{us} = G_s$$

L'ipotesi di Cabibbo (Fig.3.27) è che l'interazione debole sia universale, cioè che un solo parametro, la costante universale di Fermi (che nel seguito è indicata con G), descriva l'accoppiamento del campo debole a leptoni e quark

$$G = g^2_{e\nu} = g^2_{ud} + g^2_{us} \quad \Rightarrow \quad g_{ud} = g_{e\nu}\cos\theta_c \quad g_{us} = g_{e\nu}\sin\theta_c$$

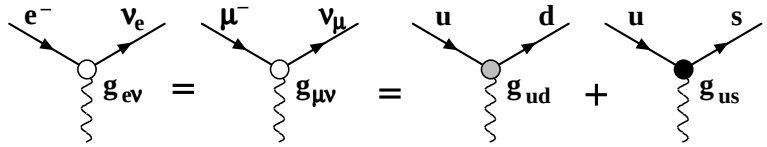


Figure 3.27: Accoppiamento debole dei leptoni (e^-, ν_e), (μ^-, ν_μ) e dei quark (u, d), (u, s)

Quindi i quark sono anche autostati dell'interazione debole se considerati come un doppietto composto dal quark *up* con carica elettrica $+2/3$ e da un nuovo quark *down* combinazione lineare dei quark con carica $-1/3$: $d' = d\cos\theta_c + s\sin\theta_c$. Questo corrisponde ad una rotazione che conserva il modulo: l'intensità dell'accoppiamento dei quark con il campo debole è la stessa dei leptoni. (Il significato dell'altro stato "ruotato", $-d\sin\theta_c + s\cos\theta_c$, sarà chiarito più avanti). L'angolo di rotazione è chiamato *angolo di Cabibbo* e il suo valore è determinato dalla misure delle larghezze di decadimento degli adroni

$$\sin\theta_c = 0.220 \pm 0.002$$

Gli autostati dell'interazione debole si possono rappresentare con tre doppietti

$$\textit{leptoni} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \qquad \textit{quark} \quad \begin{pmatrix} u \\ d\cos\theta_c + s\sin\theta_c \end{pmatrix}$$

3.3.7 Decadimenti non leptonici

Le particelle strane decadono per interazione debole anche in stati che contengono solo adroni, e a questo devono il loro nome. Nelle transizioni $s \leftrightarrow u$, $\bar{s} \leftrightarrow \bar{u}$, cambia l'isospin, la stranezza e la carica elettrica dei quark e questo si riflette nelle relazioni

$$|\Delta I| = 1/2 \qquad\qquad \Delta S = \Delta Q$$

già osservate per i decadimenti semileptonici. La costante di accoppiamento è $G\sin\theta_c$.

L'interazione debole non conserva l'isospin, ma produce uno stato con isospin $\vec{I} = \vec{I_i} + \Delta\vec{I}$. L'interazione adronica conserva l'isospin e quindi gli adroni nello stato finale hanno isospin $|I, I_3\rangle$ e si formano con probabilità relative definite dai coefficienti di Clebsch-Gordan.

Esempio: decadimento $\Lambda^0 \to p\pi^-$, $\Lambda^0 \to n\pi^0$

La transizione con $\Delta S = 1$ è $\Lambda^0 = uds \to uduW^- \to udu\bar{u}d$, questo è uno stato pione-nucleone. Il barione Λ^0 ha isospin $I_\Lambda = 0$ e decade in uno stato con isospin $I = 1/2$. Lo stato pione-nucleone ha numero barionico $A = +1$, carica $Q = 0$ e terza componente dell'isospin $I_3 = Q - Y/2 = -1/2$; ci sono due combinazioni: $p(uud)\pi^-(\bar{u}d)$ e $n(udd)\pi^0(\bar{u}u)$

$$|1/2, -1/2\rangle = \sqrt{1/3}\ |\pi^0 n\rangle - \sqrt{2/3}\ |\pi^- p\rangle$$

La larghezza di decadimento è proporzionale alla costante di accoppiamento debole, al quadrato dell'elemento di matrice tra lo stato $|1/2, -1/2\rangle$ e lo stato adronico, e al fattore dello spazio delle fasi. Questo, per un decadimento in due particelle, è proporzionale all'impulso nel centro di massa (appendice 4.21)

$$\begin{aligned}\Gamma(\Lambda^0 \to p\pi^-) &= costante \ \times \ G^2 sin^2\theta_c \ |\langle p\pi^-|1/2,-1/2\rangle|^2 \ p_{p\pi^-} \\ \Gamma(\Lambda^0 \to n\pi^0) &= costante \ \times \ G^2 sin^2\theta_c \ |\langle n\pi^0|1/2,-1/2\rangle|^2 \ p_{n\pi^0}\end{aligned}$$

Per cui si ha $\Gamma(\Lambda^0 \to n\pi^0)/\Gamma(\Lambda^0 \to p\pi^-) = p_{n\pi^0}/2p_{p\pi^-} \simeq 1/2$. I valori sperimentali delle frazioni di decadimento sono $BR(\Lambda^0 \to n\pi^0) = 0.358$, $BR(\Lambda^0 \to p\pi^-) = 0.639$.

Esempio: decadimento $K^0 \to \pi^+\pi^-$, $K^0 \to \pi^0\pi^0$

Allo stesso modo si ottiene un buon accordo con i valori sperimentali delle frazioni di decadimento $K^0 \to \pi\pi$. Il mesone K ha isospin $I = 1/2$: lo stato $\pi\pi$ ha $I = 0$ oppure $I = 1$ con terza componente $I_3 = Q - Y/2 = 0$. Ma lo stato di due pioni con momento angolare totale $J = 0$, simmetrico per lo scambio delle coordinate, deve essere anche simmetrico nello spazio dell'isospin; quindi $I_{\pi\pi} = pari = 0$. Lo stato $|0,0\rangle$ ha pesi uguali per i tre stati $\pi\pi$

$$|0,0\rangle = \frac{\pi^+\pi^- - \pi^0\pi^0 + \pi^-\pi^+}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Gamma(K^0 \to \pi^0\pi^0)}{\Gamma(K^0 \to \pi^+\pi^-)} = \frac{p_{oo}}{2p_{+-}} \simeq \frac{1}{2}$$

I valori sperimentali delle frazioni di decadimento sono: $BR(K^0 \to \pi^0\pi^0) = 0.314$, $BR(K^0 \to \pi^+\pi^-) = 0.686$.

Esempio: decadimento dei barioni Σ

Le larghezze del decadimento adronico dei barioni Σ sono approssimativamente uguali: $\Gamma(\Sigma^+ \to p\pi^0) \simeq \Gamma(\Sigma^+ \to n\pi^+) \simeq \Gamma(\Sigma^- \to n\pi^-)$. Il barione Σ^+ ha vita media $\tau^+ = 0.80 \ 10^{-10} \ s$ e frazioni di decadimento $BR(\Sigma^+ \to p\pi^0) = 0.516$, $BR(\Sigma^+ \to n\pi^+) = 0.483$. Il barione Σ^- ha un solo modo di decadimento e quindi vita media pari a circa il doppio, $\tau^- = 1.48 \ 10^{-10} \ s$.

3.3.8 Decadimenti dei mesoni K neutri

I mesoni K^0, $\overline{K^0}$, sono prodotti in interazioni adroniche che conservano la stranezza, ad esempio

$$\pi^- p \to K^0\Lambda^0 \qquad\qquad \pi^+ p \to \overline{K^0}K^+ p$$

quindi sono distinguibili: è possibile conoscere se si è prodotto un K^0 oppure un $\overline{K^0}$ osservando le particelle associate. Inoltre, una volta prodotti, è possibile distinguerli perché nelle interazioni con bersagli di nuclei producono particelle con stranezza opposta e con sezioni d'urto diverse, $\sigma(K^0N) < \sigma(\overline{K^0}N)$ perché nel secondo caso esistono più stati finali

$$\begin{array}{llllll} K^0p \to K^0p & K^+n & \overline{K^0}p \to \overline{K^0}p & \pi^+\Lambda^0 & \pi^+\Sigma^0 & \pi^0\Sigma^+ \quad \ldots \\ K^0n \to K^0n & & \overline{K^0}n \to \overline{K^0}n & K^-p & \pi^0\Lambda^0 & \pi^0\Sigma^0 \quad \pi^-\Sigma^+ \quad \ldots \end{array}$$

I mesoni K neutri decadono per interazione debole e seguono le stesse leggi osservate per i decadimenti degli altri mesoni e dei barioni. Possono decadere in stati $\pi\pi$ oppure in stati $\pi\pi\pi$

$$\begin{matrix}\overline{K^0}\\ K^0\end{matrix} \quad \rightarrow \quad \pi^+\pi^- \quad \pi^0\pi^0 \qquad\qquad \begin{matrix}\overline{K^0}\\ K^0\end{matrix} \quad \rightarrow \quad \pi^+\pi^0\pi^- \quad \pi^0\pi^0\pi^0$$

e in effetti si osservano tutti questi decadimenti, ma i decadimenti nello stato $\pi\pi$ avvengono con vita media (τ_{Short}) molto più breve di quella (τ_{Long}) dei decadimenti nello stato $\pi\pi\pi$

$$K^0\ (\overline{K^0}) \rightarrow \pi\pi \quad \tau_S = 0.89\ 10^{-10}\ s \qquad\qquad K^0\ (\overline{K^0}) \rightarrow \pi\pi\pi \quad \tau_L = 5.2\ 10^{-8}\ s$$

Ma questo non è possibile se a decadere è la stessa particella. In effetti K^0 e $\overline{K^0}$ non sono autostati della simmetria CP e quindi non possono decadere per interazione debole che conserva CP. Invece gli stati finali $\pi\pi$ e $\pi\pi\pi$ sono autostati di CP con autovalori diversi. I pioni sono prodotti in uno stato di momento angolare totale $J = 0$

- per lo stato $\pi\pi$, la coniugazione di carica corrisponde all'inversione delle coordinate, quindi $CP|\pi\pi\rangle = +|\pi\pi\rangle$;
- per lo stato $\pi\pi\pi$, se $\vec{\ell}$ è il momento angolare del terzo pione nel riferimento dei primi due, $CP|\pi\pi\pi\rangle = P_\pi(-1)^\ell|\pi\pi\pi\rangle$; l'energia a disposizione, $m_K - 3m_\pi \simeq 90\ MeV$, è troppo piccola perché sia $\ell \neq 0$; quindi $CP|\pi\pi\pi\rangle = -|\pi\pi\pi\rangle$.

Non sono quindi i mesoni K^0, $\overline{K^0}$, autostati dell'interazione adronica, a decadere per interazione debole. Gell-Mann e Pais osservarono che è possibile formare due combinazioni lineari dei mesoni K neutri che sono autostati della simmetria CP, cioè dell'interazione debole, e che questi corrispondono alle particelle che decadono nei due diversi stati di CP. I mesoni K hanno parità negativa e $C|K^0\rangle = \alpha|\overline{K^0}\rangle$, $C|\overline{K^0}\rangle = \alpha|K^0\rangle$ (con $|\alpha|^2 = 1$, usualmente si sceglie $\alpha = -1$). Con questa convenzione

$$CP|K^0\rangle = +|\overline{K^0}\rangle \qquad\qquad CP|\overline{K^0}\rangle = +|K^0\rangle$$

Le due combinazioni simmetrica e antisimmetrica

$$|K_1\rangle = \left(|K^0\rangle + |\overline{K^0}\rangle\right)/\sqrt{2} \qquad\qquad |K_2\rangle = \left(|K^0\rangle - |\overline{K^0}\rangle\right)/\sqrt{2}$$

sono autostati di CP con autovalori ± 1

$$CP|K_1\rangle = \left(|\overline{K^0}\rangle + |K^0\rangle\right)/\sqrt{2} = +|K_1\rangle \qquad CP|K_2\rangle = \left(|\overline{K^0}\rangle - |K^0\rangle\right)/\sqrt{2} = -|K_2\rangle$$

Si ottengono quindi due stati distinti, combinazioni degli autostati dei quark, che possono avere masse diverse e decadere in stati finali diversi

$$\begin{matrix} K_1 & (|d\bar{s}\rangle + |s\bar{d}\rangle)/\sqrt{2} & CP = +1 & \rightarrow & \pi\pi \\ K_2 & (|d\bar{s}\rangle - |s\bar{d}\rangle)/\sqrt{2} & CP = -1 & \rightarrow & \pi\pi\pi \end{matrix}$$

Il fattore dello spazio delle fasi del decadimento $K_1 \to \pi\pi$ è molto maggiore di quello del decadimento $K_2 \to \pi\pi\pi$ e questo giustifica le due vite medie molto diverse. Le particelle osservate sono chiamate K_S (*Short*) e K_L (*Long*), i modi di decadimento più probabili e le frazioni di decadimento sono

K_S	$\to$	$\pi^+\pi^-$	0.686	$\tau_S = 0.894\ 10^{-10}\ s$
		$\pi^0\pi^0$	0.314	
K_L	$\to$	$\pi^+\pi^0\pi^-$	0.126	$\tau_L = 5.17\ 10^{-8}\ s$
		$\pi^0\pi^0\pi^0$	0.211	
		$\pi^\pm e^\mp \nu_e$	0.388	
		$\pi^\pm \mu^\mp \nu_\mu$	0.272	

A seguito dell'ipotesi di Gell-Mann e Pais fu fatta una serie di esperimenti, i primi da Pais e Piccioni, che verificarono la correttezza dell'interpretazione di queste nuove stranezze dei mesoni strani.

Nelle interazioni adroniche si possono produrre fasci secondari di mesoni K neutri e studiarne i decadimenti in volo. Consideriamo la produzione associata di particelle strane $\pi^- p \to K^0\Lambda^0$, l'osservazione del decadimento del Λ^0 garantisce che si forma un fascio di mesoni K^0. Questo è una sovrapposizione dei due austati di CP: $K^0 = (K_1 + K_2)/\sqrt{2}$. Immediatamente a valle del bersaglio si osservano i decadimenti $K_1 \to \pi^+\pi^-$ che hanno un cammino libero medio $\lambda_S \approx c\tau_S = 2.7\ cm$. A distanza $L \gg \lambda_S$ dal bersaglio la componente $K_1/\sqrt{2}$ del fascio si è esaurita e si osservano solo i decadimenti $K_2 \to \pi^+\pi^0\pi^-$ con cammino libero medio molto maggiore $\lambda_L \approx c\tau_L = 15.5\ m$ (Fig.3.28). Ora il fascio, inizialmente composto di soli mesoni K^0, è composto solo di stati K_2 e quindi contiene un numero uguale di mesoni K^0 e di mesoni $\overline{K^0}$: lo stato è

$$\frac{K^0 - \overline{K^0}}{2}$$

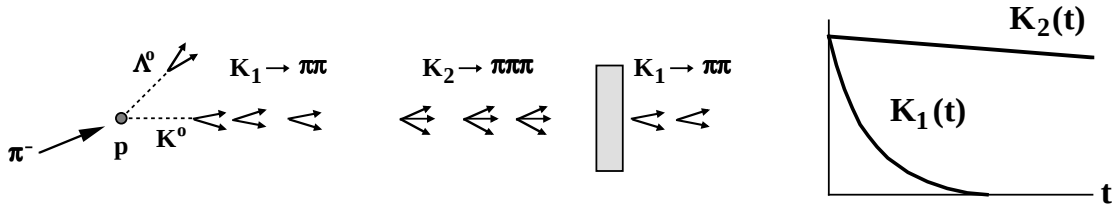


Figure 3.28: Decadimento e rigenerazione di un fascio di mesoni K^0

Questo si può verificare ponendo un assorbitore a distanza $L \gg \lambda_S$ dal bersaglio. Infatti la sezione d'urto di interazione delle due componenti è diversa, $\sigma(\overline{K^0}N) > \sigma(K^0N)$, e la componente $\overline{K^0}$ è assorbita più dell'altra. Se f e $\bar{f}$ sono i fattori di attenuazione per K^0 e per $\overline{K^0}$, lo stato dopo l'assorbitore è

$$\frac{f\ K^0 - \bar{f}\ \overline{K^0}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(\frac{f+\bar{f}}{2}\ K_2 + \frac{f-\bar{f}}{2}\ K_1\right)$$

e poiché $f > \bar{f}$ si *rigenera* lo stato K_1: subito a valle dell'assorbitore si osservano di nuovo i decadimenti $K_1 \to \pi^+\pi^-$.

Analogamente si può produrre un fascio di mesoni $\overline{K^0}$, ad esempio in interazioni $\pi^+ p \to \overline{K^0} K^+ p$ (se si osserva il decadimento del mesone K^+ si è prodotto un $\overline{K^0}$). Studiando l'evoluzione temporale di un fascio di mesoni K^0, oppure $\overline{K^0}$, si può verificare che le particelle K_1 e K_2 hanno effettivamente masse diverse e misurarne la differenza. Se m_j e Γ_j sono le masse e le larghezze di decadimento ($\Gamma_1 \gg \Gamma_2$) l'evoluzione temporale nel riferimento della particella è ($\hbar = 1$, $c = 1$)

$$K_1(t) = K_1(0)\ e^{-i(m_1 - i\Gamma_1/2)t} \qquad\qquad K_2(t) = K_2(0)\ e^{-i(m_2 - i\Gamma_2/2)t}$$

Per un fascio di K^0, oppure $\overline{K^0}$, si ha

$$K^0(t) = \left[K_1(0)\ e^{-im_1 t} e^{-\Gamma_1 t/2} + K_2(0)\ e^{-im_2 t} e^{-\Gamma_2 t/2}\right]/\sqrt{2}$$

$$\overline{K^0}(t) = \left[K_1(0)\ e^{-im_1 t} e^{-\Gamma_1 t/2} - K_2(0)\ e^{-im_2 t} e^{-\Gamma_2 t/2}\right]/\sqrt{2}$$

Se si produce un fascio di N mesoni K^0 si ha la condizione iniziale $|K^0(0)|^2 = N$, $|\overline{K^0}(0)|^2 = 0$, cioè $K_1(0) = K_2(0) = \sqrt{N/2}$ e l'intensità del fascio per $t \ll \tau_L$ è

$$|K^0(t)|^2 \simeq N\left(1 + e^{-\Gamma_1 t} + 2\ e^{-\Gamma_1 t/2}\ \cos\Delta m\ t\right)/4$$

$$|\overline{K^0}(t)|^2 \simeq N\left(1 + e^{-\Gamma_1 t} - 2\ e^{-\Gamma_1 t/2}\ \cos\Delta m\ t\right)/4$$

con $\Delta m = m_2 - m_1$. La composizione del fascio si può determinare misurando le interazioni prodotte dai mesoni K^0 e $\overline{K^0}$ in un secondo bersaglio posto a distanza variabile x dal bersaglio primario: se si conosce l'impulso p, il tempo proprio è $t = mx/p$ (Fig.3.29). Il risultato della misura è

$$\Delta m = 0.47\ \hbar/\tau_S \qquad\qquad \Delta m = 3.5\ 10^{-6}\ eV$$

la differenza di massa tra i due stati K_1 e K_2 è nota con una precisione relativa $\Delta m/m \simeq 10^{-14}$!

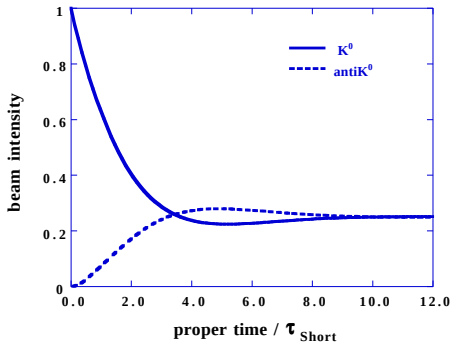


Figure 3.29: Intensità di un fascio di mesoni K^0 in funzione del tempo proprio

3.3.9 Il quarto quark

I mesoni K^0 e $\overline{K^0}$ sono stati coniugati di carica e hanno la stessa massa. Ma le combinazioni K_1 e K_2 rappresentano due particelle diverse con massa diversa. Il valore della differenza $\Delta m = m_2 - m_1$ si può calcolare nel modello a quark

$$m_1 = \frac{\langle K^0 + \overline{K^0}|H_w|K^0 + \overline{K^0}\rangle}{2} \qquad m_2 = \frac{\langle K^0 - \overline{K^0}|H_w|K^0 - \overline{K^0}\rangle}{2}$$

Δm è proporzianle all'elemento di matrice della transizione $K^0 \leftrightarrow \overline{K^0}$ con $\Delta S = 2$

$$\Delta m = \langle K^0|H_w|\overline{K^0}\rangle + \langle \overline{K^0}|H_w|K^0\rangle = 2\ \langle d\bar{s}|H_w|\bar{d}s\rangle$$

Si tratta di una transizione del *secondo ordine*. Il calcolo di questo elemento di matrice, considerando il solo contributo dei quark u, d, s (Fig.3.30), dà un valore molto più grande del risultato sperimentale: deve esistere un qualche nuovo fenomeno che impedisce le transizioni in cui cambia il sapore dei quark ma non cambia la carica elettrica. Questo è stato messo in luce da Glashow, Iliopoulos e Maiani nel 1970 che proposero l'esistenza di un quarto quark.

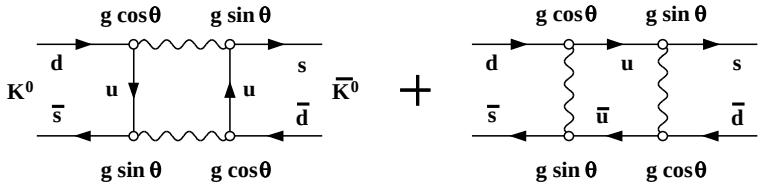


Figure 3.30: Grafici di Feynman della transizione $K^0 \leftrightarrow \overline{K^0}$

In effetti gli autostati dell'interazione debole sono i due doppietti di leptoni e un solo doppietto di quark, (u, d'), costruito con un quark di carica elettrica $+2/3$ e due quark di carica $-1/3$. Il risultato corretto per il calcolo di Δm si può ottenere se si fa l'ipotesi che esista un quarto quark di tipo *up* che fu chiamato *charm* e indicato con c. Il nuovo quark ha queste caratteristiche:

- carica elettrica $+2/3$, isospin $I = 0$, stranezza $S = 0$ e numero barionico $A = 1/3$;
- ha un nuovo numero quantico C che, in analogia con la stranezza, si conserva nell'interazione adronica e elettromagnetica e non si conserva nell'interazione debole; l'ipercarica è $Y = A + S + C$ e la relazione di Gell-Mann e Nishijima è modificata
$$Q = (A + S + C)/2 + I_3$$
- è autostato dell'interazione debole e forma un secondo doppietto di quark con il secondo stato "ruotato" della teoria di Cabibbo $s' = -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c$; quindi l'accoppiamento con il campo debole è

$$\begin{pmatrix} c \\ -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c \end{pmatrix} \qquad c \leftrightarrow s \quad G\cos\theta_c \qquad c \leftrightarrow d \quad -G\sin\theta_c$$

Con queste ipotesi, si hanno due doppietti di leptoni e due doppietti di quark

$$leptoni \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \qquad quark \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}$$

I quark *down* autostati dell'interazione debole sono d' e s' e sono ottenuti con una rotazione dei quark *down* autostati di $SU(3)$

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

Nel calcolo dell'elemento di matrice rappresentato dal grafico di Fig.3.31 ci sono più contributi, lo scambio del quark u e lo scambio del quark c, che hanno segno opposto e che dipendono dal valore della massa dei quark. Introducendo il quark c, la differenza di massa è

$$\Delta m = \frac{G^2}{4\pi} \cos^2\theta_c \sin^2\theta_c \; f_K^2 \; m_K \; m_c^2$$

Si ottiene un buon accordo con il valore sperimentale di Δm se si assume per la massa del nuovo quark $m_c \approx 1.5 \; GeV$.

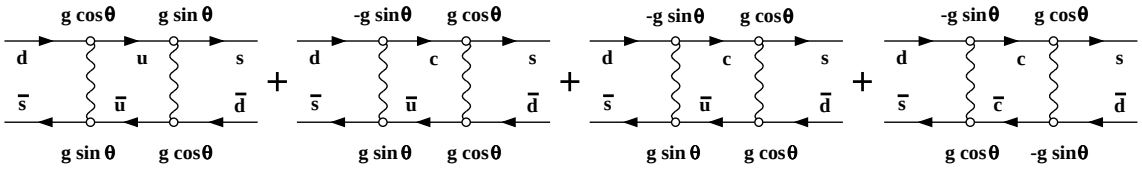


Figure 3.31: Grafici di Feynman della transizione $K^0 \leftrightarrow \overline{K^0}$ con il contributo dei quark u e c

I numeri quantici di questo nuovo quark sono rappresentati in Fig.3.32

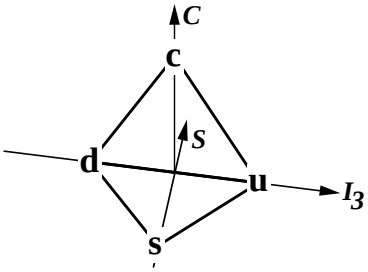


Figure 3.32: Rappresentazione dei quattro quark

	A	I_3	S	C	Q
u	$1/3$	$+1/2$	0	0	$+2/3$
d	$1/3$	$-1/2$	0	0	$-1/3$
c	$1/3$	0	0	$+1$	$+2/3$
s	$1/3$	0	-1	0	$-2/3$

Se l'interpretazione di Glashow, Iliopoulos e Maiani è corretta, la simmetria del modello a quark va estesa da $SU(3)$ a $SU(4)$ e devono esistere nuove particelle che contengono il quark c: devono esistere 4×4 stati di mesoni pseudoscalari, di cui nove sono già noti, che formano un 15-pletto e un singoletto, e altrettanti mesoni vettori; 20 barioni di spin 1/2, di cui otto già noti, *etc.* Ad esempio, la rappresentazione dei mesoni è mostrata in Fig.3.33. La prima particella con *charm* è stata scoperta

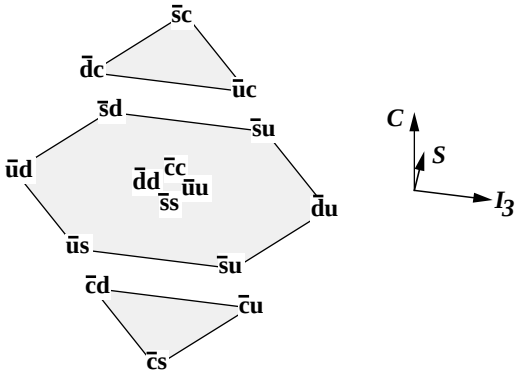


Figure 3.33: Rappresentazione degli stati dei mesoni nella simmetria $SU(4)$

nel 1974 da Burton Richter e Samuel Ting [8] e collaboratori, si tratta di un mesone vettore $J^P = 1^-$ che è rappresentato come lo stato $\bar{c}c$ ed è chiamato J/ψ (due nomi diversi furono assegnati da Ting e da Richter). Il mesone J/ψ ha massa $m_\psi = 3097\ MeV$. Pochi anni più tardi sono stati osservati i mesoni pseudoscalari, $J^P = 0^-$, che decadono per interazione debole prevalentemente in mesoni K perché la costante di accoppiamento per transizioni $c \to s$ è proporzionale a $G \cos\theta_c$, i loro stati eccitati $J^P = 1^-$, e i barioni $J^P = 1/2^+$. Alcuni esempi sono

		stato	$m\ (MeV)$	$\tau\ (s)$
mesoni	D^+	$\bar{d}c$	1869	$1.05\ 10^{-12}$
	D^0	$\bar{u}c$	1865	$0.41\ 10^{-12}$
	D_s^+	$\bar{s}c$	1969	$0.50\ 10^{-12}$
barioni	Λ_c^+	udc	2289	$0.21\ 10^{-12}$

Il terzo leptone

I mesoni con *charm* furono scoperti nel 1976 come prodotti della annichilazione elettrone-positrone $e^+e^- \to D^+D^-$, $e^+e^- \to D^0\overline{D^0}$. Questi possono decadere in modo semileptonico

$$\begin{aligned}
D^+ = &\quad \bar{d}c \to \bar{d}sW^+ \to \overline{K^0}e^+\nu_e \qquad \overline{K^0}\mu^+\nu_\mu \\
D^- = &\quad d\bar{c} \to d\bar{s}W^- \to K^0e^-\bar{\nu}_e \qquad K^0\mu^-\bar{\nu}_\mu \\
D^0 = &\quad \bar{u}c \to \bar{u}sW^+ \to K^-e^+\nu_e \qquad K^-\mu^+\nu_\mu \\
\overline{D^0} = &\quad u\bar{c} \to u\bar{s}W^- \to K^+e^-\bar{\nu}_e \qquad K^0\mu^-\bar{\nu}_\mu
\end{aligned}$$

[8] premi Nobel per la fisica nel 1976

Analizzando la produzione associata di coppie di leptoni e^+e^-, $\mu^+\mu^-$, $e^+\mu^-$, μ^+e^-, si osservò che queste venivano prodotte anche in assenza di mesoni K. Questo fenomeno venne interpretato da Martin Perl [9] con la produzione di un nuovo leptone, chiamato leptone τ, che ha massa simile a quella dei mesoni D. Il leptone τ ha massa $m_\tau = 1777\ MeV$ e ha le stesse caratteristiche del leptone μ: può decadere in un elettrone o in un muone

$$\tau^- \to \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e \qquad\qquad \tau^- \to \nu_\tau \mu^- \bar{\nu}_\mu$$

Se l'accoppiamento con il campo debole è universale, le due probabilità di decadimento sono approssimativamente uguali perché $m_\tau \gg m_\mu$, $m_\tau \gg m_e$. I risultati delle misure sono

$$BR(\tau \to \nu_\tau e \bar{\nu}_e) \approx BR(\tau \to \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu) = 0.17$$

La larghezza di decadimento si ricava allo stesso modo che per il muone

$$\Gamma(\tau \to \nu_\tau e \bar{\nu}_e) \approx \Gamma(\tau \to \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu) = \frac{G^2 (m_\tau c^2)^5}{192\pi^3} = \frac{\hbar}{\tau}\, BR$$

e la vita media è $\tau_\tau = 0.29\ 10^{-12}\ s$ in ottimo accordo con i risultati delle misure.

Il neutrino ν_τ associato al nuovo leptone è una particella diversa dagli altri due neutrini ν_e e ν_μ. Questo è stato dimostrato producendo un fascio di neutrini ν_τ e osservando le interazioni che producono. Nelle interazioni di protoni di alta energia vengono prodotti mesoni π, K, e con probabilità molto più piccola anche mesoni D. I mesoni π e K hanno cammini di decadimento di alcuni metri e, se lo spessore e la densità del bersaglio sono grandi, vengono assorbiti prima di decadere, i mesoni D invece decadono prima di essere assorbiti perché $c\tau \simeq 0.3\ mm \ll \lambda_{ass}$. Gli adroni prodotti nei decadimenti sono anch'essi assorbiti e i neutrini prodotti nei decadimenti semileptonici $D \to \overline{K} e \nu_e$, $D \to \overline{K} \mu \nu_\mu$, e leptonici $D^+ \to \tau^+ \nu_\tau$, $D^- \to \tau^- \bar{\nu}_\tau$, si propagano attroverso il bersaglio-assorbitore senza interagire. I neutrini ν_τ hanno energia maggiore dei neutrini ν_e e ν_μ. A valle dell'assorbitore si osservano le interazioni che producono leptoni τ nello stato finale: $\nu_\tau N \to \tau^- X$, $\bar{\nu}_\tau N \to \tau^+ X$.

Tutte le caratteristiche del leptone τ sono in accordo con l'ipotesi della conservazione del nuovo numero leptonico e dell'universalità dell'accoppiamento con il campo debole, quindi il quadro dei fermioni sorgenti delle interazioni fondamentali ora diventa

$$\textit{leptoni} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \qquad \textit{quark} \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}$$

3.3.10 Violazione della simmetria CP

L'interazione debole non conserva né la parità né la coniugazione di carica. Nella teoria di Lee e Yang (capitolo ???) questo è originato dalla forma della corrente

[9] premio Nobel per la fisica nel 1995

fermionica costruita come sovrapposizione di una corrente vettoriale e di una corrente assiale, $J^+ = V^+ - A^+$, e della corrente hermitiana coniugata, $J^- = V^- - A^-$. Tutte le interazioni finora esaminate sono descritte in modo molto accurato trascurando l'effetto del propagatore del campo debole, cioè assumendo un'interazione a contatto tra le correnti nella forma

$$J^+J^- = (V^+ - A^+)(V^- - A^-) = V^+V^- - V^+A^- - A^+V^- - A^+A^-$$

In questa espressione la corrente vettoriale cambia segno per trasformazione di parità e quella assiale per trasformazione di coniugazione di carica e quindi i termini V^+A^- e A^+V^- non sono invarianti né per C né per P, ma lo sono per la trasformazione combinata CP. La fenomenologia delle oscillazioni e dei decadimenti dei mesoni K neutri è ben interpretata con l'ipotesi di Gell-Mann e Pais dei due autostati K_1 e K_2 della trasformazione CP. Questo induce a identificare i mesoni K neutri che decadono con vita media τ_S e τ_L con gli autostati di CP

$$K_S = K_1 \quad CP = +1 \qquad\qquad K_L = K_2 \quad CP = -1$$

Ma nel 1964 Cronin, Fitch [10] e collaboratori osservarono una ulteriore stranezza dei mesoni K neutri: i mesoni a vita media lunga, K_L, decadono anche in stati $\pi\pi$ se pur con probabilità piccola

$$BR(K_L \to \pi^+\pi^-) = 2.03\ 10^{-3} \qquad\qquad BR(K_L \to \pi^0\pi^0) = 0.91\ 10^{-3}$$

se la stessa particella decade in stati $\pi\pi\pi$ con $CP = -1$ e in stati $\pi\pi$ con $CP = +1$: anche la simmetria CP è violata nell'interazione debole. Studiando i decadimenti $K_S \to \pi\pi$ e $K_L \to \pi\pi$ in funzione del tempo proprio sono stati misurati i rapporti e gli sfasamenti tra le ampiezze di decadimento

$$\frac{\langle \pi^+\pi^-|H_w|K_L\rangle}{\langle \pi^+\pi^-|H_w|K_S\rangle} = \eta_{+-}\ e^{i\phi_{+-}} \qquad\qquad \frac{\langle \pi^0\pi^0|H_w|K_L\rangle}{\langle \pi^0\pi^0|H_w|K_S\rangle} = \eta_{00}\ e^{i\phi_{00}}$$

I risultati sono: $\eta_{+-} \simeq \eta_{00} = 2.26\ 10^{-3}$, $\phi_{+-} \simeq \phi_{00} \simeq \pi/4$.

Quindi le particelle che decadono, K_S e K_L, non si possono identificare con gli autostati di CP ma si possono rappresentare come combinazioni lineari

$$K_S = \frac{K_1 + \epsilon K_2}{[1 + |\epsilon|^2]^{1/2}} \qquad\qquad K_L = \frac{\epsilon K_1 + K_2}{[1 + |\epsilon|^2]^{1/2}} \qquad\qquad |\epsilon| \ll 1$$

ovvero, in termini degli autostati dell'interazione adronica

$$K_S = \frac{(1+\epsilon)d\bar{s} + (1-\epsilon)\bar{d}s}{[2(1 + |\epsilon|^2)]^{1/2}} \qquad\qquad K_L = \frac{(1+\epsilon)d\bar{s} - (1-\epsilon)\bar{d}s}{[2(1 + |\epsilon|^2)]^{1/2}}$$

La correttezza di questa interpretazione si può verificare studiando i decadimenti semileptonici dei mesoni K_S e K_L. Ad esempio, questi ultimi possono decadere

[10] premi Nobel per la fisica nel 1980

$K_L \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$ e nello stato coniugato di carica $K_L \to \pi^- e^+ \nu_e$. Se non ci fosse violazione della simmetria CP le due probabilità sarebbero uguali. Si osserva invece una differenza

$$\frac{\Gamma(K_L \to \pi^- e^+ \nu_e) - \Gamma(K_L \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(K_L \to \pi^- e^+ \nu_e) + \Gamma(K_L \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)} = \frac{|1+\epsilon|^2 - |1+\epsilon|^2}{|1+\epsilon|^2 + |1+\epsilon|^2} = \frac{2\Re\epsilon}{1+|\epsilon|^2} \simeq 2\Re\epsilon$$

Il risultato della misura è $2\Re\epsilon = 3.3\ 10^{-3}$ in buon accordo con i valori delle ampiezze $\eta e^{i\phi}$. La stessa differenza si misura nei decadimenti $K_L \to \pi^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu$, $K_L \to \pi^- \mu^+ \nu_\mu$.

Questo è uno dei pochissimi esempi in cui si osserva una asimmetria tra materia e antimateria. Nel decadimento semileptonico dei mesoni K_L l'elettrone è emesso con probabilità più piccola del positrone. La definizione $e^- = materia$, $e^+ = antimateria$ è fatta inizialmente per convenzione. Una volta fatta, ne segue $protone = materia$, $idrogeno = p^+e^- = materia$ e così via, e analogamente per antiprotone, anti-idrogeno, ... Nel decadimento $n \to pe^-\bar{\nu}_e$ [$\bar{n} \to \bar{p}e^+\nu_e$] si emettono antineutrini [neutrini] autostati di elicità positiva [negativa]: i due stati finali non sono simmetrici né per P né per C. Ma la violazione delle simmetrie C e P non è sufficiente a rompere la simmetria della convenzione materia/antimateria. Ad esempio un anti-osservatore in un anti-mondo potrebbe fare le convenzioni sulla carica elettrica $\pm$, sulla parità $destra - sinistra$ in modo diverso. Osserverebbe lo stesso fenomeno del decadimento del nucleo di anti-cobalto $^{60}\overline{Co}$ polarizzato con un anti-magnete in cui un anti-elettrone è emesso preferenzialmente nella direzione dello spin del $^{60}\overline{Co}$, e ne concluderebbe che non c'è simmetria per parità e che, se riuscisse a fare lo stesso esperimento con nuclei ^{60}Co, non c'è neppure simmetria per coniugazione di carica. Ma, osservando i decadimenti semileptonici dei mesoni K_L capirebbe se la convenzione è la stessa oppure se è opposta a quella che si usa nel nostro mondo di materia.

Una delle ipotesi alla base del modello del Big Bang è che all'inizio dell'evoluzione dell'Universo ci fosse simmetria tra materia e antimateria. Ma non si osserva antimateria nell'Universo. La violazione della simmetria CP è una condizione necessaria (ma non sufficiente) per spiegare l'evoluzione di un Universo inizialmente simmetrico in quello asimmetrico che si osserva oggi in cui non c'è antimateria.

3.3.11 Altri quark

La teoria dell'interazione debole con due doppietti di quark non è in grado di produrre la violazione della simmetria CP. La corrente fermionica associata alle transizioni da quark *down* con carica $-1/3$ a quark *up* con carica $+2/3$ è

$$J_\alpha = (\bar{u}\ \bar{c})\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5) \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

La matrice di Cabibbo è unitaria e dipende da un solo parametro reale. Per produrre la violazione della simmetria CP occorre che J_α contenga un parametro complesso (appendice ???).

Nel 1973 Kobayashi e Maskawa osservarono che questo si può realizzare introducendo un nuovo doppietto di quark. Il nuovo doppietto contiene un quark di tipo *up*, chiamato *top*, e un quark di tipo *down*, chiamato *bottom* o *beauty*. In questo caso la matrice che trasforma gli autostati dell'interazione adronica è una matrice 3×3 e, per rispettare l'universalità dell'accoppiamento al campo debole, la matrice deve essere unitaria. Una matrice unitaria 3×3 dipende da quattro parametri indipendenti di cui tre sono reali, tre angoli di Eulero di rotazione dei doppietti di quark, e il quarto è complesso.

Con queste ipotesi la corrente fermionica dei quark è

$$J_\alpha = (\bar{u}\ \bar{c}\ \bar{t})\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

Introducendo gli angoli di rotazione dei doppietti ($\theta_1 = 2 \to 1$, $\theta_3 = 1 \to 3$, $\theta_2 = 3 \to 2$; $c_k = \cos\theta_k$, $s_k = \sin\theta_k$) e un parametro complesso $e^{i\delta}$, la matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa si rappresenta con il prodotto di tre rotazioni

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 e^{i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_3 e^{-i\delta} & 0 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 c_3 & s_1 c_3 & s_3 e^{i\delta} \\ -s_1 c_2 - c_1 s_2 s_3 e^{-i\delta} & c_1 c_2 - s_1 s_2 s_3 e^{-i\delta} & s_2 c_3 \\ s_1 s_2 - c_1 c_2 s_3 e^{-i\delta} & -c_1 s_2 - s_1 c_2 s_3 e^{-i\delta} & c_2 c_3 \end{pmatrix}$$

Poiché la matrice 2×2 di Cabibbo fornisce una buona approssimazione dei decadimenti relativi ai primi due doppietti di quark, si ha $c_1 c_3 \simeq c_1 c_2 \simeq \cos\theta_c$, $s_1 c_3 \simeq s_1 c_2 \simeq \sin\theta_c$: risulta che anche i termini $\sin\theta_2$ e $\sin\theta_3$ sono piccoli. La matrice CKM è approssimativamente simmetrica con i termini diagonali ≈ 1.

$$V_{CKM} = \approx \begin{pmatrix} c_1 c_2 & s_1 c_2 & s_3 e^{i\delta} \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 & s_2 c_2 \\ -c_1 c_2 s_3 e^{-i\delta} & -c_1 s_2 & c_2 c_3 \end{pmatrix}$$

La prima particella con *beauty* è stata scoperta nel 1977. Si tratta, come nel caso del *charm*, di un mesone vettore ($J^P = 1^-$) $\bar{b}b$ chiamato Υ che ha massa $m_\Upsilon = 9460\ MeV$. Successivamente sono stati osservati i mesoni pseudoscalari ($J^P = 0^-$) e i barioni ($J^P = 1/2^+$) previsti dalla estensione alla simmetria $SU(5)$ del modello a quark. Alcuni esempi sono

		stato	$m\ (MeV)$	$\tau\ (s)$
mesoni	B^+ , B^-	$\bar{b}u$, $\bar{u}b$	5279	$1.65\ 10^{-12}$
	B^0 , $\overline{B^0}$	$\bar{b}d$, $\bar{d}b$	5279	$1.55\ 10^{-12}$
	B_s^0 , $\overline{B_s^0}$	$\bar{b}s$, $\bar{s}b$	5370	$1.49\ 10^{-12}$
barioni	Λ_b^0	udb	5624	$1.23\ 10^{-12}$

Le particelle con *beauty* decadono prevalentemente in particelle con *charm* con larghezza di decadimento $\Gamma(b \to c)$ proporzionale a $G^2|V_{cb}|^2$; dalle misure si ottiene $|V_{cb}| \simeq 0.04$. I decadimenti senza particelle con *charm* nello stato finale hanno larghezza di decadimento $\Gamma(b \to u)$ proporzionale a $G^2|V_{ub}|^2$ e dalle misure si ottiene $|V_{ub}| \simeq 0.004$.

Il quark *top* ha una massa molto grande ed è stato osservato solo di recente, nel 1996. Poiché la massa è maggiore di quella del bosone mediatore dell'interazione debole (capitolo ???) il quark t decade nel quark b e in un bosone W: $t \to bW^+$, $\bar{t} \to \bar{b}W^-$, con $|V_{tb}| \simeq 1$. Non si conoscono stati legati formati con il quark t.

Il quadro delle interazioni deboli dei leptoni e degli adroni si può riassumere:

- leptoni e quark sono fermioni di spin 1/2 e sono suddivisi in *famiglie* ciascuna formata da un fermione di tipo *up* e uno di tipo *down*;
- la fenomenologia dei decadimenti deboli dei leptoni è decritta con tre famiglie di leptoni; i neutrini hanno massa nulla (i limiti sperimentali sono: $n_{\nu_e} \leq 2\ eV$, $n_{\nu_\mu} \leq 0.2\ MeV$, $n_{\nu_\tau} \leq 18\ MeV$);
- l'accoppiamento delle correnti J_ℓ^+ e J_ℓ^- (che producono le transizioni $\ell^- \to \nu$ e $\nu \to \ell^-$) con il campo debole è definito da un solo paramtero, la costante universale di Fermi, G;
- il numero leptonico si conserva separatamente per ciascuna famiglia: non si osservano transizioni tra le famiglie perché i neutrini hanno massa nulla;
- i decadimenti deboli degli adroni sono descritti con tre famiglie di quark che sono combinazioni lineari degli autostati dell'interazione adronica; queste si ottengono con una matrice unitaria 3×3;
- l'accoppiamento delle correnti J_q^+ e J_q^- (che producono le transizioni *down* $\to$ *up* e *up* $\to$ *down*) con il campo debole è definito dalla stessa costante universale di Fermi e dai quattro parametri della matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa.

Il quadro delle particelle elementari è diventato

$$\textit{leptoni} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \qquad \textit{quark} \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}$$

3.4 Modello dinamico a quark

Gli adroni *non* sono particelle elementari, ma sono caratterizzati da una estensione nello spazio di circa 1 fm e, se hanno spin, da un momento magnetico anomalo. I leptoni invece si comportano come fermioni di spin 1/2 puntiformi. Il modello a quark degli adroni identifica i barioni e i mesoni con combinazioni di quark e antiquark, fermioni di spin 1/2 caratterizzati dal sapore e da carica elettrica frazionaria.

Questa interpretazione è confermata dalla fenomenologia dei decadimenti elettromagnetici e deboli degli adroni. Il passo successivo è di verificare se i quark sono particelle prive di struttura e se si può impostare un modello dell'interazione adronica basato sulla dinamica dei quark costituenti.

Per studiare le proprietà *statiche* degli adroni, ad esempio per misurare la densità di carica elettrica e di magnetizzazione, si utilizzano collisioni *elastiche* con particelle elementari cariche. In una collisione elastica il potere risolutivo è definito dall'impulso trasferito $\Delta\vec{p}$: si può esplorare una regione spaziale di dimensione $\mathcal{R} \simeq \hbar/\Delta p$. In questo caso l'adrone rimane uno stato legato dei suoi eventuali costituenti e l'energia trasferita è solo energia cinetica. Se invece si vuole studiare la struttura dinamica di un adrone e eventualmente frammentarlo nei suoi costituenti occorre studiare le collisioni inelatiche in cui si trasferisce sia impulso $\Delta\vec{p}$ che energia ΔE.

La struttura dinamica del protone e del neutrone si può studiare sia mediante l'interazione elettromagnetica con fasci di elettroni o muoni di alta energia, sia mediante l'interazione debole utilizzando fasci di neutrini. I bersagli possono essere costituiti da Idrogeno, Deuterio o nuclei più pesanti. Le reazioni sono

$$e^- N \to e^- X \qquad \mu^\pm N \to \mu^\pm X \qquad \nu_\mu N \to \mu^- X \qquad \bar{\nu}_\mu N \to \mu^+ X$$

in cui X rappresenta qualunque stato adronico accessibile. Consideriamo un nucleone in quiete nel laboratorio e un elettrone di energia $E \gg m_e$. I 4-impulsi sono

$$P = (\vec{p}, E) \qquad P' = (\vec{p'}, E') \qquad P_o = (0, M) \qquad W = (\vec{p'}_o, E'_o)$$

Il 4-impulso trasferito è $q = (\vec{p} - \vec{p'}, E - E') = (\vec{q}, \nu)$. L'energia totale nel centro di massa, il quadrato del 4-impulso trasferito e l'energia trasferita sono invarianti, trascurando la massa dell'elettrone

$$s = (P + P_o)^2 = M^2 + 2ME \qquad q^2 = (P - P')^2 = -2EE'(1 - \cos\theta) \qquad P_o \cdot q = M\nu$$

Nel seguito usiamo $Q^2 = -q^2 > 0$.

Diffusione elastica

Nel caso di diffusione elastica (Fig.3.34) l'energia E' e l'angolo θ non sono indipendenti, ma sono legati dalla relazione

$$E' = \frac{E}{1 + (E/M)(1 - \cos\theta)} = \frac{E}{1 + Q^2/2ME'} \qquad\qquad E = E' + \frac{Q^2}{2M}$$

per cui si ha $\nu = E - E' = Q^2/2M$: $Q^2 = 2M\nu$. Se il nucleone fosse un fermione di spin $1/2$ *puntiforme* la diffusione elettrone-nucleone per interazione elettromagnetica sarebbe descritta dalla sezione d'urto di Dirac (capitolo ???)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2(\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4\theta/2} \; \frac{E'}{E} \left(cos^2\theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2} \; 2\sin^2\theta/2 \right)$$

che si può scrivere (nel seguito $\hbar = 1$, $c = 1$)

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4\theta/2}\left(cos^2\theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2}\ 2\sin^2\theta/2\right)\delta(\nu - Q^2/2M)$$

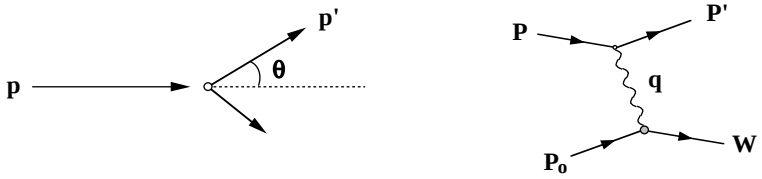


Figure 3.34: Scattering elastico rappresentato nel riferimento del laboratorio e come grafico di Feynman

nota : $\int F(x)\ \delta[f(x)]\ dx = \Sigma_k\ \left[F(x_k)/|\frac{df}{dx}|\right]_{f(x_k)=0}$

$$\delta(\nu - Q^2/2M) = \delta(E - E' - (2EE'/M)\sin^2\theta/2)$$

$$|\frac{d}{dE'}(E - E' - (2EE'/M)\sin^2\theta/2)| = |-1 - (2E/M)\sin^2\theta/2| = E/E'$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int F(E,E')\ \delta(E - E' - (2EE'/M)\sin^2\theta/2)\ dE' = F(E,E')\ \frac{E'}{E}$$

Per un bersaglio *non puntiforme* la collisione è descritta dalla sezione d'urto di Rosenbluth (capitolo ???) introducendo due fattori di forma che moltiplicano l'ampiezza di diffusione in cui il nucleone non cambia ($\sim \cos\theta/2$) oppure cambia ($\sim \sin\theta/2$) direzione dello spin.

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4\theta/2}\left(F_2^2(Q^2)\ cos^2\theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2}\ F_1^2(Q^2)\ 2\sin^2\theta/2\right)\delta(\nu - Q^2/2M)$$

I fattori di forma hanno l'andamento $F(Q^2) \to 0$ per $Q^2 \gg M^2$.

3.4.1 Diffusione inelastica

Nel caso di diffusione inelastica (Fig.3.35), il bersaglio frammenta in uno stato di massa $W > M$ e l'energia e l'angolo dell'elettrone nello stato finale sono variabili indipendenti. La massa del sistema X è

$$W^2 = (P_o + q)^2 = M^2 + q^2 + 2M\nu = M^2 - Q^2 + 2M\nu > M^2 \quad \Rightarrow \quad 2M\nu > Q^2$$

Il 4-impulso e l'energia trasferita sono variabili indipendenti e si possono definire diverse regioni nel piano $Q^2 \times 2M\nu$ (Fig.3.36)

- limite di diffusione elastica $W^2 \to M^2$, $2M\nu \to Q^2$;

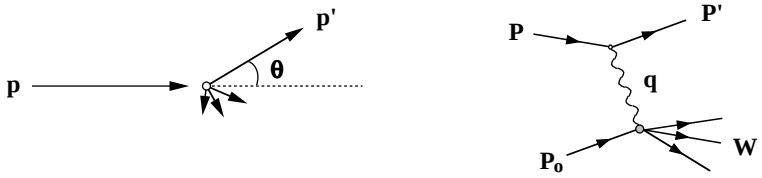


Figure 3.35: Scattering inelastico rappresentato nel riferimento del laboratorio e come grafico di Feynman

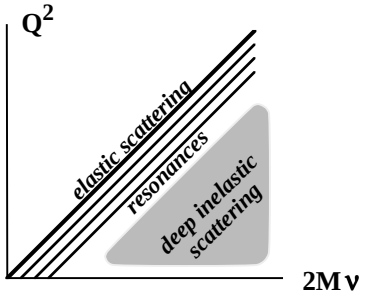


Figure 3.36: Regioni del piano $Q^2 \times 2M\nu$

- eccitazione di stati risonanti del nucleone con massa M^*: $W^2 = M^{*2},\ 2M\nu = Q^2 + costante$;
- continuo della diffusione inelastica: $0 < Q^2/2M\nu < 1$.

La sezione d'urto si può esprimere introducendo due *funzioni di struttura* che ora sono funzioni delle due variabili indipendenti Q^2 e ν

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4\theta/2}\left(W_2(Q^2,\nu)\ cos^2\theta/2 + W_1(Q^2,\nu)\ 2\sin^2\theta/2\right)$$

In funzione degli invarianti Q^2 e ν:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi}{EE'}\ \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\ \frac{E'}{E}\left(W_2(Q^2,\nu)\ cos^2\theta/2 + W_1(Q^2,\nu)\ 2\sin^2\theta/2\right)$$

<u>nota</u> : $d^2\sigma/dQ^2 d\nu = |Jacobiano| \times d^2\sigma/d\Omega dE'$

$$dQ^2 d\nu = \begin{vmatrix} \partial Q^2/\partial E' & \partial Q^2/\partial\Omega \\ \partial\nu/\partial E' & \partial\nu/\partial\Omega \end{vmatrix} d\Omega dE' = \begin{vmatrix} Q^2/E' & -EE'/\pi \\ -1 & 0 \end{vmatrix} d\Omega dE' = \frac{EE'}{\pi}\ d\Omega dE'$$

$$\frac{\partial}{\partial E'} 2EE'(1-\cos\theta) = \frac{Q^2}{E'} \qquad \frac{\partial}{\partial\cos\theta} 2EE'(1-\cos\theta) = -2EE' \qquad \frac{\partial}{\partial E'}(E-E') = -1$$

3.4.2 Diffusione fortemente inelastica elettrone-nucleone

La regione di diffusione *fortemente inelastica* è definita dalla condizione $Q^2 \gg M^2$, $\nu \gg M$. Se il nucleone è costituito di particelle puntiformi l'interazione fortemente inelastica con una particella elementare (elettrone, muone o neutrino) sarà il risultato della diffusione *elastica* con i costituenti e, se questi hanno massa m e se l'energia trasferita ν è molto maggiore dell'energia di legame dei costituenti, sarà la somma incoerente dei vari contributi

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu}\right)_{elastic} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\frac{E'}{E}\left(\cos^2\theta/2 + \frac{Q^2}{4m^2}\,2\sin^2\theta/2\right)\delta(\nu - Q^2/2m)$$

$$W_2(Q^2,\nu) \to \frac{1}{\nu}\,\delta(1 - Q^2/2m\nu) \qquad\qquad W_1(Q^2,\nu) \to \frac{Q^2}{4m^2\nu}\,\delta(1 - Q^2/2m\nu)$$

Nel 1967 Bjorken dimostrò che nella regione fortemente inelastica

$$Q^2 \gg M^2 \qquad \nu \gg M \qquad x = Q^2/2M\nu = finito \qquad 0 < x < 1$$

le funzioni di struttura hanno, per $Q^2 \to \infty$ e $\nu \to \infty$, limiti finiti che *non* dipendono separatamente da Q^2 e ν, ma *solo* dal rapporto adimensionale $x = Q^2/2M\nu$

$$\lim_{Q^2,\nu\to\infty} \nu W_2(Q^2,\nu) = F_2(x) \qquad \lim_{Q^2,\nu\to\infty} M W_1(Q^2,\nu) = F_1(x)$$

Questo vuol dire che le funzioni che descrivono la struttura del nucleone non dipendono da variabili che hanno dimensioni fisiche, cioè non dipendono, come nel caso della diffusione elastica, dal 4-impulso trasferito Q^2 e dalle dimensioni del nucleone. Questa proprietà è chiamata *legge di scala di Bjorken.*

Un'importante serie di esperimenti fu fatta a partire dal 1968 da Friedman, Kendall e Taylor [11] con elettroni accelerati fino a 20 GeV usando bersagli di idrogeno e deuterio. In questi esperimenti si misura l'energia E' e l'angolo θ dell'elettrone nello stato finale: da questi valori si determinano le variabili Q^2, ν e W. La Fig.3.37 mostra la sezione d'urto differenziale $d^2\sigma/d\Omega dE'$ in funzione dell'energia dello stato adronico W: si nota l'eccitazione di risonanze barioniche (la prima è la risonanza Δ di massa 1.23 GeV) e una distibuzione continua per valori $W > M^*$. La figura non mostra il picco della diffusione elastica, centrato a $W = M$. Questo diminuisce rapidamente all'aumentare di Q^2 per effetto del fattore di forma $F(Q^2)$. Con l'aumentare del 4-impulso trasferito, la sezione d'urto diminuisce, ma diventa sempre più importante il contributo del continuo inelastico rispetto alla diffusione elastica e all'eccitazione di risonanze.

Il confronto tra la sezione d'urto inelatica e quella elastica è mostrato nella Fig.3.38 in funzione del 4-impulso trasferito. Il contributo della sezione d'urto inelastica diventa molto maggiore di quella elastica già per valori di Q^2 poco più grandi dei valori corrispondenti all'eccitazione di risonanze e, per valori fissi di $W^2 = M^2 + 2M\nu - Q^2$, si mantiene approssimativamente costante: non dipende da Q^2.

[11] premi Nobel per la fisica nel 1990

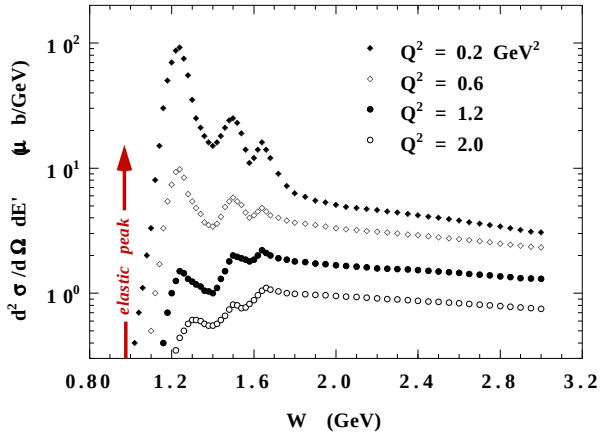


Figure 3.37: Sezione d'urto differenziale in funzione dell'energia dello stato adronico W

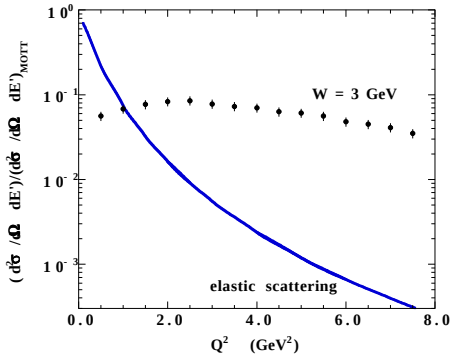


Figure 3.38: Rapporto tra la sezione d'urto elastica e inelastica e la sezione d'urto di Mott (bersaglio puntiforme) in funzione del 4-impulso trasferito

La prima importante conclusione è che la legge di scala di Bjorken è soddisfatta nella regione del continuo inelastico dove non è più importante l'eccitazione di risonanze barioniche: i risultati degli esperimenti confermano l'ipotesi che il protone e il neutrone sono costituiti da particelle puntiformi.

3.4.3 Modello a partoni

Per interpretare il significato della variabile x di Bjorken e delle funzioni $F_2(x)$, $F_1(x)$, conviene esprimere la sezione d'urto in funzione di x ($|\partial x/\partial \nu| = \nu/x$)

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 dx} = \frac{\nu}{x}\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\frac{E'}{E}\frac{1}{x}\left(\nu W_2(Q^2,\nu)\cos^2\theta/2 + \nu W_1(Q^2,\nu) 2\sin^2\theta/2\right) =$$

$$= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\frac{E'}{E}\frac{1}{x}\left(F_2(x)\cos^2\theta/2 + \frac{\nu F_1(x)}{M} 2\sin^2\theta/2\right) =$$

$$= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\frac{E'}{E}\frac{1}{x}\left(F_2(x)\cos^2\theta/2 + 2xF_1(x)\frac{Q^2}{4M^2x^2} 2\sin^2\theta/2\right)$$

Se i costituenti del nucleone sono fermioni di spin 1/2 le due funzioni di struttura di Bjorken non sono indipendenti. Infatti confrontando la forma della sezione d'urto con quella della interazione elastica (di Mott per spin 0 o di Dirac spin 1/2) da particelle di massa $m = Mx$, si conclude che

- per costituenti di spin 0 si ha $F_1(x) = 0$;
- per costituenti di spin 1/2 si ha $F_2(x) = 2xF_1(x)$.

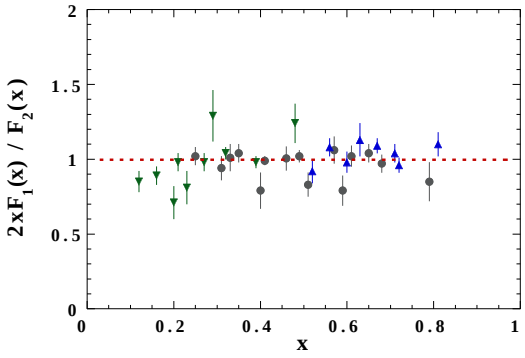


Figure 3.39: Rapporto $2xF_1(x)/F_2(x)$ in funzione della variabile x per diversi valori di Q^2

La Fig.3.39 mostra il valore di $2xF_1(x)/F_2(x)$ misurato per diversi valori di Q^2 e ν: il rapporto è chiaramente diverso da zero e si mantiene costante e circa uguale a 1. Quindi i risultati degli esperimenti sulla diffusione fortemente inelastica di elettroni su protoni e neutroni mostrano che questi

- sono costituiti di particelle puntiformi;
- i costituenti hanno spin 1/2.

La forma della sezione d'urto

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\frac{E'}{E}\,\frac{F_2(x)}{x}\left(\cos^2\theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2x^2}2\sin^2\theta/2\right)$$

ha una suggestiva interpretazione nel *modello a partoni* introdotto da Feynman nel 1969 considerando la collisione inelastica in un riferimento in cui l'adrone bersaglio ha impulso elevato ($|\vec{p}_o| \gg M$) in modo da poter trascurare la massa e l'impulso trasverso dei costituenti:

- l'adrone è costituito da particelle puntiformi cariche chiamati *partoni*;
- il 4-impulso dell'adrone, P_o, è distribuito tra i partoni;
- l'interazione inelastica con 4-impulso trasferito Q e energia trasferita ν è il risultato dell'interazione elastica con un partone che ha 4-impulso xP_o;

- la funzione di struttura $F_2(x)/x$ rappresenta la funzione di distribuzione dei partoni nel nucleone.

La funzione $F_2(x)$ misurata nella diffusione fortemente inelastica elettrone-protone è mostrata in Fig.3.40

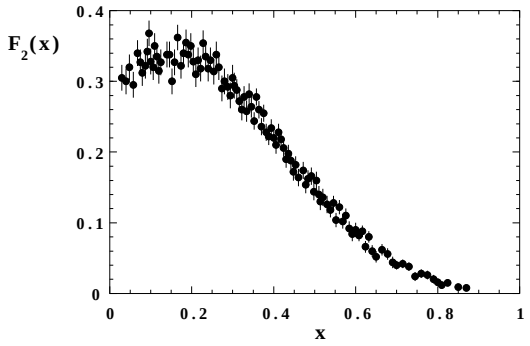


Figure 3.40: Funzione di struttura del protone, $F_2^{ep}(x)$, in funzione della variabile x

Un'interazione inelastica con 4-impulso trasferito Q e energia trasferita ν molto maggiore dell'energia di legame dei partoni nell'adrone bersaglio è rappresentata in Fig.3.41: l'interazione avviene tra l'elettrone e un partone con 4-impulso xP_o, il quadrato dell'energia totale elettrone-partone è $\hat{s} = (P + xP_o)^2 = 2EMx + x^2M^2 \simeq 2EMx$ (per $E \gg M$), il 4-impulso Q è scambiato tra l'elettrone e il partone che dopo l'interazione ha 4-impulso

$$(q + xP_o)^2 = -Q^2 + 2M\nu x + x^2M^2 = (xM)^2 = m^2 \ll W^2$$

e l'adrone frammenta in uno stato finale di massa W formato dal partone interessato e dagli altri partoni che hanno 4-impulso $(1-x)P_o$. La Fig.3.41 mostra la diffusione

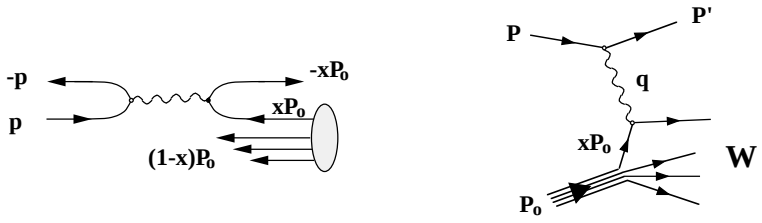


Figure 3.41: Diffusione inelastica nel riferimento di Breit e grafico di Feynman nel modello a partoni

fortemente inelastica nel *riferimento di Breit* in cui l'energia trasferita tra l'elettrone e il partone è nulla, $q = (2\vec{p}, 0)$, e entrambi invertono l'impulso.

Il modello a partoni ha una semplice interpretazione se si considera la collisione nel riferimento del centro di massa elettrone-nucleone. Trascurando i valori delle masse, si ha $s = (P + P_o)^2 = 4(p^*c)^2$, $q^2 = (P - P')^2 = -2(p^*c)^2(1 - \cos\theta^*)$. Per

un bersaglio *puntiforme* la sezione d'urto è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|\langle f|H|i\rangle|^2\,\frac{(p^*c)^2}{8\pi^3(\hbar c)^3}\frac{1}{2c} \qquad\qquad \langle f|H|i\rangle = \frac{4\pi\alpha(\hbar c)^3}{Q^2}\,F(\theta^*)$$

dove $F(\theta^*)$ è la distribuzione angolare della diffusione elastica. Ci sono due casi

- elettrone e nucleone hanno spin opposti ($\Rightarrow \Leftarrow$; $\Leftarrow \Rightarrow$), il momento angolare totale è $J = 0$ e la distribuzione angolare è isotropa: $F(\theta^*) = 1$;
- elettrone e nucleone hanno spin paralleli ($\Rightarrow \Rightarrow$; $\Leftarrow \Leftarrow$) il momento angolare totale è $J = 1$ e la distribuzione angolare è descritta dalle autofunzioni di rotazione di spin 1 (appendice 4.10)

$$F(\theta^*) = \frac{1+\cos\theta^*}{2}$$

Le due ampiezze non interferiscono per cui la sezione d'urto è ($\hbar = c = 1$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{\alpha^2}{2Q^4}\,s\left[1+\left(\frac{1+\cos\theta^*}{2}\right)^2\right]$$

Nel riferimento del laboratorio, dopo la collisione l'elettrone ha energia

$$E' = \beta\gamma p^*\cos\theta^* + \gamma E^* = \frac{p}{2E^*}\,p^*\cos\theta^* + \frac{E+M}{2E^*}\,E^* \simeq E\,\frac{1+\cos\theta^*}{2}$$

da cui si ottiene $\nu = E - E' = E(1-\cos\theta^*)/2$. La variabile adimensionale *inelasticità*, $y = \nu/E = (1-\cos\theta^*)/2$, è quindi direttamente connessa con l'angolo di diffusione nel centro di massa e la sezione d'urto differenziale si può esprimere in funzione di y ($|\partial\Omega^*/\partial y| = 4\pi$)

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4}\,s\left[1+(1-y)^2\right] \qquad\qquad 1-y = \frac{1+\cos\theta^*}{2}$$

Per interpretare la diffusione inelastica elettrone-nucleone nel modello a partoni conviene esprimere la sezione d'urto differenziale in funzione delle due variabili adimensionali x, y

$$Q^2 = 4EE'\sin^2\theta/2 = 2MExy \qquad E' = E(1-y) \qquad \sin^2\theta/2 = \frac{Mxy}{2E(1-y)}$$

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = 2MEx\frac{d^2\sigma}{dQ^2d\nu} =$$

$$= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\,2MEx(1-y)\,\frac{F_2(x)}{x}\left[1-\frac{Mxy}{2E(1-y)}+\frac{Q^2}{4M^2x^2}\frac{Mxy}{E(1-y)}\right] =$$

$$= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\,2MEx\,\frac{F_2(x)}{x}\left[1-y-\frac{Mxy}{2E}+\frac{y^2}{2}\right]$$

che, per $E \gg M$, $s \simeq 2ME$, diventa

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4}\ sx\ \frac{F_2(x)}{x}\left[1+(1-y)^2\right]$$

in cui è chiaramente espressa la dipendenza della sezione d'urto differenziale della diffusione fortemente inelastica elettrone-adrone dai vari termini:

- (costante di accoppiamento $\times$ propagatore)^2;
- (energia totale del sistema elettrone-partone)$^2 = sx$;
- densità dei partoni nell'adrone $F_2(x)/x$;
- distribuzione angolare nel riferimento elettrone-partone.

3.4.4 Carica elettrica dei partoni

Il nucleone è costituito di partoni puntiformi di spin 1/2. I quark hanno carica elettrica frazionaria, $e_u = 2/3, e_d = e_s = -1/3, \ldots$ (in unità della carica elementare). Il passo successivo è verificare se si possono identificare i partoni con i quark. La sezione d'urto di interazione elettromagnetica è proporzionale al quadrato delle cariche elettriche interagenti per cui, se si indica con $f_k(x)$ la densità dei quark di sapore k, la funzione di struttura $F_2(x)$ si può esprimere

$$F_2(x) = \sum_k e_k^2\ x\ f_k(x)$$

In un'interazione fortemente inelastica si possono formare anche coppie quark-antiquark dello stesso sapore e l'interazione elettromagnetica ha lo stesso accoppiamento per quark e per antiquark per cui conviene definire

- *quark di valenza* quelli che definiscono i numeri quantici dell'adrone, ad esempio $p = |uud\rangle$ con carica $+1$, $n = |udd\rangle$ con carica 0, ...;
- *quark del mare* (*sea-quark*) quelli costituiti dalle possibili coppie quark-antiquark prodotte nell'interazione, ad esempio coppie $s\bar{s}$.

Nelle interazioni elettrone-protone e elettrone-neutrone si misurano le funzioni di struttura

$$F_2^{ep}(x) = x\left[\frac{4}{9}u_p(x) + \frac{1}{9}d_p(x) + \ldots\right] \qquad F_2^{en}(x) = x\left[\frac{4}{9}u_n(x) + \frac{1}{9}d_n(x) + \ldots\right]$$

dove $u_p(x)$ e $d_p(x)$ sono le densità di quark u e d del protone, $u_n(x)$ e $d_n(x)$ quelle del neutrone. Le possibili coppie quark-antiquark del mare, $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$ hanno approssimativamente la stessa densità e si può trascurare il contributo dei quark con massa più elevata

$$\frac{4}{9}u(x) + \frac{4}{9}\bar{u}(x) + \frac{1}{9}d(x) + \frac{1}{9}\bar{d}(x) + \frac{1}{9}s(x) + \frac{1}{9}\bar{s}(x) + \ldots \approx \frac{12}{9}s(x)$$

La simmetria dell'isospin dell'interazione adronica permette di ipotizzare che la densità di quark di valenza u del protone sia uguale alla densità di quark di valenza d del neutrone

$$u_p(x) = d_n(x) = u_v(x) \qquad\qquad d_p(x) = u_n(x) = d_v(x)$$

Con queste ipotesi le funzioni di struttura del nucleone sono

$$F_2^{ep}(x) = x\left[\frac{4}{9}u_v(x) + \frac{1}{9}d_v(x) + \frac{12}{9}s(x)\right] \qquad F_2^{en}(x) = x\left[\frac{1}{9}u_v(x) + \frac{4}{9}d_v(x) + \frac{12}{9}s(x)\right]$$

Il rapporto tra le funzioni di struttura è mostrato nella Fig.3.42: si osserva che per $x \to 0$ il rapporto è $F_2^{en}(x)/F_2^{ep}(x) \simeq 1$: la densità di quark di valenza e del mare è simile per piccoli valori dell'impulso dei partoni; mentre per $x \to 1$ il rapporto $F_2^{en}(x)/F_2^{ep}(x) \simeq 1/4$ indica che è importante solo il contributo dei quark $u_v(x)$. Questa non è una evidenza diretta che i partoni hanno la carica frazionaria prevista nel modello a quark, ma indica il modello è consistente con questa ipotesi.

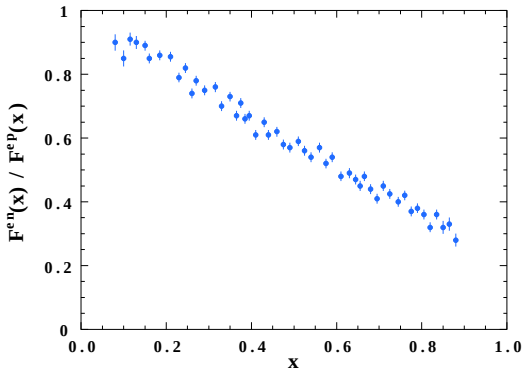


Figure 3.42: Rapporto tra le funzioni di struttura di neutrone e protone, $F_2^{en}(x)/F_2^{ep}(x)$, in funzione della variabile x

In un bersaglio con ugual numero di protoni e neutroni, ad esempio deuterio, l'interazione avviene con uguale probabilità con i quark u e d e si ottiene una funzione di struttura mediata sul contenuto di quark di valenza

$$F_2^{eN}(x) = \frac{F_2^{ep}(x) + F_2^{en}(x)}{2} = x\left[\frac{5}{18}u_v(x) + \frac{5}{18}d_v(x) + \ldots\right] \simeq \frac{5}{18}\, x\,[q(x) + \bar{q}(x)]$$

dove $q(x)$ e $\bar{q}(x)$ indicano le densità di quark e antiquark. Il fattore $5/18$ rappresenta il valor medio del quadrato delle cariche dei quark di valenza che contribuiscono alla diffusione fortemente inelastica elettrone-deuterio.

L'integrale della funzione $x[q(x) + \bar{q}(x)]$ su tutti i valori della variabile x rappresenta il contributo di *tutti* i quark e gli anti-quark all'interazione e dovrebbe essere pari a 1. Il valore sperimentale è invece

$$\int_0^1 x\,[q(x) + \bar{q}(x)]\,dx \simeq \frac{18}{5}\int_0^1 F_2^{eN}(x)dx \simeq 0.5$$

Questo valore si ottiene da misure della diffusione fortemente inelastica di elettroni e di muoni (che possono raggiungere energie più elevate) su diversi bersagli con ugual numero di protoni e neutroni (Deuterio, Carbonio, ...) ed è approssimativamente indipendente dai valori di Q^2 e ν. Un'ipotesi per spiegare questo risultato è che non tutti i partoni del nucleone si accoppiano con il campo elettromagnetico. Questa ipotesi si basa su una seconda ipotesi, che i partoni si possano identificare con i quark con carica frazionaria. La verifica di questa si ottiene studiando l'interazione fortemente inelastica neutrino-nucleone: infatti in questo caso l'interazione non dipende dalla carica elettrica dei quark.

3.4.5 Diffusione fortemente inelastica neutrino-nucleone

Nel capitolo ??? è mostrato come si realizzano intensi fasci di neutrini ν_μ e antineutrini $\bar{\nu}_\mu$. Le reazioni di diffusione fortemente inelastica su nucleone sono

$$\nu_\mu N \to \mu^- X \qquad\qquad \bar{\nu}_\mu N \to \mu^+ X$$

Si tratta di reazioni che avvengono per interazione debole con sezioni d'urto molto piccole, quindi negli esperimenti occorre avere bersagli molto grandi. Inoltre in un fascio di neutrini si conosce il flusso di neutrini per unità di energia, $d\Phi/dE_\nu$, ma non si conosce l'energia dei singoli neutrini, quindi per conoscere l'energia dei neutrini che interagiscono occorre misurare sia la direzione e l'energia del muone che la direzione e l'energia del sistema adronico X che si forma nella frammentazione del nucleone.

La sezione d'urto differenziale di diffusione elastica dipende da tre funzioni di struttura, $W_k(Q^2, \nu)$ ($\hbar = 1, c = 1$)

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{G^2}{2\pi}\frac{E'}{E}\left(W_2 \cos^2\theta/2 + W_1 2\sin^2\theta/2 \mp \frac{E+E'}{M}\, W_3 \sin^2\theta/2\right) \qquad \begin{matrix} - & \nu \\ + & \bar{\nu} \end{matrix}$$

La differenza con l'interazione elettromagnetica è che l'interazione debole è costruita a partire da una corrente vettoriale e una assiale. Si hanno quindi quattro termini che corrispondono alle ampiezze per cui il nucleone cambia ($\sim \sin\theta/2$) oppure non cambia ($\sim \cos\theta/2$) direzione dello spin. Neutrini e antineutrini sono autostati di elicità con valori opposti e questo origina la differenza di segno nella somma di questi termini.

La dipendenza dall'angolo di emissione del muone, θ, permette di misurare le funzioni W_2 e $2W_1 \mp W_3(E+E')/M$. La misura di interazioni di neutrini e antineutrini permette di determinare le funzioni W_1 e W_3.

La legge di scala di Bjorken prevede che nel limite $Q^2 \gg M^2$, $\nu \gg M$, le funzioni di struttura siano funzioni solo di $x = Q^2/2M\nu$

$$\nu W_2(Q^2, \nu) \to F_2(x) \qquad M W_1(Q^2, \nu) \to F_1(x) \qquad \nu W_3(Q^2, \nu) \to F_3(x)$$

La sezione d'urto differenziale in funzione delle variabili adimensionali x, y è

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{G^2}{2\pi}\, 2ME\left[F_2(x)\left(1 - y - \frac{Mxy}{2E}\right) + 2xF_1(x)\,\frac{y^2}{2} \mp xF_3(x)\left(y - \frac{y^2}{2}\right)\right]$$

Facendo l'ipotesi $2xF_1(x) = F_2(x)$, verificata nel caso di interazione elettromagnetica dei partoni, per $E \gg M$, $s \simeq 2ME$, la sezione d'urto differenziale è

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{G^2}{2\pi}\, s\left[F_2(x)\left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) \mp xF_3(x)\left(y - \frac{y^2}{2}\right)\right] \qquad \begin{matrix} - & \nu \\ + & \bar{\nu} \end{matrix}$$

Come nel caso della diffusione fortemente inelastica di elettroni queste relazioni acquistano un significato più esplicito esaminando l'interazione nel sistema del centro di massa neutrino-partone. In questo riferimento, nell'ipotesi che abbiano massa trascurabile, i quark hanno elicità negativa e gli antiquark elicità positiva. I neutrini e gli antineutrini sono autostati di elicità. Quindi, considerando solo i quark di valenza del nucleone, le possibili interazioni sono (Fig.3.43)

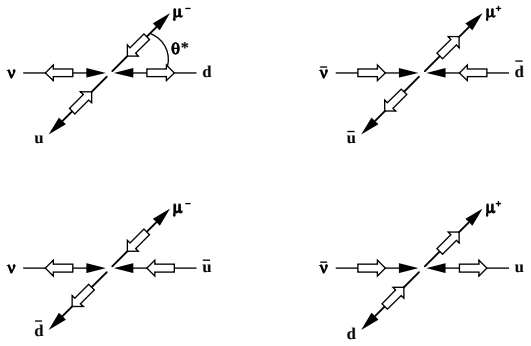


Figure 3.43: Scattering elastico (anti)neutrino-(anti)quark nel riferimento del centro di massa

$$\begin{array}{lll} \nu d \to \mu^- u & \Leftarrow \Rightarrow & J = 0 \\ \nu \bar{u} \to \mu^- \bar{d} & \Leftarrow \Leftarrow & J = 1 \\ \bar{\nu} u \to \mu^+ d & \Rightarrow \Rightarrow & J = 1 \\ \bar{\nu} \bar{d} \to \mu^+ \bar{u} & \Rightarrow \Leftarrow & J = 0 \end{array}$$

La sezione d'urto differenziale è (capitolo ???)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{G_c^2}{4\pi^2}\, s^* \qquad J = 0 \qquad\qquad \frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{G_c^2}{4\pi^2}\, s^* \left(\frac{1 + \cos\theta^*}{2}\right)^2 \qquad J = 1$$

con $G_c^2 = G^2 \cos^2\theta_c$. Espressa in termini dell'inelasticità

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_c^2}{\pi}\, s^* \qquad J = 0 \qquad\qquad \frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_c^2}{\pi}\, s^* (1 - y)^2 \qquad J = 1$$

Introducendo le densità di quark e antiquark, e considerando anche i contributi dei quark del mare, $\nu s \to \mu^- u$, $\bar{\nu} u \to \mu^+ s$, che hanno accoppiamento $\sim G \sin\theta_c$ si ha

$$\nu \qquad \frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{G^2}{\pi}\, \hat{s}\left[q(x) + \bar{q}(x)(1 - y)^2\right] = \frac{G^2}{\pi}\, sx\left[q(x) + \bar{q}(x) - 2\bar{q}(x)(y - y^2/2)\right]$$

$$\bar{\nu} \qquad \frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{G^2}{\pi}\, \hat{s}\left[q(x)(1 - y)^2 + \bar{q}(x)\right] = \frac{G^2}{\pi}\, sx\left[q(x) + \bar{q}(x) - 2q(x)(y - y^2/2)\right]$$

3.4.6 Densità di quark e antiquark

Dalle misure delle funzioni di struttura nella diffusione fortemente inelastica neutrino-nucleone e antineutrino-nucleone si possono determinare separatamente le densità di quark e antiquark del nucleone

$$\frac{d^2\sigma_\nu}{dxdy} + \frac{d^2\sigma_{\bar\nu}}{dxdy} = \frac{G^2}{\pi}\ s\ F_2(x)\left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) \qquad F_2(x) = \frac{F_2^{\nu N}(x) + F_2^{\bar\nu N}(x)}{2}$$

$$\frac{d^2\sigma_\nu}{dxdy} - \frac{d^2\sigma_{\bar\nu}}{dxdy} = -\frac{G^2}{\pi}\ s\ xF_3(x)\left(y - \frac{y^2}{2}\right) \qquad F_3(x) = \frac{F_3^{\nu N}(x) + F_3^{\bar\nu N}(x)}{2}$$

Confrontando queste espressioni con quelle delle sezioni d'urto differenziali con quark e antiquark si ha

$$x\ [q(x) + \bar q(x)] = F_2(x) \qquad x\ [q(x) - \bar q(x)] = -xF_3(x)$$

$$xq(x) = \frac{F_2(x) - xF_3(x)}{2} \qquad x\bar q(x) = \frac{F_2(x) + xF_3(x)}{2}$$

I risultati sperimentali, mostrati in Fig.3.44, portano ad alcuni importanti conclu-

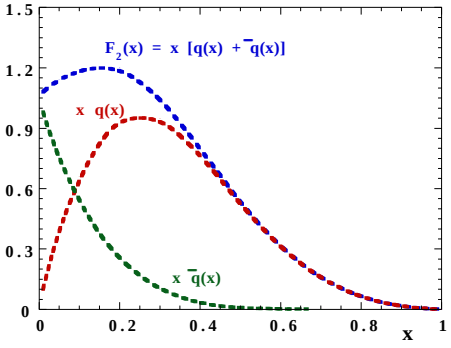


Figure 3.44: Densità di quark e antiquark misurate nella diffusione fortemente inelastica di neutrini e antinuetrini

sioni

- i quark del mare contribuiscono solo per piccoli valori di x;
- la densità dei quark di valenza si estende anche a grandi valori di x;
- come nel caso dell'interazione elettromagnetica, per bersagli che contengono ugual numero di protoni e neutroni, l'integrale sul contributo di tutti i quark e antiquark è $\neq 1$

  $$\int_0^1 F_2^{\nu N}(x)dx = \int_0^1 x[q(x) + \bar q(x)]dx \simeq 0.5$$

  cioè protone e neutrone sono costituiti anche di partoni che non si accoppiano né con il campo elettromagnetico né con il campo debole;

- confrontando i risultati dell'interazione elettrone (muone)-nucleone e neutrino (antineutrino)-nucleone si ottiene

$$F_2^{\nu N}(x) \simeq \frac{18}{5} F_2^{eN}(x)$$

e, poiché l'interazione debole non dipende dalla carica elettrica, questo risultato conferma che il valor medio dei quadrati delle cariche dei partoni è $\langle \Sigma_k e_k^2 \rangle = 5/18$ in accordo con i valori delle cariche frazionarie del modello a quark.

La conferma che gli antiquark hanno un ruolo importante nella struttura dinamica del nucleone si ottiene misurando la sezione d'urto differenziale di neutrini e antineutrini in funzione dell'inelasticità, $d\sigma_\nu/dy$, $d\sigma_{\bar\nu}/dy$, mostrata in Fig.3.45. Nel modello a partoni, queste hanno la forma

$$\frac{d\sigma_\nu}{dy} = \int_0^1 \frac{d^2\sigma}{dxdy}\, dx = \frac{G^2}{2\pi} 2ME \left[\int xq(x)dx + (1-y)^2 \int x\bar{q}(x)dx \right]$$

$$\frac{d\sigma_{\bar\nu}}{dy} = \int_0^1 \frac{d^2\sigma}{dxdy}\, dx = \frac{G^2}{2\pi} 2ME \left[(1-y)^2 \int xq(x)dx + \int x\bar{q}(x)dx \right]$$

per cui si può estrarre dalle misure il contributo globale di quark e antiquark

$$\mathcal{Q} = \int_0^1 xq(x)dx \qquad\qquad \overline{\mathcal{Q}} = \int_0^1 x\bar{q}(x)dx$$

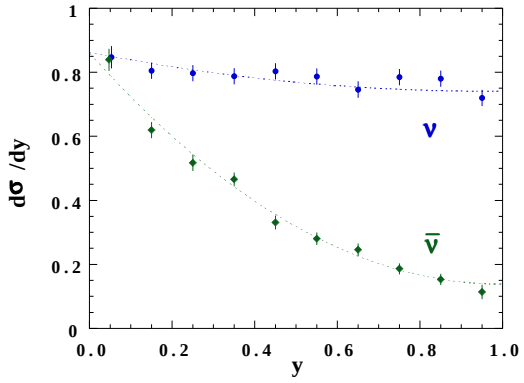


Figure 3.45: Sezione d'urto differenziale di neutrini e di antineutrini in funzione dell'inelasticità

La sezione d'urto totale è mostrata in Fig.3.46 in funzione dell'energia del fascio. Nel modello a partoni questa si ottiene integrando su tutti i valori di inelasticità

$$\sigma(\nu N \to \mu^- X) = \int_o^1 \frac{d\sigma_\nu}{dy}\, dy = \frac{G^2}{2\pi} 2ME \left(\mathcal{Q} + \overline{\mathcal{Q}}/3 \right)$$

$$\sigma(\bar\nu N \to \mu^+ X) = \int_o^1 \frac{d\sigma_{\bar\nu}}{dy}\, dy = \frac{G^2}{2\pi} 2ME \left(\mathcal{Q}/3 + \overline{\mathcal{Q}} \right)$$

$G^2 M/\pi = 1.58\ 10^{-38}\ cm^2/GeV$. I risultati mostrano che

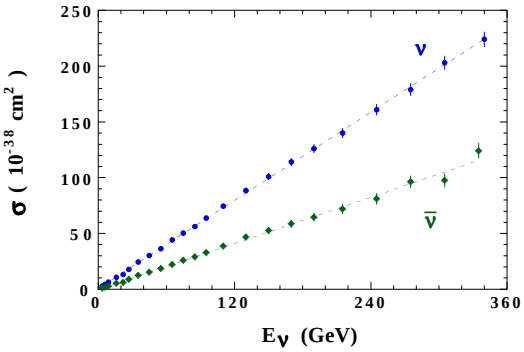


Figure 3.46: Sezione d'urto totale di neutrini e di antinuetrini in funzione dell'energia

- la sezione d'urto di interazione di neutrini e antineutrini cresce linearmente con l'energia

$$\sigma(\nu N \to \mu^- X) = (0.677 \pm 0.014)\ 10^{-38}\ cm^2/GeV \times E\ (GeV)$$

$$\sigma(\bar{\nu} N \to \mu^+ X) = (0.0334 \pm 0.008)\ 10^{-38}\ cm^2/GeV \times E\ (GeV)$$

- il rapporto tra le sezioni d'urto

$$\frac{\sigma_{\bar{\nu}}}{\sigma_\nu} = \frac{1 + 3\overline{\mathcal{Q}}/\mathcal{Q}}{3 + \overline{\mathcal{Q}}/\mathcal{Q}} = 0.49$$

  indica che il rapporto tra il contributo degli antiquark alla struttura del nucleone e quello dei quark è $\overline{\mathcal{Q}}/\mathcal{Q} = 0.20$.

La sezione d'urto è proporzionale all'energia di neutrini e antineutrini, quindi anche alla massima energia dei fasci oggi disponibili ($E \simeq 300\ GeV$) la sezione d'urto non è sensibile all'effetto del propagatore del campo debole. Infatti il propagatore modifica la dipendenza lineare dall'energia, E

$$\sigma \simeq \frac{G^2}{\pi} \frac{2ME}{(1 + Q^2/M_W^2)^2} \qquad\qquad Q^2 = 2MExy$$

e si deduce che la massa del bosone W è molto grande: $M_W^2 \gg 2MExy \simeq 100\ GeV^2$.

In conclusione, lo studio delle interazioni elettromagnetiche e deboli di fermioni puntiformi (elettroni, muoni e neutrini) con nucleoni mostra che

- questi sono costituiti di fermioni puntiformi di spin 1/2;
- l'accoppiamento con il campo elettromagnetico è proporzionale al quadrato della carica frazionaria dei quark;
- l'accoppiamento con il campo debole è proporzionale alla costante universale di Fermi e, per i diversi sapori di quark, ai parametri della matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa;

- l'integrale sulla densità di quark e antiquark, $\int x[q(x) + \bar{q}(x)]dx \simeq 0.5$, indica che solo la metà dei partoni interagisce con il campo elettromagnetico e con il campo debole;
- i nucleoni sono costituiti per metà di partoni che non si accoppiano né con il campo elettromagnetico né con il campo debole;
- questi si possono interpretare come i quanti dell'interazione adronica, i gluoni, che legano i quark e gli antiquark negli adroni.

3.5 Interazioni fermione-antifermione

Le conclusioni sul modello dinamico a quark sono confermate con numerose altre misure fatte con anelli di collisione elettrone-positrone (capitolo ???) per studiare la reazione di annichilazione $e^+e^- \to adroni$ o studiando interazioni adroniche in cui sono prodotte coppie leptone-antileptone nello stato finale, ad esempio $pp \to e^+e^-X$.

3.5.1 Annichilazione e^+e^-

L'idea originale di realizzare anelli di collisione elettrone-positrone è di Bruno Touschek ed è stata sperimentata negli anni '60 presso i Laboratori di Frascati con la costruzione di un piccolo anello di accumulazione chiamato ADA. Da allora sono stati costruiti molti anelli di collisione e^+e^- con energia dei fasci da 200 MeV a 100 GeV che hanno prodotto una grande quantità di informazione sulla annichilazione e^+e^-.

Al primo ordine dello sviluppo in teoria delle perturbazioni l'annichilazione elettrone-positrone è descritta con lo scambio di un fotone di 4-impulso

$$Q^2 = s = (P_+ + P_-)^2 = 2m_e^2 + 2E_+E_- - 2\vec{p}_+ \cdot \vec{p}_- \simeq 4E_+E_-$$

Lo stato finale f prodotto nell'annichilazione $e^+e^- \to f$ ha i numeri quantici del fotone: $J = 1$, $P = -1$, $C = -1$.

Nel riferimento del centro di massa si ha $E_+ = E_-$, $s = 4E^2$. Se elettrone e positrone sono accelerati nello stesso anello, il riferimento del centro di massa coincide con quello del laboratorio.

Annichilazione $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

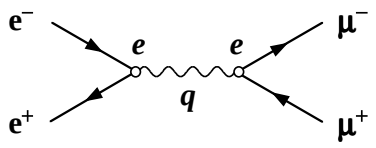


Figure 3.47: Diagramma di Feynman dell'annichilazione $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Il processo *elementare* è l'annichilazione in due fermioni puntiformi $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ (Fig.3.47). Se l'energia totale è $s \gg 4m_\mu^2$, $\beta_\mu \to 1$, le particelle nello stato inziale e finale si possono rappresentare con buona approssimazione con autostati di elicità e la sezione d'urto è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{c}\,\frac{2\pi}{\hbar}\,|\langle f|H|i\rangle|^2 \frac{1}{8\pi^3\hbar^3}\,\frac{p^2}{2c} = \frac{(pc)^2}{8\pi^2(\hbar c)^4}\left|\frac{4\pi\alpha\hbar c}{q^2}\,f(\theta)\right|^2$$

Il propagatore del fotone è *time-like*, $(\hbar c)^2 q^2 = s = (2pc)^2$, e la distribuzione angolare è la somma di due ampiezze (Fig.3.48) che rappresentano la rotazione di spin 1 di θ e $\pi - \theta$ (appendice 4.10)

$$f(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad\qquad f(\pi-\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

Le due ampiezze non interferiscono e la sezione d'urto è

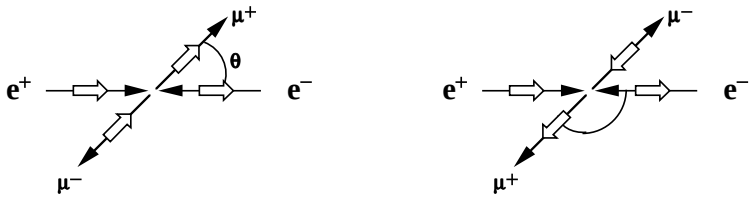


Figure 3.48: Angolo di produzione della coppia $\mu^+\mu^-$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2(\hbar c)^2}{2s}\,\frac{1+\cos^2\theta}{2}$$

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi}{3}\,\frac{\alpha^2(\hbar c)^2}{s} \qquad\qquad \frac{4\pi}{3}\,\alpha^2(\hbar c)^2 = 8.6\ 10^{-32}\ cm^2\ GeV^2$$

Un altro processo di interesse, l'annichilazione $e^+e^- \to \gamma\gamma$, è trattato nell'appendice 4.21. Misure dell'annichilazione $e^+e^- \to \gamma\gamma$ e $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ sono state fatte fino a 4-impulsi trasferiti $Q > 100\ GeV$ e si è dimostrato che elettrone e muone sono fermioni puntiformi con dimensioni molto minori di $10^{-16}\ cm$.

Produzione di coppie di mesoni pseudoscalari

Nell'annichilazione $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$, $e^+e^- \to K^+K^-$, i mesoni di spin zero vengono emessi in uno stato di momento angolare orbitale $\ell = 1$ con dipendenza angolare $f(\theta) = \sin\theta/\sqrt{2}$. Se $s \gg 4m^2$, $\beta_\pi \to 1$ la sezione d'urto

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2(\hbar c)^2}{2s}\,\frac{\sin^2\theta}{2}\,|F(s)|^2$$

è fortemente soppressa dal fattore di forma elettromagnetico ($F(s) \to 0$ per $s \gg 4m^2$). Quindi la produzione di mesoni pseudoscalari non dà un contributo importante alla produzione di adroni.

Produzione di risonanze mesoniche

I mesoni vettori sono rappresentati nel modello a quark come stati legati quark antiquark con momento angolare orbitale $\ell = 0$ e spin paralleli. Hanno i numeri quantici del fotone $J^{PC} = 1^{--}$ e possono esser prodotti nell'annichilazione e^+e^- quando $s \simeq m_V^2$. La sezione d'urto di produzione (capitolo ???) dipende dalla larghezza di decadimento $\Gamma_{ee} = \Gamma(V \to e^+e^-)$

$$\sigma(e^+e^- \to V) = \frac{16\pi(\hbar c)^2}{s} \frac{2J+1}{(2S_e+1)^2} \frac{\Gamma_{ee}\Gamma}{(\sqrt{s}-m_V)^2 + (\Gamma/4)^2}$$

$$\sigma(s = m_V^2) = \frac{16\pi(\hbar c)^2}{m_V^2} \frac{3}{4} \frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} = \frac{12\pi(\hbar c)^2}{m_V^2} BR_{ee}$$

Le risonanze mesoniche decadono in stati finali costituiti per lo più di adroni. L'annichilazione $e^+e^- \to V$ si manifesta quindi come un picco di larghezza Γ nella sezione d'urto di produzione $e^+e^- \to adroni$. I parametri delle risonanze mesoniche sono

	$m\ (MeV)$	$\Gamma\ (MeV)$	BR_{ee}
ρ	770	151	$4.5\ 10^{-5}$
ω	782	8.4	$7.2\ 10^{-5}$
ϕ	1019	4.4	$3.1\ 10^{-4}$
J/ψ	3097	0.088	$6.0\ 10^{-2}$
Υ	9460	0.052	$2.5\ 10^{-2}$

3.5.2 Il quarkonio

Negli esperimenti di annichilazione e^+e^- vengono misurate con precisione le masse e le larghezze delle risonanze e si possono studiare i loro modi di decadimento. In particolare, per i mesoni vettori si osserva che i valori delle larghezze di decadimento Γ_{ee} sono simili nonostante le masse siamo molto diverse. Il decadimento $V \to e^+e^-$ avviene per interazione elettromagnetica e la larghezza parziale si calcola in modo analogo alla sezione d'urto $e^+e^- \to q\bar{q}$

$$\Gamma_{ee} = 2\pi|\langle ee|H|V\rangle|^2\rho(E_f) = \frac{4\pi\alpha^2(\hbar c)^3}{3m_V^2} \left|\sum e_q\psi_{q\bar{q}}(0)\right|^2$$

dove $\psi_{q\bar{q}}(0)$ è la funzione d'onda dello stato legato $q\bar{q}$ a distanza $r = 0$. La somma è estesa al numero di colori, carica elettrica e stati di spin dei quark e si ottiene $\Gamma_{ee} = 16\pi\alpha^2(\hbar c)^3|\sum e_q|^2|\psi(0)|^2/m_V^2$. Confrontando i valori misurati con la previsione del modello a quark

V	$stato$	$\Gamma_{ee}\ (keV)$	$\lvert\sum e_q\rvert^2$	$\lvert\psi(0)\rvert^2/m_V^2$
ρ	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	7.02	1/2	0.68
ω	$\frac{u\bar{u}+d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	0.60	1/18	0.53
ϕ	$s\bar{s}$	1.27	1/9	0.56
J/ψ	$c\bar{c}$	5.40	4/9	0.59
Υ	$b\bar{b}$	1.31	1/9	0.58

si osserva che $|\psi(0)|^2/m_V^2 \simeq 0.6\ GeV^{-2}fm^{-3}$ è approssimativamente costante. In un modello di potenziale non relativistico, che è una buona approssimazione perché le masse dei quark non sono piccole rispetto all'energia totale, $|\psi(0)|^2$ è proporzionale a $1/R_V^3$ e quindi $M_V^2 R_V^3 \simeq costante$. Questo suggerisce che il potenziale di interazione $q\bar{q}$ non sia semplicemente coulombiano, per cui si ha $MR = costante$, ma che aumenti con la distanza q-$\bar{q}$.

Informazioni più quantitative si ottengono analizzando gli spettri di massa dei mesoni $q\bar{q}$. Questo è possibile per i quark c e b che formano molti stati legati che, in analogia con il positronio (e^+e^-), vengono chiamati *quarkonio*. Gli stati del quarkonio come quelli dell'atomo di idrogeno sono identificati dai numeri quantici n, L, S, J. La parità è $P = P_q P_{\bar{q}}(-1)^L = (-1)^{L+1}$. La coniugazione di carica è definita dalla simmetria per scambio $q \leftrightarrow \bar{q}$; $(-1)^{S+1}(-1)^L C = -1$ per fermioni identici di spin 1/2; cioè $C = (-1)^{L+S}$.

Le masse degli stati del quarkonio sono mostrate in Fig.3.49, per diversi valori dei numeri quantici J^{PC}, insieme ai livelli energetici del positronio. Gli stati n^1S_0 sono mesoni pseudoscalari 0^{-+} come le particelle η; gli stati n^3S_1 sono i mesoni vettori 1^{--}; gli stati n^3P_J sono mesoni indicati con la lettera χ.

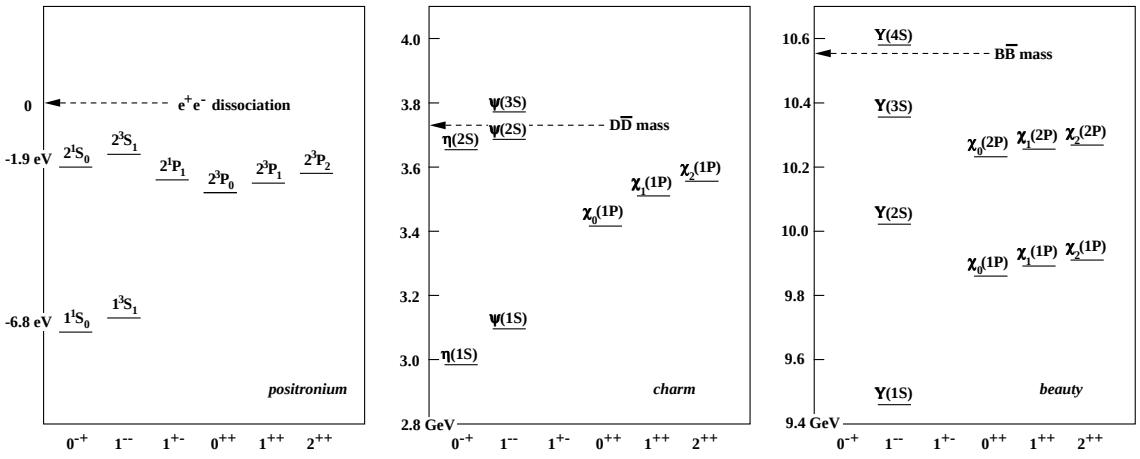


Figure 3.49: Masse dei mesoni del quarkonio e livelli energetici del positronio (la differenza dei livelli non è in scala)

L'analogia con il positronio è notevole. La scala di energia dei livelli del positronio è definita dalla costante di struttura fine α e dalla massa dell'elettrone, mentre quella del quarkonio dalla costante dell'interazione $q\bar{q}$, che chiameremo α_s (s per *strong*) e dalle masse dei quark. I livelli di energia del quarkonio sono ben riprodotti da un potenziale che aumenta con la distanza, $U(r) = -4\alpha_s/3r + \beta r$, con $\alpha_s \simeq 0.3$ e $\beta \simeq 1\ GeV/fm$. La forma del potenziale e i valori dei parametri sono in accordo con le previsioni della teoria della cromodinamica quantistica (capitolo ???).

3.5.3 Annichilazione $e^+e^- \to$ adroni

Nell'annichilazione $e^+e^- \to X$ si può produrre qualunque stato finale formato da adroni che abbia i numeri quantici del fotone. A energia elevata si osserva la produzione di molti mesoni (prevalentemente mesoni π e più raramente mesoni K), la produzione di barioni è fortemente soppressa dal valore più elevato della massa e dalla conservazione del numero barionico (si devono produrre coppie barione-antibarione).

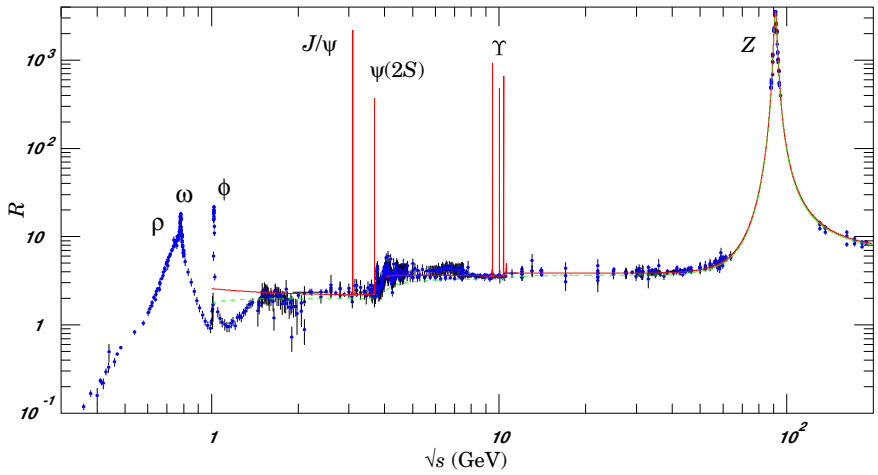


Figure 3.50: Rapporto $\sigma(e^+e^- \to adroni)/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$ in funzione dell'energia totale (S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004)

La Fig.3.50 mostra il rapporto tra la sezione d'urto di produzione di adroni e la sezione d'urto $\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$ in funzione dell'energia totale $\sqrt{s}$. Si osserva che la produzione di adroni ha la stessa dipendenza prevista per l'annichilazione in coppie di fermioni puntiformi, cioè che non risente di alcun effetto dovuto a fattori di forma. Questa osservazione ha una semplice interpretazione nel modello a quark in cui la sezione d'urto di annichilazione in una coppia quark-antiquark di sapore k e carica elettrica e_k è ($\hbar = 1$, $c = 1$)

$$\sigma(e^+e^- \to q_k\bar{q}_k) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\, e_k^2$$

Poiché i quark hanno carica di colore, mentre lo stato adronico osservato non ha colore, la coppia $q_k\bar{q}_k$ interagisce per produrre adroni incolori (Fig.3.51). La sezione d'urto $\sigma(e^+e^- \to adroni)$ è quindi la somma su tutti gli stati di colore e su tutti gli stati di sapore con $\sqrt{s} > 2m_k$

$$\sigma(e^+e^- \to adroni) = \sum_{colore}\sum_{k} \sigma(e^+e^- \to q_k\bar{q}_k) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\sum_k 3e_k^2$$

$$\mathcal{R} = \frac{\sigma(e^+e^- \to adroni)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = \sum_{\sqrt{s}>2m_k} 3e_k^2$$

Il modello a quark prevede $\mathcal{R} = 3(4/9 + 1/9 + 1/9) = 2$ per $\sqrt{s} > m_{s\bar{s}}$; $\mathcal{R} = 10/3$ per $\sqrt{s} > m_{c\bar{c}}$. In Fig.3.50 è riportato anche il contributo degli stati eccitati delle risonanze mesoniche (ψ', ψ'', ...) che si somma al *continuo* della produzione di adroni.

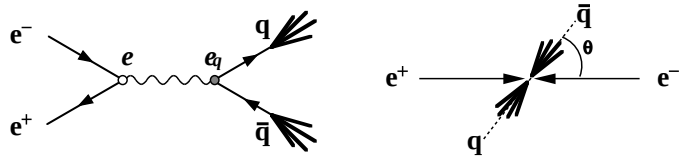


Figure 3.51: Diagramma di Feynman dell'annichilazione $e^+e^- \to q\bar{q}$

Quando l'impulso dei quark è molto maggiore delle masse delle particelle nello stato finale (prevalentemente mesoni π) queste sono raggruppate in due coni in emisferi opposti, formano cioè due *jet adronici* con impulsi opposti. Se i quark sono fermioni di spin 1/2, la distribuzione angolare dell'asse dei jet rispetto all'asse di collisione e^+e^- ha la forma $dn_{jet}/d\cos\theta = 1 + \cos^2\theta$. Anche questo è stato verificato negi esperimenti.

In anelli di collisione e^+e^-, quando l'energia è maggiore del valore di soglia per la produzione di coppie $q\bar{q}$ di sapore k ($\sqrt{s} > 2m_k$), queste formano mesoni contenenti il sapore k. In questo modo sono stati osservati le particelle con *charm* e *beauty* (capitolo ???). Il quark *top* non è stato osservato in interazioni e^+e^- perché non esistono anelli di collisione di energia sufficientemente elevata; è stato osservato nell'annichilazione antiprotone-protone.

3.5.4 Annichilazione quark-antiquark

Gli adroni sono costituiti di quark e quindi in interazioni adroniche si può osservare il processo inverso di annichilazione quark-antiquark in coppie di leptoni $q\bar{q} \to \ell^+\ell^-$. La produzione di coppie e^+e^- e $\mu^+\mu^-$ è stata studiata in interazioni di fasci di protoni o mesoni su bersagli di protoni o nuclei e con anelli di collisione antiprotone-protone. Le reazioni di produzione di coppie di leptoni, ad esempio

$$pp \to \ell^+\ell^- X \qquad \pi^\pm p \to \ell^+\ell^- X \qquad K^\pm p \to \ell^+\ell^- X$$

sono chiamati *processi Drell-Yan*. X è qualunque stato finale risultato della frammentazione dei due adroni interagenti (Fig.3.52)

Negli esperimenti si misurano gli impulsi dei due leptoni, $\vec{p}_+$, $\vec{p}_-$ e con questi si determina la massa invariante

$$M^2 = (P_+ + P_-)^2 = 2m^2 + 2E_+E_- - 2\vec{p}_+ \cdot \vec{p}_- \simeq 4p_+p_- \sin^2\theta_{+-}/2$$

Gli adroni interagenti hanno 4-impulsi P_1 e P_2 e energia totale $s = (P_1 + P_2)^2$. La coppia $\ell^+\ell^-$ è prodotta nell'annichilazione di un quark con 4-impulso x_1P_1 e un antiquark con 4-impulso x_2P_2 (o viceversa) e l'energia totale nel centro di massa

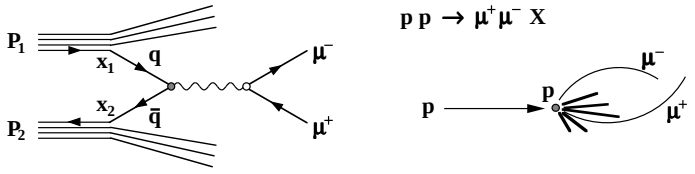


Figure 3.52: Diagramma di Feynman del processo Drell-Yan $pp \to \mu^+\mu^- X$

quark-antiquark è pari alla massa invariante dei due leptoni. Trascurando i valori delle masse, il 4-impulso trasferito è

$$(x_1 P_1 + x_2 P_2)^2 = x_1 x_2 s$$

La sezione d'urto differenziale in funzione della massa invariante si ottiene integrando sulle densità dei quark con il vincolo $x_1 x_2 s = M^2$

$$d^2\sigma = \frac{1}{3}\sum_k \left[q(x_1)\bar{q}(x_2) + q(x_2)\bar{q}(x_1)\right] \sigma(q_k\bar{q}_k \to \ell^+\ell^-)\ dx_1 dx_2$$

Il fattore 1/3 è introdotto perché tra tutte le combinazioni $q_k\bar{q}_k$ solo quelle con lo stesso colore possono accoppiarsi con il campo elettromagnetico. La sezione d'urto di annichilazione è $\sigma(q_k\bar{q}_k \to \ell^+\ell^-) = (4\pi/3)\alpha^2 e_k^2/M^2$. Quindi per la sezione d'urto differenziale si ha

$$d^3\sigma = \frac{1}{3}\frac{4\pi}{3}\frac{\alpha^2}{M^2}\sum_k e_k^2 \left[q(x_1)\bar{q}(x_2) + q(x_2)\bar{q}(x_1)\right] \delta(x_1 x_2 s - M^2)\ dx_1 dx_2 dM^2 =$$

$$= \frac{4\pi}{9}\frac{\alpha^2}{M^2}\sum_k e_k^2 \left[q(x_1)\bar{q}(x_2) + q(x_2)\bar{q}(x_1)\right] \frac{x_1 x_2}{M^2}\ \delta(x_1 x_2 - M^2/s)\ dx_1 dx_2 dM^2$$

Introducendo le funzioni di struttura di quark, $F_q(x) = xq(x)$, e antiquark, $F_{\bar{q}}(x) = x\bar{q}(x)$,

$$\frac{d\sigma}{dM^2} = \frac{4\pi}{9}\frac{\alpha^2}{M^4}\int_0^1\int_0^1 \sum_k e_k^2 \left[F_q(x_1)F_{\bar{q}}(x_2) + F_q(x_2)F_{\bar{q}}(x_1)\right] \delta(x_1 x_2 - M^2/s)\ dx_1 dx_2$$

L'integrale sulle funzioni di struttura è funzione della variabile adimensionale M^2/s, per cui si ottiene

$$\frac{d\sigma}{dM^2} = \frac{4\pi}{9}\frac{\alpha^2}{M^4}\ G(M^2/s) \qquad\qquad \frac{d\sigma}{dM} = \frac{8\pi}{9}\frac{\alpha^2}{M^3}\ G(M^2/s)$$

Le misure effettuate a diverse energie hanno verificato che

- la sezione d'urto differenziale non dipende dall'energia totale degli adroni, $\sqrt{s}$, ma solo dal rapporto M^2/s;

- le funzioni di struttura misurate nella diffusione inelastica neutrino-nucleone riproducono la funzione $G(M^2/s)$ misurata nelle interazioni protone-protone e antiprotone-protone;

- il confronto di queste misure con quelle fatte con fasci di mesoni π e K permette di misurare le funzioni di struttura dei mesoni.

3.6 Interazioni adroniche

Nei capitoli precedenti abbiamo esaminato alcune proprietà delle particelle soggette a interazione adronica che possiamo così riassumere

- gli stati degli adroni, barioni e mesoni, mostrano una serie di regolarità che sono alla base del modello statico a quark;

- la dinamica delle interazioni elettromagnetiche e deboli degli adroni − ad esempio la diffusione fortemente inelastica di elettroni, muoni e neutrini, l'annichilazione elettrone-positrone in adroni e i fenomeni Drell-Yan − è in accordo con l'ipotesi che gli adroni siano costituiti di quark e che questi siano fermioni puntiformi di spin 1/2 e carica elettrica frazionaria;

- la misura dei fattori di forma elettromagnetici degli adroni e della sezione d'urto di interazione adronica mostra che i quark costituenti sono confinati in una regione di dimensione di poco meno di 1 fm.

Sulla base di queste evidenze sperimentali vediamo se è possibile impostare una teoria delle interazioni adroniche in grado di interpretare anche i fenomeni in cui sono coinvolti solo adroni.

3.6.1 Fenomenologia delle interazioni adroniche

Consideriamo la reazione

$$h_1\ h_2 \to p_1\ p_2 \dots p_n$$

in cui due adroni collidono a formare uno stato di n particelle di impulso $\vec{p}_k$. Nel capitolo ???, sulla base di considerazioni generali sulla diffusione da potenziale, si è mostrato che la sezione d'urto totale e la sezione d'urto elastica tendono ad un valore indipendente dall'energia totale quando l'impulso nel centro di massa è molto maggiore di $\hbar/R$, dove R è la dimensione spaziale degli adroni, $\sigma_{tot} \to 2\pi R^2$. La Fig.3.53 mostra l'andamento della sezione d'urto totale e della sezione d'urto elastica ($\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel}$) in interazioni protone-protone e antiprotone-protone in funzione dell'energia nel centro di massa, $\sqrt{s} = 2(m_p^2 + p_{cm}^2)^{1/2}$. Per $\sqrt{s} \gg 2m_p$ la sezione d'urto è approssimativamente costante, $\sigma \simeq 40\ mb$, ma poi cresce lentamente con $\ln s$. A energia elevata le sezioni d'urto protone-protone e antiprotone-protone sono uguali; le stesse conclusioni si hanno studiando le reazioni con fasci di mesoni: $\pi^{\pm}p$, $K^{\pm}p$.

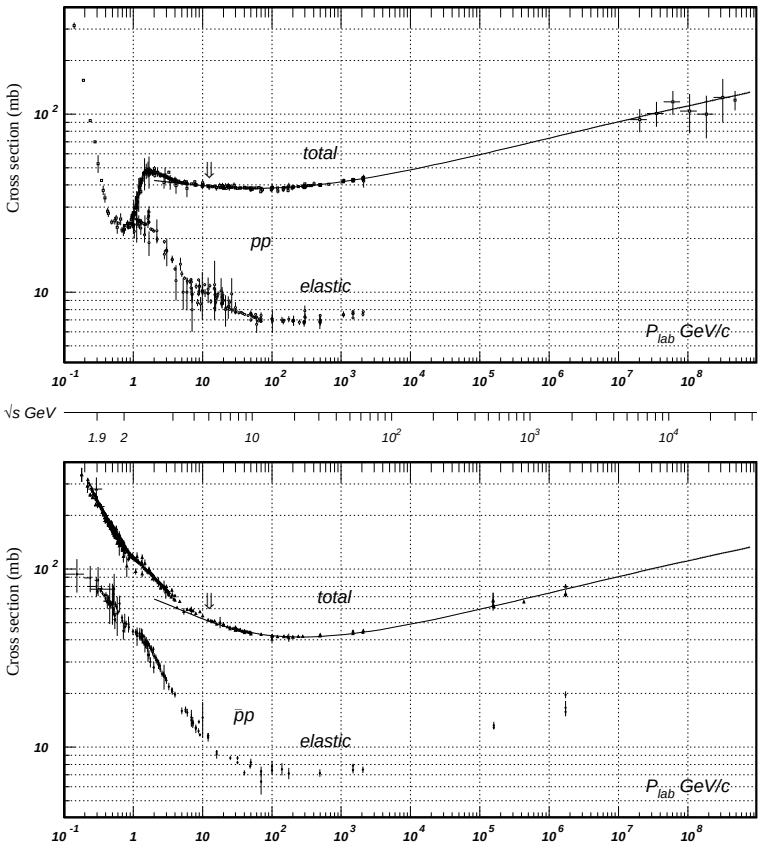


Figure 3.53: Sezione d'urto totale e elastica protone-protone e antiprotone-protone in funzione dell'energia nel centro di massa, $\sqrt{s}$ (S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004) .

Consideriamo la regione in cui $p_{cm} \gg \hbar/R$ ($\sqrt{s} \gg 2m_p$). Se l'energia nel centro di massa è molto maggiore delle masse degli adroni, si possono produrre molti mesoni nello stato finale. La sezione d'urto differenziale in funzione del 4-impulso $(\vec{p}, E)$ del generico adrone emesso nello stato finale si può fattorizzare in una funzione della componente trasversa dell'impulso, p_T (invariante per trasformazioni di Lorentz), e della componente longitudinale, p_L. In un sistema di riferimento in cui l'asse z rappresenta la direzione del moto relativo degli adroni h_1 e h_2 (Fig.3.54) si ha: $p_x^2 + p_y^2 = p_T^2$, $p_z = p_L$, $\theta = \text{atan}\ p_T/p_L$ è l'angolo polare, $\phi = \text{atan}\ p_y/p_x$ è l'angolo azimutale. Se fascio e bersaglio non sono polarizzati, cioè non si ha una direzione preferita degli spin, la sezione d'urto non dipende dall'angolo azimutale ϕ.

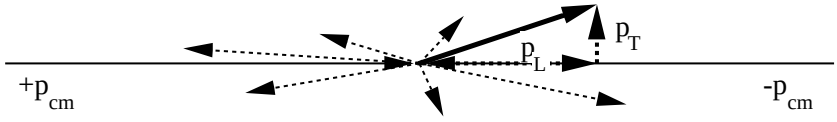


Figure 3.54: Produzione inclusiva di adroni nella reazione $h_1 h_2 \to hX$.

Se $\sqrt{s}$ è l'energia totale nel centro di massa, la *sezione d'urto inclusiva* per la

formazione del generico adrone h di impulso $\vec{p}$ ($h_1 h_2 \to hX$) si esprime in forma invariante (capitolo ???) in funzione di p_T, p_L e $\sqrt{s}$

$$E\frac{d^3\sigma}{d\vec{p}} = \frac{d^3\sigma}{dp_x dp_y dp_z/E} = \frac{d^3\sigma}{p_T dp_T d\phi dp_L/E} = F(p_T, p_L, \sqrt{s})$$

Nell'ipotesi che gli adroni siano costituiti di quark con impulso $p_q \simeq \hbar/R$ è ragionevole supporre che il generico adrone sia emesso con impulso trasverso $p_T \simeq \sqrt{2}p_q$ e impulso longitudinale $p_L \gg p_T$, e che l'impulso trasverso sia caratterizzato da una distribuzione statistica del tipo

$$\frac{dn}{p_T dp_T} = a\ e^{-bE_T}$$

dove E_T e l'*energia trasversa*, $E_T = (p_T^2 + m^2)^{1/2}$. Per $R \simeq 0.8\ fm$, $p_T \simeq 350\ MeV/c$ e $E_T \simeq p_T$ nel caso dei mesoni π. Con queste semplici ipotesi ci si aspetta che la sezione d'urto inclusiva in funzione dell'impulso trasverso abbia un andamento del tipo

$$\frac{d\sigma}{dp_T} = a\ p_T\ e^{-bp_T} \qquad\qquad \langle p_T \rangle = \frac{\int p_T^2 e^{-bp_T} dp_T}{\int p_T e^{-bp_T} dp_T} = \frac{2}{b}$$

e che gli adroni siano emessi prevalentemente con impulso trasverso piccolo per qualunque valore della loro energia E.

La sezione durto differenziale in funzione dell'impulso longitudinale rappresenta come gli n adroni prodotti si dividono l'energia totale a disposizone. L'integrale della sezione d'urto inclusiva è pari al prodotto della sezione d'urto inelastica e il numero medio di particelle prodotte

$$\sigma(h_1 h_2 \to p_1 p_2 \ldots p_n) = \langle n \rangle\ \sigma_{inel}$$

e σ_{inel} è approssimativamente costante al variare dell'energia nel centro di massa. Quindi, poiché l'impulso longitudinale non contiene informazione sulla dinamica del processo di reazione, ma solo sulla cinematica, è ragionevole supporre

$$\frac{d\sigma_{inel}}{dp_L/E} \simeq costante \qquad\qquad \sigma_{inel} = costante \times \int \frac{dp_L}{E} = costante \times y_{max}$$

dove si è introdotta la variabile *rapidità* definita da $dy = dp_L/E$

$$y = \int_{-p_L}^{+p_L} \frac{dp_L}{E} = \frac{1}{2}\ln\frac{E + p_L}{E - p_L} = \frac{1}{2}\ln\frac{(E + p_L)^2}{E^2 - p_L^2} = \ln\frac{E + p_L}{E_T}$$

In una trasformazione di Lorentz, ad esempio dal riferimento del laboratorio al riferimento del centro di massa della reazione, la rapidità si trasforma secondo la relazione

$$y' = \frac{1}{2}\ln\frac{E' + p'_L}{E' - p'_L} = \frac{1}{2}\ln\frac{\gamma E + \beta\gamma p_L + \gamma p_L + \beta\gamma E}{\gamma E + \beta\gamma p_L - \gamma p_L - \beta\gamma E} = y + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

quindi la *differenza di rapidità* tra gli adroni prodotti è invariante.

Quando l'energia nel centro di massa è molto maggiore delle masse degli adroni si producono molte particelle nello stato finale e il numero di adroni, n, ha una distribuzione statistica con valor medio $\langle n \rangle$. Questi sono prevalentemente mesoni π che sono gli adroni con la massa più piccola, ma vengono prodotti anche mesoni K (tipicamente $n_K/n_\pi \simeq 0.1$) e mesoni vettori (ρ, ω, ϕ ...) che decadono in mesoni π o K. La probabilità di produrre adroni di massa maggiore è trascurabile. Per la simmetria dell'isospin delle interazioni adroniche si ha $n_{\pi^\pm} = 2n_{\pi^0}$ ($I_\pi = 1$) e $n_{K^\pm} = n_{K^0}$ ($I_K = 1/2$), quindi con buona approssimazione il numero di particelle cariche è il doppio delle particelle neutre. Poiché $\sigma_{inel} \simeq$ *costante*, le considerazioni precedenti implicano che il numero medio di adroni prodotti, la *molteplicità*, sia approssimativamente proporzionale al valore massimo della rapidità $y_{max} = \ln(E_{max} + p_{Lmax})/E_T \simeq \ln\sqrt{s}/m_p$, cioè che la molteplicità aumenti linearmente con il logaritmo dell'energia

$$\langle n \rangle = a + b \ \ln s$$

Poiché in generale $E \gg m$, la rapidità si può approssimare con la variabile *pseudorapidità*, indicata con η, che dipende solo dall'angolo polare θ

$$\frac{E + p_L}{E - p_L} = \frac{(p^2 + m^2)^{1/2} + p\cos\theta}{(p^2 + m^2)^{1/2} - p\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta/2 + m^2/4p^2 + \ldots}{\sin^2\theta/2 + m^2/4p^2 + \ldots} \simeq \frac{1}{\tan^2\theta/2}$$

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{E + p_L}{E - p_L} \simeq -\ln\tan\theta/2 = \eta$$

Questo ha il vantaggio che le misure di molteplicità si possono fare senza usare campi magnetici e quindi con ampia accettanza e buona uniformità.

La Fig.3.55 (sinistra) mostra la molteplicità di particelle cariche per unità di pseudorapidità prodotte in interazioni protone-protone e antiprotone-protone per diversi valori dell'energia nel centro di massa. Dall'andamento di $dn_{ch}/d\eta$ si deduce $dn_{ch}/dy \simeq$ *costante* in un ampio intervallo, detto *plateau di rapidità*, che si estende all'aumentare di $\sqrt{s}$, e una diminuzione di dn_{ch}/dy per $|y| \to y_{max}$; $y_{max}(63\ GeV) \simeq 4.2$, $y_{max}(900\ GeV) \simeq 6.9$. Questo è in accordo qualitativo con le ipotesi fatte, ma si nota che $dn_{ch}/dy|_{y=0}$ aumenta con l'energia nel centro di massa. La Fig.3.55 (destra) mostra la molteplicità di particelle cariche in funzione dell'energia nel centro di massa, $n_{ch} = \int (dn_{ch}/dy)\ dy$ dove l'integrale va esteso da $-y_{max}$ a $+y_{max}$. La molteplicità non ha un semplice andamento lineare con $\ln s$, ma piuttosto con $(\ln s)^2$ poiché sia $dn_{ch}/dy|_{y=0}$ che y_{max} aumentano con andamento proporzionale a $\ln s$.

Dalle osservazioni precedenti si deduce che, a energia fissa, la sezione d'urto invariante non dipende dalla rapidità in un ampio intervallo

$$\frac{d\sigma}{dy} = \int E\frac{d^3\sigma}{d\vec{p}}\ dp_T d\phi \simeq costante$$

Viceversa la dipendenza dall'impulso trasverso ha un andamento esponenziale come previsto. La Fig.3.56 mostra la sezione d'urto invariante mediata nel plateau di

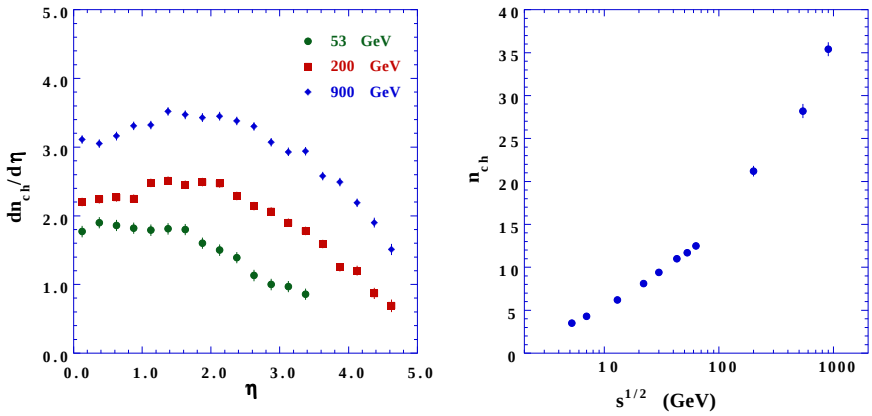


Figure 3.55: Molteplicità di particelle cariche per unità di pseudorapidità in interazioni antiprotone-protone. Molteplicità di particelle cariche in funzione dell'energia nel centro di massa, $\sqrt{s}$.

rapidità in funzione dell'impulso trasverso

$$\frac{d\sigma}{p_T dp_T} = \int E \frac{d^3\sigma}{d\vec{p}}\, dy d\phi$$

Per $p_T < 1$ GeV/c i valori della sezione d'urto sono ben rappresentati da una legge esponenziale e il valore medio dell'impulso trasverso è approssimativamente uguale a quello previsto dal modello statico a quark. La linea in Fig.3.56 rappresenta l'andamento dei dati sperimentali per $p_T < 1$ GeV/c e $\sqrt{s} = 63$ GeV: in questo caso $\langle p_T \rangle \simeq 2/6 = 0.33$ GeV/c. I risultati si discostano dalla legge esponenziale per valori di impulso trasverso maggiori e l'effetto è più evidente all'aumentare dell'energia nel centro di massa.

Le interazioni di fasci di mesoni π o di mesoni K con bersagli di protoni o deutoni mostrano le stesse caratteristiche. In questo caso però l'energia nel centro di massa è limitata a valori minori di 40 GeV.

Dall'analisi di questi risultati possiamo concludere che

- la sezione d'urto inelatica non ha un andamento asintotico costante, ma aumenta lentamente con l'energia $\sim \ln s$;
- la sezione d'urto differenziale $d\sigma/dy$ è approssimativamente costante in un ampio intervallo di rapidità, ma aumenta lentamente con l'energia $\sim \ln s$;
- la molteplicità non aumenta $\sim \ln s$, ma piuttosto $\sim (\ln s)^2$;

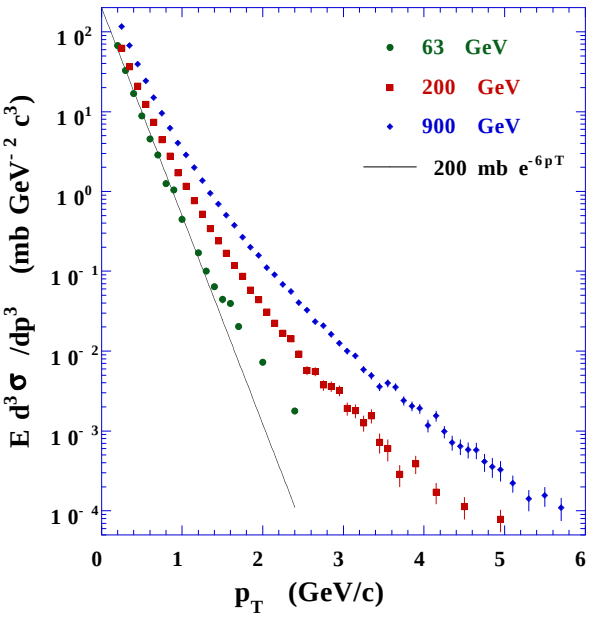


Figure 3.56: Sezione d'urto invariante di particelle cariche in funzione dell'impulso trasverso per diversi valori dell'energia nel centro di massa.

- la sezione d'urto differenziale $d\sigma/p_T dp_T$ segue una legge esponenziale, ma solo per piccoli valori dell'impulso trasverso, $p_T < 1$ GeV/c.

Quindi, le caratteristiche generali delle interazioni adroniche sono in accordo qualitativo con un semplice modello di adroni costituiti di quark con impulso trasverso $p_q \simeq 250$ MeV/c, analogo al modello statistico a gas di Fermi dei nuclei, ma se ne discostano sensibilmente quando gli adroni prodotti hanno impulso trasverso molto maggiore di p_q. La probabilità che questo avvenga è piccola (Fig.3.56), ma sicuramente maggiore di quanto previsto da un modello statistico. Inoltre, la produzione di reazioni con molteplicità elevata è fortemente correlata con la presenza di adroni con impulso trasverso elevato e questo è presumibilmente un segnale di come si manifesti la dinamica delle interazioni tra i costituenti degli adroni.

3.6.2 La cromodinamica quantistica

La cromo-dinamica quantistica − QCD per Quantum Chromo-Dynamics − è la teoria di campo sviluppata per interpretare la fenomenologia delle interazioni adroniche. Nel capitolo ??? abbiamo visto che il modello statico a quark è in grado di riprodurre i numeri quantici dei multipletti J^P dei mesoni e dei barioni introducendo tre *cariche di colore* in modo che le combinazioni di quark che realizzano gli stati delle particelle osservate siano antisimmetriche rispetto allo scambio dei quark e che questi stati siano *incolori*. La simmetria del colore è la simmetria $SU(3)$ delle matrici di Gell-Mann (appendice 4.12). Il nome *colore* deriva dal fatto che si possono ottenere immagini colorate o, nel caso degli adroni, bianche a partire da tre colori di

base che indichiamo con *rosso*, *blu* e *giallo*. Inoltre il modello a partoni, discusso nel capitolo ???, spiega la dinamica di alcuni processi fisici ad elevato impulso trasferito come interazione tra quark puntiformi, sorgenti del campo, e quanti di massa nulla e spin 1 (queste ultime due ipotesi vanno convalidate con altre verifiche sperimentali).

Le ipotesi di base della QCD sono:

- gli adroni sono costituiti di particelle puntiformi, i quark;
- i quark sono fermioni di spin 1/2 e numero barionico 1/3, gli anti-quark sono i corrispondenti antifermioni con numero barionico -1/3;
- hanno interazione adronica per effetto della carica di colore (gli anti-quark hanno carica di colore opposta, $\overline{rosso}$, $\overline{blu}$ e $\overline{giallo}$);
- l'interazione adronica è mediata da quanti che si accoppiano alla carica di colore, i gluoni;
- i gluoni sono bosoni di massa nulla e spin 1.

Inoltre i quark hanno interazione elettromagnetica per effetto della carica elettrica (frazionaria), e hanno interazione debole come combinazioni di stati definiti dai parametri della matrice CKM.

Sulla base di queste ipotesi gli stati fondamentali dei barioni sono costituiti da tre quark nello stato di momento angolare orbitale $\ell = 0$ nelle combinazioni di spin 1/2 oppure spin 3/2, la parità è positiva $= (+1)^3$. Analogamente gli antibarioni sono costituiti da tre antiquark e hanno parità negativa $= (-1)^3$. Ad esempio, il barione Δ^{++}, con carica elettrica +2, numero barionico +1, spin 3/2, è costituito dalla combinazione incolore di tre quark u tutti con componente dello spin +1/2

$$|\Delta^{++}, 3/2^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{rbg} \epsilon_{rbg} |u_r \uparrow \ u_b \uparrow \ u_g \uparrow\rangle$$

$\Delta^{++} = \frac{1}{\sqrt{6}} (u_r u_b u_g - u_r u_g u_b + u_b u_g u_r - u_b u_r u_g + u_g u_r u_b - u_g u_b u_r)$

Gli stati fondamentali dei mesoni sono costituiti da un quark e un antiquark nello stato di momento angolare orbitale $\ell = 0$ nelle combinazioni di spin 0 oppure spin 1, la parità è negativa, $(+1)(-1)$. Ad esempio, il mesone π^+, con carica +1, numero barionico 0, spin 0 e parità negativa, è costituito da una coppia quark $u-$antiquark $\bar{d}$ con componenti opposte degli spin nelle combinazioni incolori $r\bar{r}$, $b\bar{b}$, $g\bar{g}$

$$|\pi^+, 0^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(u_r \uparrow \bar{d}_{\bar{r}} \downarrow + u_r \downarrow \bar{d}_{\bar{r}} \uparrow + u_b \uparrow \bar{d}_{\bar{b}} \downarrow + u_b \downarrow \bar{d}_{\bar{b}} \uparrow + u_g \uparrow \bar{d}_{\bar{g}} \downarrow + u_g \downarrow \bar{d}_{\bar{g}} \uparrow \right)$$

I vettori di base della simmetria SU(3) sono i tre colori

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che possiamo rappresentare in un piano

$$\begin{array}{ccccc} b & & r & & \bar{g} \\ & g & & \bar{r} & \bar{b} \end{array}$$

I gluoni sono bosoni con numero fermionico 0 e carica elettrica nulla che hanno i numeri quantici di coppie $q\bar{q}$ dello stesso sapore, e sono rappresentati dalle combinazioni colore-anticolore. Queste formano un ottetto e un singoletto, otto combinazione dotate di colore e una incolore

$$G_1 = b\bar{g} \qquad G_2 = r\bar{g}$$

$$\text{ottetto} \quad G_4 = b\bar{r} \qquad G_3, G_8 \qquad G_5 = r\bar{b} \qquad \text{singoletto} \quad G_0$$

$$G_6 = g\bar{r} \qquad G_7 = g\bar{b}$$

la combinazione del singoletto è simmetrica: $G_0 = (r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})/\sqrt{3}$, le altre due combinazioni, G_3 e G_8, sono ortogonali tra loro e ortogonali a G_0:

$$G_3 = \frac{r\bar{r} - b\bar{b}}{\sqrt{2}} \qquad G_8 = \frac{r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g}}{\sqrt{6}}$$

L'interazione tra quark viene mediata dagli otto campi di gluoni rappresentati dall'ottetto e quindi i *gluoni portano colore*. Questa è una importante differenza tra l'elettrodinamica, QED, in cui esistono due stati di carica elettrica e un bosone mediatore neutro, il fotone, e la QCD in cui esistono tre stati di carica di colore (e tre coniugati) e otto bosoni colorati.

I fattori di accoppiamento di colore

In QED la costante di accoppiamento è definita dall'energia di interazione tra cariche elettriche $U = e_1 e_2/4\pi\epsilon_o r$; se e è la carica elementare $U = \pm\alpha/r$. Per definire, in analogia, la costante di accoppiamento dell'interazione adronica occorre calcolare i prodotti delle cariche di colore $c_1 c_2$, chiamati *fattori di colore*, nelle loro possibili combinazioni. Ad esempio, come mostrato in Fig.3.57

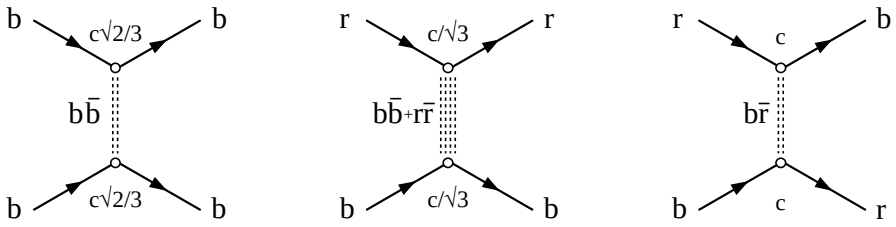


Figure 3.57: Fattori di colore dello scattering $qq \to qq$

- nello scattering quark-quark $rr \to rr$ vengono scambiati i gluoni G_3 e G_8, il fattore di colore è $C = \frac{c}{\sqrt{2}}\frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{6}}\frac{c}{\sqrt{6}} = \frac{2c^2}{3}$;

- lo stesso si ha per lo scattering $bb \to bb$ e $gg \to gg$; quest'ultimo è mediato dal solo gluone G_8: $C = \frac{-2c}{\sqrt{6}}\frac{-2c}{\sqrt{6}} = \frac{2c^2}{3}$;
- $rb \to rb$ è mediato dai gluoni G_3 e G_8, $C = \frac{-c}{\sqrt{2}}\frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{6}}\frac{c}{\sqrt{6}} = \frac{-c^2}{3}$;
- $rg \to rg$ e $bg \to bg$ sono mediati dal gluone G_8, $C = \frac{-2c}{\sqrt{6}}\frac{c}{\sqrt{6}} = \frac{-c^2}{3}$;
- per i processi di scambio carica $rb \to br$, $bg \to gb$, ..., mediati dai gluoni $G_4, G_1, \ldots$, il fattore di colore è c^2;
- nello scattering quark-antiquark ($q\bar{q}$) le due cariche hanno segno opposto e il fattore di colore è l'opposto di quello del corrispondente processo qq: $C(q\bar{q}) = -C(qq)$, mentre nei processi $\bar{q}\bar{q}$ cambia il segno di entrambe le cariche e $C(\bar{q}\bar{q}) = +C(qq)$.

Riassumendo

$\langle rr\|rr\rangle$	$\langle bb\|bb\rangle$	$\langle gg\|gg\rangle$	$+2/3$	$\langle r\bar{r}\|r\bar{r}\rangle$	...	...	$-2/3$
$\langle rb\|rb\rangle$	$\langle bg\|bg\rangle$	$\langle gr\|gr\rangle$	$-1/3$	$\langle r\bar{b}\|r\bar{b}\rangle$	...	...	$+1/3$
$\langle rb\|br\rangle$	$\langle bg\|gb\rangle$	$\langle gr\|rg\rangle$	$+1$	$\langle r\bar{b}\|r\bar{b}\rangle$	$\langle r\bar{r}\|b\bar{b}\rangle$	...	-1

Fattori di colore positivi corrispondono a interazione repulsiva, fattori di colore negativi corrispondono a interazione attrattiva, quindi per formare gli adroni che si osservano occorre che il fattore di colore sia negativo e che le combinazioni di quark e/o antiquark siano nello stato di singoletto incolore

- un mesone è un singoletto di colore quark-antiquark, $|q\bar{q}\rangle_{sing} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}\right)$. Il processo $r\bar{r} \to r\bar{r}$ contribuisce con un fattore $\frac{-2c^2}{3}$ e analogamente gli altri tre. Il processo $r\bar{r} \to b\bar{b}$ contribuisce con un fattore $\frac{-c^2}{3}$, poiché $C(rb \to rb) + C(rb \to br) = \frac{-2c^2}{3} + c^2$, e analogamente gli altri sei. Quindi $C(|q\bar{q}\rangle_{sing}) = -\frac{8c^2}{3}$.
- un barione è un singoletto di colore di tre quark, $|qqq\rangle_{sing} = \frac{1}{\sqrt{6}}(r[bg - gb] + b[gr - rg] + g[rb - br])$. Per ciascun termine si ha

$$\langle bg - gb|bg - gb\rangle = \langle bg|bg\rangle - \langle gb|bg\rangle - \langle bg|gb\rangle + \langle gb|gb\rangle = \frac{-8c^2}{3}$$

  e quindi $C(|qqq\rangle_{sing}) = \frac{3}{6}\,\frac{-8c^2}{3} = -\frac{4c^2}{3}$

I fattori di accoppiamento quark-gluone

In analogia con la QED possiamo costruire l'interazione tra quark e gluoni con una hamiltonica $H(x) = J(x) \cdot A(x)$ dove J è la corrente associata ai quark e A è il campo dei gluoni. Gli elementi di matrice dei processi di scattering sono definiti dai fattori di colore. Vi è però una importante differenza poichè i gluoni hanno carica di colore e quindi, oltre ai vertici qGq, esistono anche vertici GGG.

All'ordine più basso dello sviluppo perturbativo esistono tre tipi di vertice di interazione (Fig.3.58): radiazione di gluoni da quark $q \to qG$, radiazione da gluoni $G \to GG$ e annichilazione $G \to \bar{q}q$

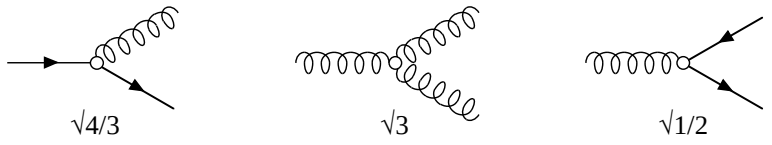


Figure 3.58: Grafici dei vertici di interazione quark-gluone

$q \to qG$ Al vertice rGx contribuiscono tre termini: $rGr + rGb + rGg$ con fattori di colore $\frac{2c^2}{3} + c^2 + c^2 = \frac{8c^2}{3}$ e analogamente per gli altri tre casi. Il contributo del vertice quark-gluone-quark all'elemento di matrice è

$$|\langle Gq|H|q\rangle|^2 = C_F = \frac{8c^2}{3}$$

$G \to GG$ Per valutare il contributo del vertice GGG consideriamo un gluone G_{in} di colore $x\bar{y}$ e uno $G_{out} = x\bar{z}$ rappresentati in Fig.3.59. Poichè $\langle x\bar{y}|x\bar{y}\rangle = \langle x\bar{x}|y\bar{y}\rangle$ il terzo gluone è $G = y\bar{z}$ oppure $z\bar{y}$. Se $x = r$ abbiamo i seguenti pesi per G_{out}: $C(r\bar{r}) = 2/3$, $C(r\bar{b}) = 1/3$, $C(r\bar{g}) = 1$. La somma dei contributi dei tre grafici in Fig.3.59 è $2c^2$. Le altre possibili combinazioni danno lo stesso risultato. Il fattore $2c^2$ si riferisce a 3 degli 8 possibili stati di G_{in} e ci sono 8 possibili stati del gluone G, quindi per ogni stato G_{in} il contributo del vertice gluone-gluone-gluone all'elemento di matrice è

$$|\langle GG|H|G\rangle|^2 = C_T = \frac{3}{8} \times 8 \times 2c^2 = 6c^2$$

$G \to \bar{q}q$ Per la simmetria del colore tutti i gluoni hanno lo stesso peso unitario

$$|\langle \bar{q}q|H|G\rangle|^2 = C_A = c^2$$

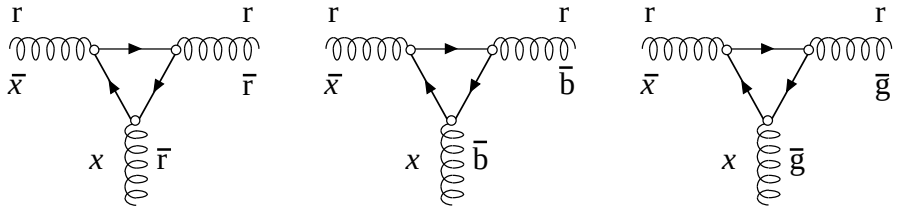


Figure 3.59: Grafici dei vertici di interazione gluone-gluone

3.6.3 La "costante" di accoppiamento della QCD

Se le sorgenti del campo sono puntiformi e i quanti hanno massa nulla l'energia di interazione ha la forma $U = c_1c_2/r$. La costante di accoppiamento dell'interazione adronica o interazione forte, α_s (s per *strong*), è definita in analogia con quella

della QED come il prodotto delle cariche $c_1 c_2$. Vi è però una differenza dovuta alla definizione dei generatori della simmetria $SU(n)$. I generatori della simmetria del colore sono gli operatori $\lambda_j/2$ (le matrici di Gell-Mann $\times\frac{1}{2}$) che soddisfano le regole di commutazione $[\lambda_j/2, \lambda_k/2] = iC_{jkl}\lambda_l/2$ (appendice 4.12) e questo comporta che la corretta definizione della carica di colore è $c/\sqrt{2}$ e che la costante di accoppiamento è $\alpha_s = c^2/2$. Con questa definizione l'energia di interazione quark-quark negli adroni è

$$U(qqq_{sing}) = -\frac{2\alpha_s}{3r} \qquad U(q\bar{q}_{sing}) = -\frac{4\alpha_s}{3r}$$

e i contributi agli elementi di matrice dei vertici di interazione (Fig.3.58) sono

$$|\langle Gq|H|q\rangle|^2 = \frac{4\alpha_s}{3} \qquad |\langle GG|H|G\rangle|^2 = 3\alpha_s \qquad |\langle \bar{q}q|H|G\rangle|^2 = \frac{\alpha_s}{2}$$

Come nel caso della QED, la costante di accoppiamento *non* è costante, ma dipende dal 4-impulso trasferito nell'interazione per effetto delle correzioni radiative (appendice 4.20). Vi è però una importante differenza poichè ai grafici di polarizzazione del vuoto contribuisce anche l'interazione gluone-gluone come mostrato in Fig.3.60. Questi gluoni possono avere polarizzazione longitudinale o trasversa e quindi ci sono tre contributi che modificano il propagatore: grafici chiusi $G \to q\bar{q} \to G$, $G \to G_L G_L \to G$ e $G \to G_T G_T \to G$. La costante di accoppiamento è

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 - b\frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi}\ln\frac{Q^2}{\mu^2}}$$

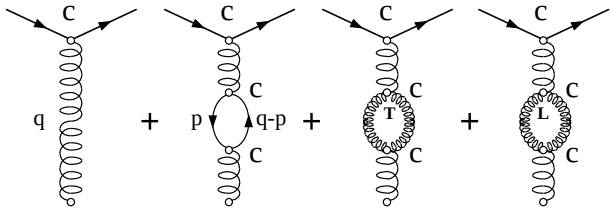


Figure 3.60: Propagatore e grafici di polarizzazione del vuoto in QCD

In QED il fattore b è positivo $b = 4n_\ell/3$ (n_ℓ è il numero dei leptoni) e la costante di accoppiamento aumenta molto lentamente con q^2. In QCD i contributi dei tre grafici non hanno lo stesso segno: $b = 2n_f/3 + 5 - 16$. Il primo termine è analogo a quello della QED (n_f è il numero di sapori di quark che contribuiscono quando $Q^2 > 4m_f^2$), gli altri due termini sono generati dall'auto-accoppiamento dei gluoni. In particolare il terzo termine è negativo e comporta un effetto antischermante della carica di colore. Poiché $n_f \leq 6$, risulta che il fattore b è negativo e la costante di accoppiamento *diminuisce* all'aumentare di Q^2

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi}(33 - 2n_f)\ln\frac{Q^2}{\mu^2}}$$

La dipendenza della costante di accoppiamento dall'energia di interazione tra quark e gluoni è stata studiata da Gros, Politzer e Wilczek [12] che hanno mostrato che l'interazione è forte a bassa energia, e questo assicura che gli adroni sono fortemente legati, e diventa debole a energia elevata, e questo comporta che i quark sono debolemente legati nelle interazioni a energia elevata, che è l'osservazione alla base del modello a partoni. Questo andamento si traduce nell'espressione *la QCD è asintoticamente libera*.

Poichè il calcolo con il metodo perturbativo risulta in uno sviluppo in serie di potenze della costante di accoppiamento, i risultati dei calcoli di elementi di matrici e sezioni d'urto sono tanto più affidabili quanto maggiore è l'energia di interazione, ma sono di difficile applicazione a bassa energia dove $\alpha_s(Q^2)$ non è una quantità $\ll 1$. Nel seguito sono presentati diversi modi di misurare α_s e alcuni risultati sono mostrati in Fig.3.76 in funzione dell'energia. Si usa di solito quotare il valore di α_s alla massa del bosone Z^0 (capitolo ???), il valore misurato è

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0.120 \pm 0.003$$

La costante di accoppiamento aumenta per piccoli valori di Q^2; il valore alla massa del nucleone è $\alpha_s(1\ GeV) \simeq 0.4$. Il valore per cui α_s diverge è detto *parametro di scala della QCD*, Λ_{QCD}, ed è una stima del valore di energia per cui i quark sono fortemente legati e formano gli adroni. Per $Q^2 = \Lambda^2$ si ha $1 + b\frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} = 0$, $\alpha_s(\mu^2) = -\frac{4\pi}{b \ln \Lambda^2/\mu^2}$ e possiamo esprimere α_s in funzione di Λ

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{b \ln \frac{Q^2}{\mu^2} - b \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}} = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}}$$

Dal valore di α_s, tenendo conto del numero di quark che contribuiscono, si ottiene $\Lambda_{QCD} \simeq 200\ MeV$, ovvero $1/\Lambda_{QCD} \simeq 1\ fm$ che corrisponde alla dimensione di protone e neutrone (capitolo ???). Comunque Λ_{QCD} è un parametro non ben definito ed è misurato con grande errore perchè l'evoluzione dei fenomeni studiati dipende dal logaritmo di Λ_{QCD}.

La teoria deve inoltre tener conto di altre due evidenze sperimentali

- l'interazione nucleare è a breve raggio di azione $R \sim 1\ fm$,
- non sono mai stati osservati quark o gluoni liberi.

Invece il potenziale $U(r) = -4\alpha_s(r)/3r$ diminuisce con la distanza e questo non impedisce la liberazioni dei quark dagli adroni. Consideriamo due quark a distanza r in un nucleone, cioè uno stato di colore $\neq 0$, e supponiamo che la forma del potenziale sia

$$U(r) = -\frac{4\alpha_s(r)}{3r} + \beta r$$

Per $r \ll 1\ fm$ il campo delle cariche di colore è approssimativamente coulombiano e le linee di forza si estendono nello spazio, ma per $r \gg 1\ fm$ le linee di forza sono

[12] premi Nobel per la fisica nel 2004

concentrate in un tubo (Fig.3.61). Per allontanare le cariche di colore occorre fornire energia e quando questa è maggiore di $2m_q$ si può formare una coppia $q\bar{q}$. Questo ha come effetto che le linee di campo rimangono concentrate in regioni a forma di tubo tra i quark, cioè il colore rimane *confinato* in una regione di estensione $\sim 1\ fm$. Se in una collisione inelastica viene ceduta al nucleone energia $\Delta E \gg 2m_q$, si formano molte coppie $q\bar{q}$ che si combinano in stati incolori di quark e antiquark cioè mesoni e barioni. In questo modo i quark si *adronizzano* e il nucleone così eccitato *frammenta* in un certo numero di adroni incolori.

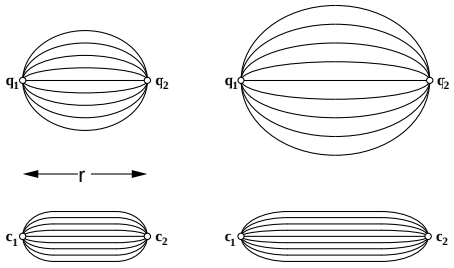


Figure 3.61: Linee di forza di dipolo elettrico e dipolo di colore

3.6.4 Funzioni di struttura

Gli esperimenti di diffusione fortemente inelastica di elettroni e muoni (per interazione elettromagnetica) o neutrini e antineutrini (per interazione debole) mostrano che il nucleone è costituito di quark, antiquark e gluoni. La sezione d'urto differenziale è funzione di due variabili indipendenti, Q^2 e x, e dalle misure si estraggono le funzioni di struttura, $F(x, Q^2)$,

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\frac{E'}{E}\left(\frac{F_2}{x}\cos^2\theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2x^2}2F_1\sin^2\theta/2\right)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2dx} = \frac{G^2}{2\pi}\frac{E'}{E}\left(\frac{F_2}{x}\cos^2\theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2x^2}2F_1\sin^2\theta/2 \mp \frac{E+E'}{M}F_3\sin^2\theta/2\right) \quad \begin{matrix} - & \nu \\ + & \bar{\nu} \end{matrix}$$

La legge di scala di Bjorken prevede che le funzioni di struttura dipendano dalla sola variabile adimensionale $x = Q^2/2M\nu$, e cioè che l'interazione non dipenda da una energia (o da una lunghezza) caratteristica. Questa ipotesi è stata confermata dalle prime misure di diffusione anelastica che hanno ispirato il modello a partoni di Feynman. In effetti si tratta di una (fortunata) coincidenza: le prime misure erano effettuate a valori di Q^2 relativamente piccoli (5 - 10 GeV^2) in un intervallo di x in cui le funzioni di struttura non mostrano una dipendenza da Q^2. D'altra parte la QCD prevede che quark e gluoni si possono considerare asintoticamente liberi, ma che a energia finita l'interazione adronica sia caratterizzata da una scala di energia $\Lambda \sim 200\ MeV$ e quando furono effettuate misure a valori di Q^2 più grandi fu osservato che le funzioni di struttura dipendono anche da Q^2. Questo fenomeno è detto *violazione della legge di scala* ed è illustrato in Fig.3.63.

Consideriamo l'interazione tra un fotone di 4-impulso $(\vec{q}, \nu)$ e un quark di tipo i impulso p_i caratterizzata da $x = Q^2/2p_i \cdot q$. Nel campo di colore del nucleone il quark può emettere un gluone, come mostrato in Fig.3.62 in un processo simile all'effetto Compton $\gamma^* q \to qg$ (γ^* indica che il fotone non è reale, cioè $q^2 < 0$). Prima dell'interazione il quark ha una frazione dell'impulso longitudinale del nucleone $p_i = yp$ maggiore di xp ($x < y$) e l'interazione $\gamma^* q$ è caratterizzata dalla variabile $z = Q^2/2yp \cdot q = x/y$.

La definizione delle funzioni di struttura come densità di partoni

$$\frac{F_2(x)}{x} = \sum_i e_i^2 f_i(x) = \sum_i e_i^2 \int f_i(y)\delta(y-x)dy = \sum_i e_i^2 \int_x^1 f_i(y)\delta(1-x/y)\ \frac{dy}{y}$$

viene modificata dall'interazione $\gamma^* q \to qg$. Se chiamiamo $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$, le variabili di Mandelstan (appendice 4.21) la sezione d'urto dell'effetto Compton (appendice 4.21) in funzione dell'impulso trasverso del quark è approssimativamente

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} = \frac{8\pi}{3}\frac{e_i^2\alpha\alpha_s}{\hat{s}}\frac{1}{p_T^2}$$

e dipende (al primo ordine) dal prodotto $\alpha\alpha_s$. La probabilità dell'interazione $\gamma^* q \to qg$ è proporzionale a

$$\hat{\sigma}(\gamma^* q \to qg) = \int \frac{8\pi}{3}\frac{e_i^2\alpha\alpha_s}{\hat{s}}\frac{dp_T^2}{p_T^2} \simeq \frac{4\pi^2 e_i^2\alpha}{\hat{s}}\ \frac{\alpha_s}{2\pi}\ln\frac{Q^2}{\mu^2}\ P_{qq}(z)$$

dove si è introdotto un limite inferiore di integrazione, μ, per evitare la divergenza per $p_T \to 0$. $P_{qq}(z) = \frac{4}{3}\frac{1+z^2}{1-z}$ è la probabilità che un quark di impulso longitudinale yp riduca il suo impulso al valore xp ed emetta un gluone di impulso $(1-z)yp$. La funzione di struttura del modello a partoni viene quindi modificata con l'aggiunta di un fattore che dipende da Q^2 proporzionale a $\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\ln\frac{Q^2}{\mu^2}$

$$\frac{F_2(x)}{x}_{q\to qg} = \sum_i e_i^2 \int_x^1 f_i(y)\left[\delta(1-x/y) + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\ln\frac{Q^2}{\mu^2}\ P_{qq}(x/y)\right]\frac{dy}{y}$$

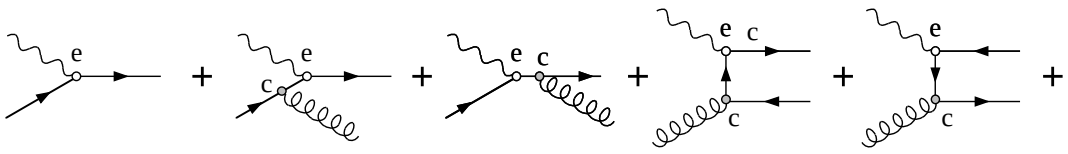


Figure 3.62: Modifiche al vertice di interazione $\gamma^* q$

Come detto nel capitolo ???, dalle misure di diffusione fortemente anelastica di elettroni, muoni e neutrini si può determinare il contributo dei gluoni alle funzioni di struttura del nucleone, la densità di gluoni $g(x)$. I gluoni non interagiscono con il campo di fotoni o bosoni $W^\pm$ e l'interazione è prodotta mediante annichilazione

in coppie quark-antiquark $\gamma^* g \to q\bar{q}$ (Fig.3.62). Analogamente al caso precedente si ottiene il contributo dei gluoni

$$\left.\frac{F_2(x)}{x}\right|_{g\to q\bar{q}} = \sum_i e_i^2 \int_x^1 f_i(y) \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \ln\frac{Q^2}{\mu^2}\; P_{gq}(x/y)\; \frac{dy}{y}$$

dove $P_{gq}(z) = \frac{z^2+(1-z)^2}{2}$ è la probabilità che un gluone di impulso longitudinale yp produca una coppia $q\bar{q}$ di impulso zyp e impulso $(1-z)yp$.

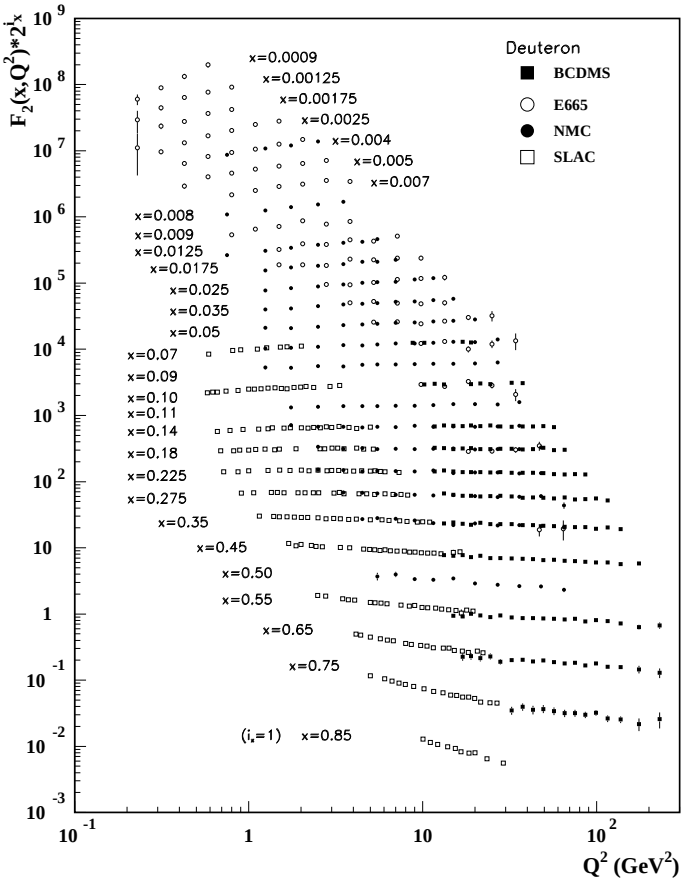


Figure 3.63: Funzione di struttura $F_2(x, Q^2)$ misurata con deuterio (S. Eidelman et al., Phys. Lett. B592, 1, 2004) nota: $\times 2$ per x = 0.85, $\times 4$ per x = 0.75, ...

Le funzioni di struttura sono mostrate in Fig.3.63 per un bersaglio di deutoni per cui le densità di quark u e d sono uguali. All'aumentare del 4-impulso trasferito Q^2 migliora il potere risolutivo con cui si studia la struttura del nucleone e si osserva che diminuisce il numero di partoni con impulso grande ($x > 0.25$) che interagiscono con il campo elettromagnetico o debole, mentre aumenta il numero di partoni con impulso piccolo ($x < 0.15$). Per $0.15 < x < 0.25$ la legge di scala di Bjorken è rispettata con buona approssimazione. Dalla dipendenza delle funzioni di struttura da Q^2 si può quindi determinare il valore della costante di accoppiamento $\alpha_s(Q^2)$.

Equazioni di evoluzione delle densità dei partoni

La dipendenza da Q^2 delle densità dei quark di tipo i si può esplicitare nella forma

$$\frac{d}{d\ln Q^2} f_i(x,Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \left[f_i(y,Q^2) P_{qq}(x/y) + g(y,Q^2) P_{qg}(x/y) \right] \frac{dy}{y}$$

e analogamente per la densità dei gluoni

$$\frac{d}{d\ln Q^2} g(x,Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \left[\sum_i f_i(y,Q^2) P_{gq}(x/y) + g(y,Q^2) P_{gg}(x/y) \right] \frac{dy}{y}$$

dove $P_{gq}(z)$ e $P_{gg}(z)$ sono rispettivamente le probabilità dei processi radiativi $q \to gq$ e $g \to gg$.

Queste relazioni, dette *equazioni di evoluzione di Altarelli-Parisi*, permettono, una volta misurate le densità dei partoni per un valore di Q^2, di calcolarne il valore in regioni di Q^2 non esplorate dagli esperimenti di diffusione fortemente inelastica. Questo è particolarmente utile per calcolare le sezioni d'urto quark-quark o gluone-quark in collisione tra adroni ad alta energia, ad esempio processi Drell-Yan o produzione di jet adronici.

Correzioni radiative

Come nel caso della QED, il propagatore dei quark viene modificato dai grafici di emissione e ri-assorbimento di gluone e il vertice di interazione $q\gamma q$ ($qW^{\pm}q$) viene modificato da correzioni radiative di ordine α_s. I contributi al vertice di interazione in Fig.3.64 corrispondono a diverse potenze della costante di accoppiamento e la probabilità del processo in studio, sviluppata in serie di potenze di α_s, è

$$A^*A\alpha + (A^*B + AB^* + C^*C)\alpha\alpha_s + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$$

Il termine C è proporzionale a $\ln Q^2/\mu^2$ e diverge per $\mu \to 0$ e il termine B ha un andamento simile (appendice 4.20). D'altra parte tutti i termini contribuiscono alla adronizzazione dello stato finale e i diversi contributi non sono sperimentalmente distinguibili ma comunque devono dare un contrinuto finito alla sezione d'urto. In effetti, come in QED, i contribuiti divergenti dei grafici C e dell'interferenza A-B si cancellano al primo ordine dello sviluppo in serie in α_s e quindi il termine di ordine α_s risulta finito e la sezione d'urto è proporzionale a $\alpha^2[1 + a_1\alpha_s + \mathcal{O}(\alpha_s^2)]$. La cancellazione avviene anche per i termini con potenze superiori di α_s.

3.6.5 Annichilazione elettrone-positrone in adroni

La sezione d'urto di annichilazione in una coppia fermione-antifermione di massa $m \ll E$, ad esempio $\mu^+\mu^-$, è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{2s}\frac{1+\cos^2\theta}{2} \qquad \sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi}{3}\frac{\alpha^2}{s}$$

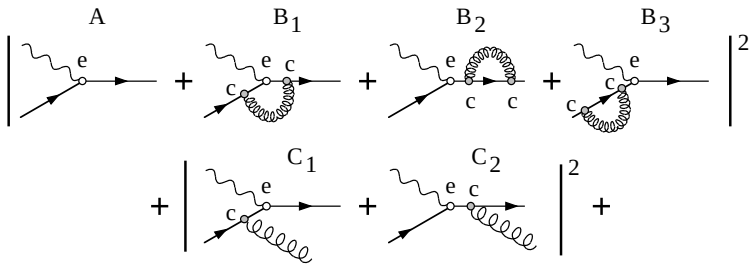


Figure 3.64: Modifiche al vertice di interazione $\gamma^* q$

Per energia molto maggiore della massa dei mesoni, il modello a quark prevede

$$\sigma(e^+e^- \to \text{adroni}) = \sum_q N_c \, e_q^2 \, \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{s}$$

dove $N_c = 3$ è il numero dei colori e la somma è estesa alle cariche dei quark con massa $m_q < \sqrt{s}/2$. Il rapporto tra la sezione d'urto di annichilazione in adroni e quella in una coppia fermione-antifermione puntiformi

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}$$

è stato misurato su un grande intervallo di energia e i risultati sono mostrati in Fig.3.50

Si nota la formazione di stati risonanti con i numeri quantici del fotone, i mesoni vettori $J^{PC} = 1^{--}$, e l'aumento del valore di R quando viene superata l'energia di soglia per produrre coppie $q\bar{q}$. Le altre evidenze sperimentali in favore dell'interpretazione in termini di annichilazione in coppie $q\bar{q}$ sono

- per $\sqrt{s} \gg 2m_q$ le particelle sono emesse in fiotti collimati di adroni chiamati *jet adronici*;
- i jet adronici sono caratterizzati da un impulso totale $\vec{p}_J = \Sigma_i \vec{p}_i$, dove p_i sono gli impulsi degli adroni associati al jet;
- la distribuzione di particelle all'interno del jet, in termini di molteplicità, impulso longitudinale e impulso trasverso rispetto all'asse del jet, sono simili a quelle mostrate in Fig.3.55 e Fig.3.56;
- nella maggior parte dei casi si osserva la produzione di due jet con $\vec{p}_{J1} + \vec{p}_{J2} = 0$ e $p_J \simeq \sqrt{s}/2$ emessi con la distribuzione angolare caratteristica della produzione di coppie fermione-antifermione $\sim 1 + \cos^2\theta$
- con probabilità minore vengono prodotti tre, quattro, ...jet adronici con $\sum_i \vec{p}_{Ji} = 0$, $\sum_i |\vec{p}_{Ji}| = \sqrt{s}$;
- la sezione d'urto $\sigma(e^+e^- \to \textit{adroni})$ è leggermente maggiore di quella prevista dal semplice modello a partoni.

3.6.6 Produzione di jet adronici nell'annichilazione e^+e^-

Queste caratteristiche trovano una interpretazione diretta e quantitativa nell'ambito della QCD. Al primo ordine dello sviluppo perturbativo il processo $\sigma(e^+e^- \rightarrow adroni)$ è mediato da un fotone di 4-impulso $\sqrt{s}$ che si materializza in una coppia $q\bar{q}$ ciascuno con impulso $p_q = (s/2 + m_q^2)^{1/2}$. Quando le cariche di colore si allontanano, il campo di colore genera altre coppie $q\bar{q}$ e inoltre i quark irraggiano gluoni; si produce uno *sciame di partoni* che si ricombinano a formare adroni incolori (in prevalenza mesoni π, K, η, ρ, ...). Gli sciami di partoni si sviluppano attorno alla direzione del partone originario e gli adroni sono raggruppati in jet in modo da conservare impulso, energia e gli altri numeri quantici (Fig.3.65).

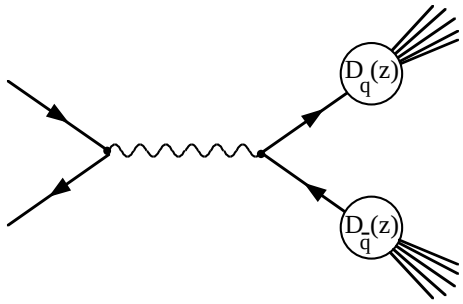


Figure 3.65: Produzione di due jet adronici nell'annichilazione e^+e^-

La distribuzione dell'energia del singolo adrone h in un jet è detta *funzione di frammetazione* del jet ed è espressa in funzione della variabile adimensionale $z = E_h/E_{Jet}$. La funzione di frammentazione non si può calcolare con metodi perturbativi perchè l'energia del jet è divisa tra molti adroni con piccolo impulso trasverso rispetto all'asse del jet, $p_T \simeq 300\ MeV$. Questa è la grandezza che caratterizza il processo di frammentazione e $\alpha_s(p_T^2) \simeq 1$. La sezione d'urto inclusiva di produzione di un generico adrone di energia E_h, $e^+e^- \rightarrow hX$ (X rappresenta qualunque stato finale) è

$$\frac{d}{dz}\sigma(e^+e^- \rightarrow hX) = \sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) \left[D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)\right]$$

dove $D_q^h(z)$ è la funzione di distribuzione della frammentazione del quark q nel generico adrone h. La funzione di frammentazione è normalizzata in modo che la somma delle energie di tutti gli adroni sia uguale all'energia del jet

$$\sum_h \int_0^1 z D_q^h(z) dz = 1$$

e che la somma delle probabilità di produrre l'adrone h sia pari alla molteplicità di questo adrone nei jet

$$\sum_q \int_0^1 \left[D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)\right] dz = n_h$$

Quindi nel modello a partoni ci si aspetta che la sezione d'urto sia funzione della variabile adimensionale z e non dipenda da Q^2

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dz} = \frac{\Sigma_q e_q^2 \ [D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)]}{\Sigma_q e_q^2}$$

cioè una legge di scala analoga a quella delle funzioni di struttura. La Fig.3.66 mostra la sezione d'urto in funzione di z per diversi valori di Q^2 ed è evidente che si osservano violazioni della legge di scala che si interpretano con l'evoluzione delle densità di partoni nel processo di frammentazione. Anche in questo caso la QCD prevede delle equazioni di evoluzione per cui le funzioni di frammentazione dipendono dal valore di Q^2

$$\frac{d}{d\ln Q^2} D(z, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_z^1 D(y, Q^2) \ P(z/y) \ \frac{dy}{y}$$

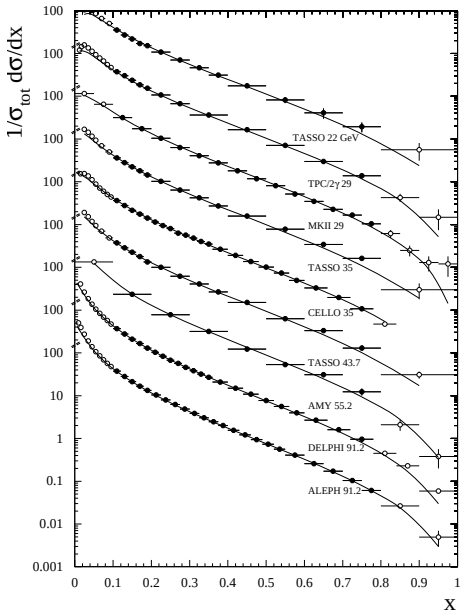


Figure 3.66: Funzione di frammentazione nella annichilazione $e^+e^- \to hX$ per diversi valori di $\sqrt{s}$ (indicati accanto alla sigla dell'esperimento)

La FIG.3.67 mostra la funzione di frammentazione in funzione della variabile $x = p/p_{max} \simeq 2p/\sqrt{s} \simeq z$, per diversi tipi di adroni: mesoni π, mesoni K e nucleoni. Va notato che

- si tratta di una distribuzione *inclusiva*, quindi sono rappresentati sia gli adroni h prodotti direttamente che quelli prodotti nei decadimenti di adroni a breve vita media, $H \to h$;
- le violazioni della legge di scala delle funzioni di frammentazione riguarda i valori di x grandi (i dati si separano sensibilmente per x piccoli perché a bassa energia non vengono prodotti adroni con massa elevata che decadono $H \to h$);

- l'integrale è pari alla molteplicità totale del tipo di adrone e risulta $n_\pi \gg n_K \gg n_p$;
- la molteplicià aumenta proporzionalmente a $(\ln s)^2$.

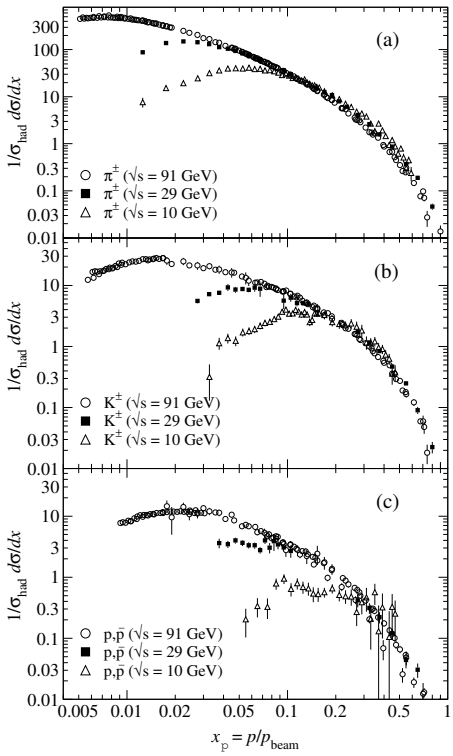


Figure 3.67: Distribuzione inclusiva di mesoni e barioni, $\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx}$, nella annichilazione $e^+e^- \to hX$ (S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004)

Quindi possiamo spiegare l'aumento della molteplicità proporzionale a $(\ln s)^2$ con la somma di due effetti, uno statistico dovuto all'aumento dell'intevallo di rapidità $\sim \ln s$, e uno dinamico dovuto alla variazione della funzione di frammentazione dei partoni $\sim \ln Q^2$. Le stesse considerazioni sono valide per le interazioni puramente adroniche non mediate dall'interazione elettromagnetica.

Produzione di tre jet, $e^+e^- \to q\bar{q}g$

Nello sviluppo iniziale dello sciame di partoni può avvenire che un quark irraggi un gluone con impulso trasverso elevato e che questo dia origine ad un jet adronico separato da quelli associati alla coppia $q\bar{q}$. L'osservazione di eventi con tre (quattro, ...) jet adronici è una conferma diretta dell'emissione di gluoni prevista dalla QCD e il rapporto tra le sezioni d'urto di produzione di tre jet e due jet è proporzionale al valore di $\alpha_s(Q^2)$ (Fig.3.68).

Consideriamo il processo elementare $e^+e^- \to q\bar{q}g$. Se chiamiamo $x_q = 2E_q/\sqrt{s}$, $x_{\bar{q}} = 2E_{\bar{q}}/\sqrt{s}$, $x_g = 2E_g/\sqrt{s}$, le energie normalizzate dei partoni, si ha $x_q + x_{\bar{q}} + x_g = 2$

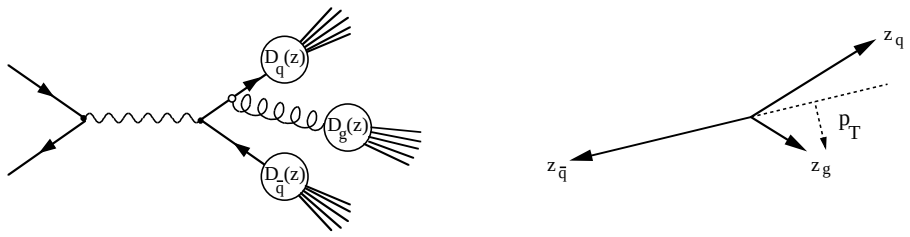


Figure 3.68: Produzione di tre jet adronici nell'annichilazione e^+e^-

e solo due delle variabili sono indipendenti. La sezione d'urto differenziale sia può calcolare a partire dal processo $\gamma^* \to q\bar{q}g$ analogo all'effetto Compton $\gamma^* q \to qg$ analizzato in precedenza, e risulta

$$\frac{d^2\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} = \sigma(e^+e^- \to q\bar{q}) \; \frac{4\alpha_s}{3\pi} \; \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})}$$

che diverge per $x_q \to 1$, $x_{\bar{q}} \to 1$. Questa condizione è soddisfatta solo se si annulla l'impulso trasverso del gluone rispetto alla direzione del partone che lo ha generato. D'altra parte se l'impulso trasverso del gluone è piccolo i due jet si sovrappongono e non sono sperimentalmente distinguibili. Quindi, se si integra la sezione d'urto in un intervallo delle variabili x_q e $x_{\bar{q}}$ in cui i tre jet sono distinguibili, il risultato è finito e la sezione d'urto è proporzionale a α_s

$$\frac{1}{\sigma(e^+e^- \to q\bar{q})} \int_{p_T>0} \frac{d^2\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} \; dx_q dx_{\bar{q}} = \text{fattore} \times \alpha_s(Q^2)$$

Il rapporto tra le sezioni d'urto $\frac{\sigma(e^+e^- \to 3jet)}{\sigma(e^+e^- \to 2jet)}$ fornisce un metodo di misura della costante di accoppiamento α_s. Inoltre la misura della distribuzione angolare dei tre jet conferma l'ipotesi che il gluone abbia spin 1 e massa trascurabile.

Se si vuole confrontare il calcolo con una misura *inclusiva* della annichilazione $e^+e^- \to adroni$, l'integrale va esteso a tutto l'intervallo $0 \le x_q \le 1$, $0 \le x_{\bar{q}} \le 1$ e diverge per $x_g \to 0$.

$$\frac{1}{\sigma(e^+e^- \to q\bar{q})} \int_0^1 \frac{d^2\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} \; dx_q dx_{\bar{q}} = \text{fattore} \times \alpha_s(Q^2) \; \ln x_g$$

Per evitare la divergenza, come nel caso della QED, si introduce un limite inferiore $x_g = m_g/\sqrt{s}$ rappresentato dalla "massa del gluone". Comunque, come osservato in precedenza, questa divergenza si cancella con quella originata dall'interferenza tra i grafici $\gamma^* \to q\bar{q}$ e quelli con emissione e ri-assorbimento di gluoni e il contributo del processo $e^+e^- \to q\bar{q}g$ alla sezione d'urto inclusiva di produzione di jet risulta finito. Quindi la sezione d'urto $\sigma(e^+e^- \to adroni)$ si può sviluppare in serie di potenze della costante di accoppiamento della QCD

$$R(Q^2) = 3 \sum_q e_q^2 \; \left[1 + a_1 \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + a_2 \frac{\alpha_s^2(Q^2)}{\pi^2} + \ldots \right]$$

il valore dei parametri è $a_1 = 1$, $a_2 = 1.4$, ...

3.6.7 Collisioni tra adroni: processi Drell-Yan

I metodi perturbativi della QCD forniscono stime abbastanza accurate delle sezioni d'urto quando la costante di accoppiamento è piccola ovvero l'impulso trasferito nell'interazione è grande. Le collisioni tra adroni sono più complesse dei fenomeni che abbiamo esaminato perché coinvolgono effetti non perturbativi sia nello stato iniziale, le funzioni di struttura, che nello stato finale, la frammentazione dei partoni. Questo secondo aspetto non interviene nella produzione di coppie leptone-antileptone in collisioni di adroni, i processi Drell-Yan (capitolo ???), poiché lo stato finale $\ell^+\ell^-$ non è soggetto a interazione adronica.

Nel modello a partoni questi sono descritti dalla annichilazione di un quark con frazione x_1 dell'impulso longitudinale di un adrone, con un antiquark con frazione x_2 dell'altro adrone (Fig.3.70). Il 4-impulso trasferito nella annichilazione è pari alla massa invariante della coppia $\ell^+\ell^-$, $Q^2 = M^2$. La massa invariante e l'impulso $\vec{p} = \vec{p}_+ + \vec{p}_-$ sono legati ai valori di x e all'energia totale degli adroni $\sqrt{s}$

$$\frac{M^2}{s} = \tau = x_1 x_2 \qquad\qquad y = \frac{1}{2}\ln\frac{E + p_L}{E - p_L} = \frac{1}{2}\ln\frac{x_1}{x_2}$$

e quindi negli esperimenti si ha informazione sui valori di x_1 e x_2 (y è la rapidità della coppia $\ell^+\ell^-$). La sezione d'urto differenziale si ottiene come convoluzione delle funzioni di struttura degli adroni (capitolo ???)

$$\frac{d\sigma}{dM} = \frac{8\pi}{9}\frac{\alpha^2}{M^3}\int_\tau^1 \sum_i e_i^2 \left[F_q(x)F_{\bar{q}}(\tau/x) + F_q(\tau/x)F_{\bar{q}}(x)\right]\frac{dx}{x}$$

.

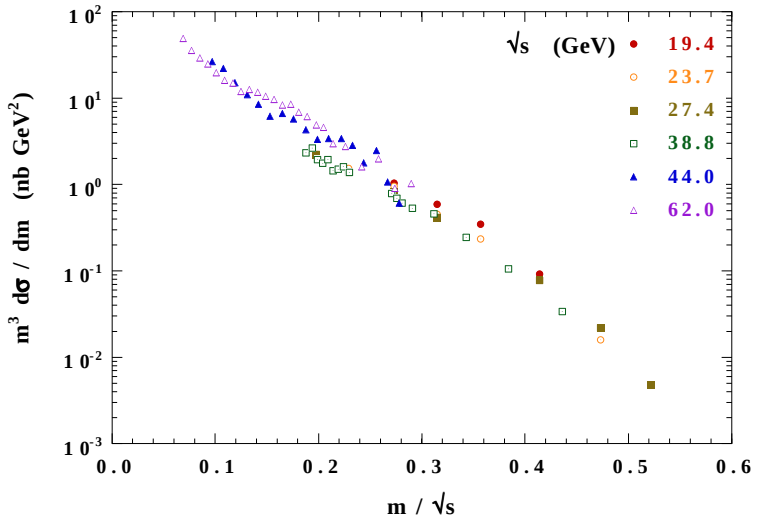


Figure 3.69: $pN \to \mu^+\mu^- X$: sezione d'urto differenziale $M^3\frac{d\sigma}{dM}$ in funzione di $\frac{m}{\sqrt{s}}$ per diversi valori di $\sqrt{s}$

In assenza di violazioni della legge di scala l'integrale è funzione della sola variabile adimensionale τ e ci si aspetta che il prodotto $M^3\frac{d\sigma}{dM}$ non dipenda dall'energia

della collisione $\sqrt{s}$ ma solo dal rapporto M^2/s. Dato che le funzioni di struttura variano con il logaritmo di M^2 questa è solo un'approssimazione. La Fig.3.69 mostra la sezione d'urto differenziale per produzione di coppie $\mu^+\mu^-$ in collisioni protone-nucleone per diversi valori dell'energia totale. I risultati degli esperimenti mostrano che

- la legge di scala $M^3 \frac{d\sigma}{dM} =$ funzione(τ) è una buona approssimazione, ma vi sono evidenti deviazioni;
- la coppia $\ell^+\ell^-$ può essere prodotta con impulso trasverso molto maggiore del valore intrinseco dei quark negli adroni ($\sqrt{2}p_q \sim 300$ MeV);
- quando l'impulso trasverso è elevato ($\gg 1\ GeV$), questo viene bilanciato dall'emissione di jet adronici;
- la sezione d'urto differenziale è maggiore, per un fattore $1.2 \div 1.4$, detto *K-factor*, di quella calcolata sulla base del semplice modello a partoni.

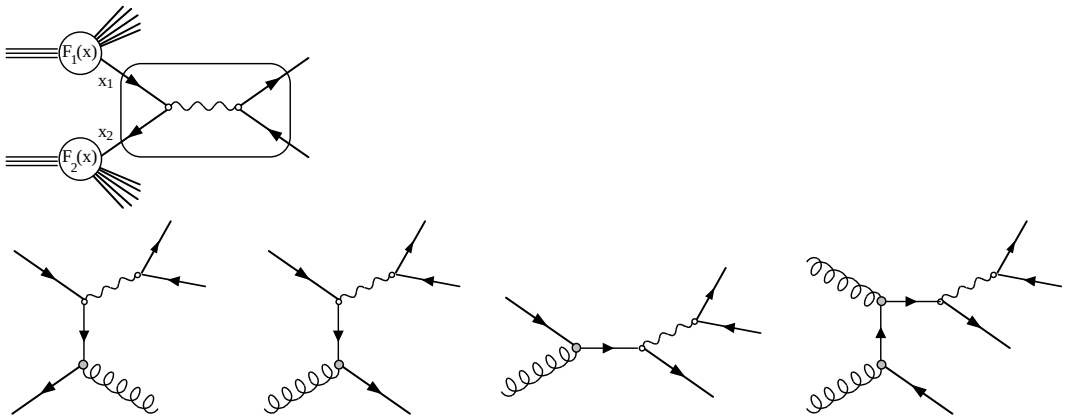


Figure 3.70: Produzione di coppie $\ell^+\ell^-$ in collisioni adroniche, contributi α^2, $\alpha^2\alpha_s$, $\alpha^2\alpha_s^2$

Questi effetti vengono interpretati nell'ambito della QCD e introducono correzioni alla sezione d'urto che si possono sviluppare in serie di potenze della costante di accoppiamento α_s. Infatti, oltre al processo di annichilazione $q\bar{q} \to \gamma^*$, intervengono l'annichilazione $q\bar{q} \to g\gamma^*$, l'interazione quark-gluone (antiquark-gluone) mediante l'effetto Compton $qg \to g\gamma^*$, al primo ordine in α_s; e l'interazione gluone-gluone $gg \to q\bar{q}\gamma^*$, al secondo ordine in α_s, ... come mostrato in Fig.3.70. In questi casi i partoni emessi nell'interazione frammentano e, se l'impulso trasverso è elevato, producono jet adronici distinti da quelli prodotti dalla frammentazione dei due adroni. Inoltre, poiché negli adroni bersaglio la densità dei gluoni è maggiore di quella degli antiquark, il contributo dei gluoni fa aumentare sensibilmente la sezione d'urto rispetto al valore calcolato senza correzioni $\mathcal{O}(\alpha_s)$. La situazione è diversa nel caso di fasci di mesoni o antiprotoni che contengono antiquark di valenza.

Nell'annichilazione $q\bar{q}$ vengono prodotte anche risonanze adroniche $J^{PC} = 1^{--}$, i mesoni vettori $J/\psi, \psi', \ldots \Upsilon, \Upsilon', \ldots$ che si osservano nella Fig.**??** e in effetti alcuni di questi mesoni sono stati scoperti come stati risonanti della sezione d'urto $pN \to \ell^+\ell^- X$. Queste risonanze non compaiono nei dati della Fig.3.69 perché l'effetto è diluito dalla scala e dalla risoluzione sperimentale. La produzione dei bosoni vettori $W^\pm$ e Z^0 è discussa nel capitolo ???.

3.6.8 Collisioni tra adroni: produzione di jet

Gran parte dell'informazione sulle collisioni tra adroni a energia elevata viene da misure fatte presso gli anelli di collisione protone-antiprotone $S\bar{p}pS$ a $\sqrt{s} = 630$ GeV, e $TeVatron$ a $\sqrt{s} = 1800$ GeV. La maggior parte delle collisioni inelastiche $\bar{p}p$ è caratterizzata dalla produzione di molte particelle, in media 30 adroni carichi e altrettanti neutri (Fig.3.55), emesse con impulso trasverso piccolo $p_T \sim 0.4$ GeV (Fig.3.56). La QCD non è in grado di fare previsioni sul meccanismo di produzione di particelle in interazioni con impulso trasferito piccolo perché il valore della costante di accoppiamento α_s è grande. In Fig.3.56 si osserva che all'aumentare dell'energia nel centro di massa aumenta sensibilmente la produzione di adroni con impulso trasverso $p_T \gg 0.4$ GeV. La distribuzione dell'energia trasversa prodotta in un'interazione, $E_T = \Sigma_i p_{Ti}$, ha valor medio $\langle E_T \rangle = np_T \simeq 15$ GeV e si estende fino a valori piuttosto elevati. In particolare, quando il rapporto $E_T/\sqrt{s}$ non è piccolo si osserva che l'energia trasversa è concentrata in due o più jet adronici. In questo caso la variabile che caratterizza la produzione di jet, $Q^2 \simeq p^2_{TJet}$, è grande e i metodi perturbativi della QCD permettono di calcolare la sezione d'urto.

La definizione sperimentale di jet e il calcolo teorico sono molto più complessi che non per l'annichilazione e^+e^- e i processi Drell-Yan perché

- la frammentazione dei jet si sovrappone a quella degli adroni nello stato iniziale e non è ovvio distinguere quali particelle sono originate in un processo o nell'altro;
- esiste una interazione $forte$ tra i partoni che partecipano a questi due fenomeni;
- la risoluzione sperimentale nella definizione dell'impulso dei jet è peggiore che nel caso dell'annichilazione e^+e^- o dei processi Drell-Yan in cui si può applicare un vincolo sulla conservazione del 4-impulso nell'annichilazione $q\bar{q} \leftrightarrow e^+e^-$;
- oltre all'annichilazione quark-antiquark, $q\bar{q} \to q\bar{q}$, contribuiscono alla sezione d'urto i processi di scattering $q\bar{q} \to q\bar{q}$, $qq \to qq$, $qg \to qg$, $gg \to gg$ al primo ordine in α_s, e molti altri agli ordini successivi;
- il valore del 4-impulso trasferito nell'interazione tra partoni, Q^2, non è definito in modo univoco.

Produzione di due jet

Quando l'energia trasversa totale è grande, il processo che avviene con maggiore frequenza è la produzione di due jet con impulso $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ e componente trasversa approssimativamente uguale $p_T = p\sin\theta_1 \simeq p\sin\theta_2$. Questi sono il risultato dello scattering elastico o dell'annichilazione partone-partone e della successiva frammentazione dei partoni nello stato finale. Se x_1 e x_2 sono le frazioni di impulso dei partoni nello stato iniziale (Fig.3.71), il riferimento dell'interazione partone-partone si muove con velocità $\beta = (x_1 - x_2)/(x_1 + x_2)$ rispetto al centro di massa dei due adroni e, dalla misura dell'energia e della direzione dei jet, si può studiare la dinamica dell'interazione partone-partone in termini della variabili di Mandelstam $\hat{s}$, $\hat{t}$, $\hat{u}$

$$\hat{s} = x_1 x_2 s \qquad \hat{t} = -\frac{\hat{s}}{2}(1 - \cos\theta^*) \qquad \hat{u} = -\frac{\hat{s}}{2}(1 + \cos\theta^*)$$

Se $p_T = (p_{T1} + p_{T2})/2$ è l'impulso trasverso e y_1, y_2, la rapidità dei jet (si usa di solito la pseudorapidità $y \simeq \eta = -\ln\tan\theta/2$ che implica solo misure di angolo)

$$x_1 = \frac{p_T}{\sqrt{s}}\,(e^{y_1} + e^{y_2}) \qquad x_2 = \frac{p_T}{\sqrt{s}}\,(e^{-y_1} + e^{-y_2}) \qquad \sin\theta^* = \frac{2p_T}{\sqrt{s}}$$

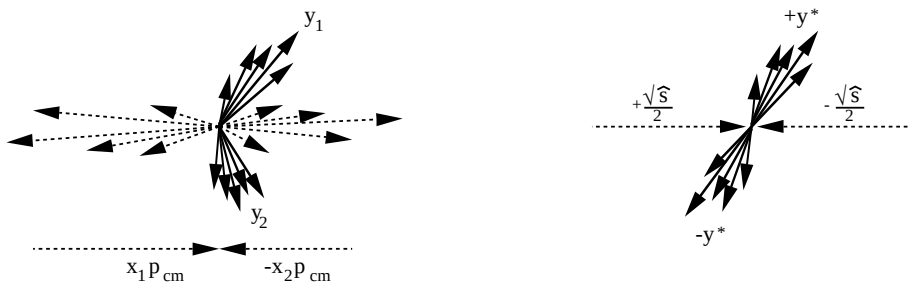


Figure 3.71: Produzione di *jet jet X* in collisioni adroniche

La sezione d'urto si ottiene come convoluzione delle densità dei partoni e delle sezioni d'urto invarianti dei processi elementari $ij \to kl$ che si possono esprimere in funzione dell'impulso trasverso e della rapidità $y^* = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\theta^*}{1-\cos\theta^*} = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$

$$E_k \frac{d^3\hat{\sigma}(ij \to kl)}{d\vec{p}_k} = 2\pi \frac{d^2\hat{\sigma}(ij \to kl)}{p_T dp_T dy^*}$$

In funzione dell'impulso trasverso e della rapidità dei jet si ha

$$d^4\sigma(p\bar{p} \to jet_1 jet_2 X) = \sum_{ijkl} f_i(x_1) f_j(x_2) \left[E_k \frac{d^3\hat{\sigma}(ij \to kl)}{d\vec{p}_k} \right] 2\pi p_T dp_T dy^* dx_1 dx_2$$

Se definiamo $\tau = x_1 x_2 s = \hat{s}/s$ e $\bar{y} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ la rapidità del sistema jet-jet, si ha $d\tau d\bar{y} = dx_1 dx_2$ e si ottiene la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d^3\sigma}{p_T dp_T dy_1 dy_2} = \frac{2\pi}{s} \sum_{ijkl} f_i(x_1) f_j(x_2) \left[E_k \frac{d^3\hat{\sigma}(ij \to kl)}{d\vec{p}_k} \right]$$

pari alla somma pesata per le densità dei partoni delle sezioni d'urto dei processi elementari. Questi sono molti e alcuni sono mostrati in Fig.3.72.

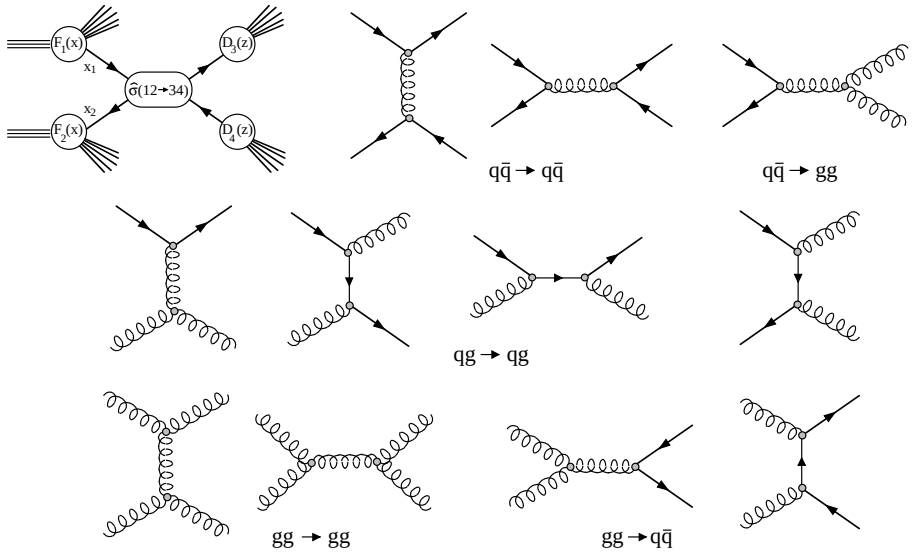


Figure 3.72: Alcuni processi partone-partone che contribuiscono alla sezione d'urto $p\bar{p} \to jet\ jet\ X\mathrm{P}$

Per impulsi trasversi $p_T/\sqrt{s} < 0.05$ sono più frequenti i processi iniziati da gluoni, per $0.05 < p_T/\sqrt{s} < 0.15$ quelli dovuti a interazioni quark-gluoni, mentre per $p_T/\sqrt{s} > 0.15$ sono prevalenti i processi di scattering elastico qq, $q\bar{q}$ o di annichilazione. Il contributo relativo è mostrato in Fig.3.73 per $\sqrt{s} = 1800$ GeV. Il rapporto tra le sezioni d'urto dei processi elementari è determinato dai fattori di colore degli accoppiamenti gg, gq, qq e $q\bar{q}$ e risulta

$$\hat{\sigma}_{gg} : \hat{\sigma}_{gq} : \hat{\sigma}_{qq} = 1 : \frac{4}{9} : \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

per cui la *densità effettiva* dei partoni è

$$F(x) = f_g(x) + \frac{4}{9}\sum_i \left[f_{qi}(x) + f_{\bar{q}i}(x)\right]$$

dove la somma è estesa ai sapori dei quark con $m_q < p_T$.

La misura della distribuzione angolare dei jet nel riferimento dell'interazione partone-partone conferma l'ipotesi che l'interazione sia mediata da gluoni di massa nulla e spin 1. Inoltre per impulsi trasversi elevati si può verificare con elevato potere risolutivo l'ipotesi che i quark siano puntiformi. La produzione di jet con impulso trasverso di 400 GeV corrisponde a un potere risolutivo $\delta r \sim \hbar/p_T \simeq 10^{-16}$ cm. Il limite attuale sulla dimensione spaziale dei quark è 10^{-17} cm.

La sezione d'urto differenziale in funzione di p_T si ottiene integrando su $dx_1 dx_2$ con il vincolo $x_1 x_2 = \tau = \hat{s}/s$

$$\frac{d\sigma}{p_T dp_T} = \int \sum_{ijkl} f_i(x_1) f_j(x_2) \left[E_k \frac{d^3\hat{\sigma}(ij \to kl)}{d\vec{p}_k}\right] 2\pi\delta(x_1 x_2 s - \hat{s}) dy^* dx_1 dx_2$$

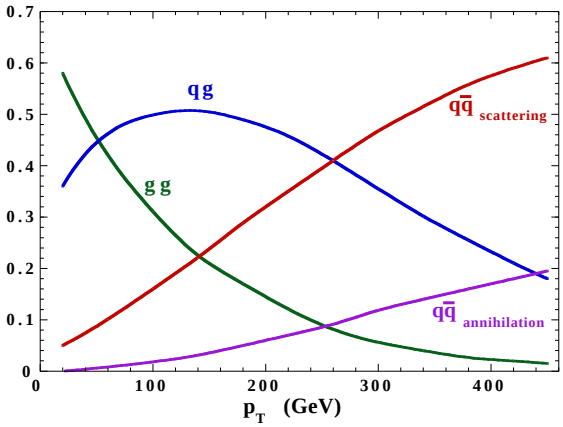


Figure 3.73: Contributi dell'interazione partone-partone alla sezione d'urto inclusiva $p\bar{p} \to jetX$ per $\sqrt{s} = 1800$ GeV

Produzione multipla di jet

Nelle interazioni con energia trasversa elevata si osserva anche la produzione di tre, quattro, ...jet. L'identificazione dei jet non è molto più complessa che nel caso precedente, ma aumenta l'incertezza nella definizione delle variabili cinematiche dei jet, impulso trasverso e rapidità. Diventano però molto più complessi i calcoli in QCD perturbativa perchè aumenta molto il numero di processi elementari che contribuiscono alla sezione d'urto. Inoltre vi è una ambiguità nella definizone del valore di Q^2 da utilizzare nel calcolo. Se, ad esempio, il calcolo è effettuato all'ordine α_s^3 la sezione d'urto è

$$\sigma = A\alpha_s^2(Q^2) + B\alpha_s^3(Q^2) + \dots$$

Nel caso di produzione di due jet possiamo definire $Q^2 = p_T^2$, oppure $Q^2 = \hat{s}/4$, oppure ...e se modifichiamo la definizione $Q^2 \to zQ^2$ cambia il valore di α_s secondo la dipendenza da $\ln Q^2$

$$\alpha_s^2(zQ^2) = \alpha_s^2(Q^2) + h_2(z)\alpha_s^3(Q^2) + \dots \qquad \alpha_s^3(zQ^2) = \alpha_s^3(Q^2) + h_3(z)\alpha_s^4(Q^2) + \dots$$

per cui il risultato del calcolo all'ordine α_s^3 cambia in

$$\sigma' = A\alpha_s^2(Q^2) + [B + h_2(z)]\ \alpha_s^3(Q^2) + \dots$$

Il confronto con i risultati delle misure oppure la definizione di Q^2 che minimizza la funzione $h_2(z)$ possono aiutare a risolvere l'ambiguità. Nel caso di produzione di tre, quattro, ...jet occorre conoscere il risultato del calcolo all'ordine α_s^4 e questo diventa molto difficile.

Produzione inclusiva di jet

Per confrontare i risultati delle misure con i calcoli di QCD conviene riferirsi alla produzione inclusiva di jet $p\bar{p} \to jet\ X$. La Fig.3.74 mostra la sezione d'urto inclusiva $d^2\sigma(p\bar{p} \to jet\ X)/dp_T dy$ in funzione dell'impulso trasverso in un intervallo di rapidità intorno a $y = 0$ misurata a diversi valore di $\sqrt{s}$. Il calcolo QCD è effettuato all'ordine α_s^3 e le densità dei partoni sono estratte dalle misure di diffusione inelastica leptone-nucleone che coprono l'intervallo di x e Q^2 mostrato in Fig.3.63 e estrapolate con le equazioni di evoluzione. L'accordo è molto soddisfacente su più di otto ordini di grandezza.

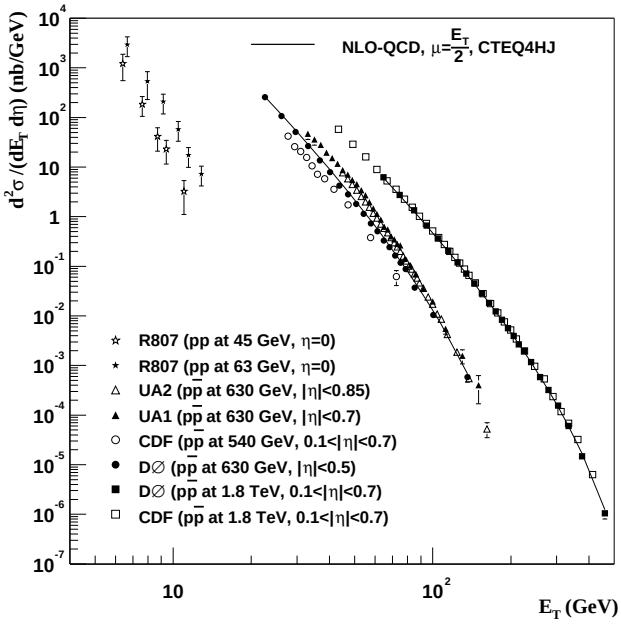


Figure 3.74: Sezione d'urto di produzione inclusiva di jet in collisioni $p\bar{p}$ in funzione dell'impulso trasverso del jet (S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004)

3.6.9 Collisioni tra adroni: produzione di fotoni

Alcune delle incertezze sia sperimentali che teoriche dell'analisi della produzione di jet vengono ridotte nel caso di produzione di fotoni con grande impulso trasverso, $p\bar{p} \to \gamma X$. La QCD prevede che la produzione associata di jet adronici e fotoni con $p_{T\gamma} \simeq p_{TJ}$ sia mediata, al primo ordine in α_s, dai processi elementari di annichilazione $q\bar{q} \to g\gamma$ e scattering Compton $gq \to q\gamma$ con sezione d'urto proporzionale a $\alpha\alpha_s$. Le semplificazioni dell'analisi sono

- l'energia del fotone emesso nell'interazione viene misurata direttamente negli esperimenti senza le incertezze dovute alla frammentazione;

- il numero di processi elementari che contribuiscono al primo ordine in α_s è fortemente ridotto rispetto al caso di produzione di jet;

- e, per la stessa ragione, il calcolo dei contributi alla sezione d'urto all'ordine $\alpha_s^2, \ldots$ è notevolmente semplificato.

La Fig.3.75 mostra la sezione d'urto inclusiva $d^2\sigma(p\bar{p} \to \gamma X)/dp_T dy$ in funzione dell'impulso trasverso in un intervallo di rapidità intorno a $y = 0$ misurata a diversi valore di $\sqrt{s}$. Per confronto è riportato il calcolo QCD all'ordine α_s^3. Anche in questo caso l'accordo su più di sei ordini di grandezza è molto soddisfacente. Il confronto tra Fig.3.74 e Fig.3.75 permette di stimare il rapporto α_s/α in funzione di Q^2.

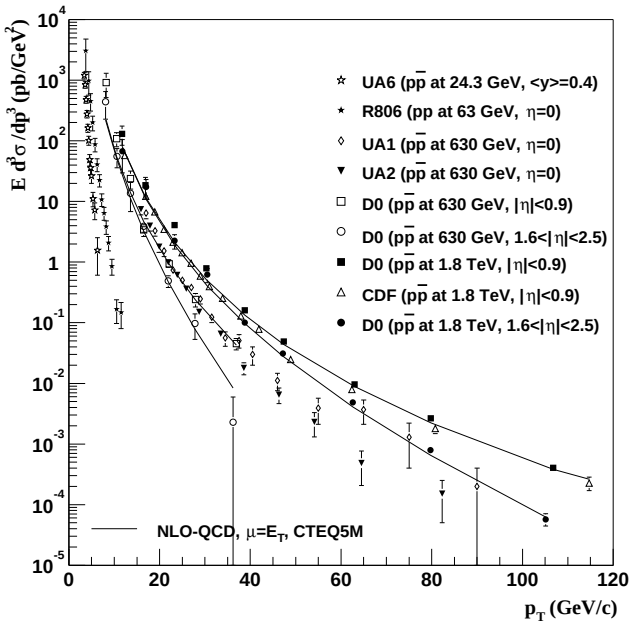


Figure 3.75: Sezione d'urto di produzione di fotoni in collisioni $p\bar{p}$ in funzione dell'impulso trasverso (S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004)

3.6.10 La misura di α_s

La costante di accoppiamento dell'interazione adronica, come la costante di struttura fine e la costante universale di Fermi, è un parametro libero del modelle teorico e quindi va determinato sperimentalmente. La QCD prescrive una precisa dipendenza dal 4-impulso trasferito nell'interazione che va verificata e fa previsioni su diversi fenomeni che permettono di determinare il valore di α_s. Alcuni sono stati descritti, altri sono qui elencati

- decadimenti adronici del leptone τ: $\tau \to \nu_\tau h$ (Q = 1.77 GeV);

- evoluzione delle funzioni di struttura del nucleone misurate in esperimenti di diffusione inelastica $eN \to eX$, $\mu N \to \mu X$, $\nu N \to \mu X$ (Q $= 2 \div 50$ GeV);
- produzione di jet nella diffusione inelastica $ep \to eX$ (Q $= 2 \div 50$ GeV);
- analisi dei livelli energetici degli stati legati $q\bar{q}$ (*quarkonio*) (Q $= 1.5 \div 5$ GeV);
- decadimenti dei mesoni vettori Υ, Υ' (Q $= 5$ GeV);
- sezione d'urto di annichilazione $e^+e^- \to$ *adroni* (Q $= 10 \div 200$ GeV);
- funzione di frammentazione dei jet prodotti in $e^+e^- \to$ *adroni* (Q $= 10 \div 200$ GeV);
- decadimenti adronici del bosone Z^0 (Q $= 91$ GeV);
- produzione di jet in interazioni pp, $p\bar{p}$ (Q $= 50 \div 300$ GeV);
- produzione di fotoni in interazioni pp, $p\bar{p}$ (Q $= 30 \div 150$ GeV).

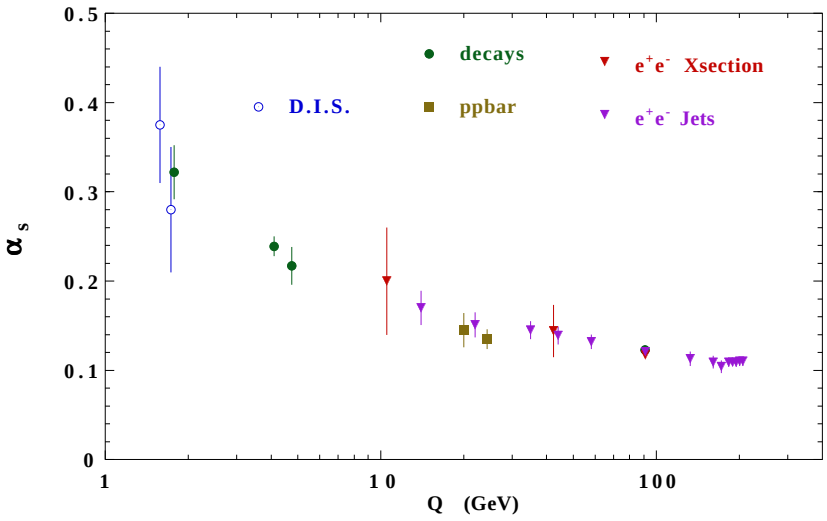


Figure 3.76: Costante di accoppiamento α_s in funzione dell'energia

Alcuni risultati sono mostrati in Fig.3.76 nell'intervallo $2 < Q < 200$ GeV. I risultati mostrano un chiaro andamento in accordo con quello previsto dalla teoria. Il valore quotato alla massa del bosone Z^0 è $\alpha_s(m_Z^2) = 0.120 \pm 0.003$

3.7 Interazione elettrodebole

Le particelle *elementari*, leptoni e quark, sono fermioni di spin 1/2. Le interazioni tra queste sono mediate da campi di bosoni di spin 1 e sono descritte dal prodotto scalare della corrente fermionica e del campo di interazione. Nel caso dell'interazione

elettromagnetica questo è $eJ \cdot A$; e è la carica elettrica; $J_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) sono le componenti della corrente fermionica (appendice 4.18); A_μ sono le componenti del campo elettromagnetico. (Qui e nel seguito $\hbar = 1$, $c = 1$, $e^2 = 4\pi\alpha$). Nel caso dell'interazione debole ci sono due correnti J^+_μ e J^-_μ, ciascuna con una componente vettoriale e una assiale. Queste agiscono come gli operatori di isospin 1/2 $\tau^\pm$ e sono accoppiate a due campi W^-_μ e W^+_μ che trasmettono carica elettrica. Il fotone ha massa nulla, i bosoni $W^\pm$ hanno massa.

L'interazione elettromagnetica è invariante per una trasformazione che dipende da un solo parametro, $U = e^{i\alpha(x)q}$, in cui q è una carica elettrica e $\alpha(x)$ è una funzione reale delle coordinate spazio-temporali. L'analoga trasformazione per l'interazione debole potrebbe essere quella generata dall'operatore di isospin 1/2, $U = e^{i\Sigma_k \alpha_k \tau_k}$ ($k = 1, 2, 3$) ma, per completare la simmetria, manca la componente τ_3 associata ad un campo debole neutro.

L'esistenza di un campo debole neutro è stata ipotizzata da Sheldon Glashow [13] nel 1961. In effetti nell'interazione elettromagnetica la sezione d'urto di annichilazione $e^+e^- \to \gamma\gamma$, descritta dal primo grafico in Fig.3.77 (appendice 4.21), dà un risultato finito in accordo con i risultati sperimentali, mentre il calcolo della sezione d'urto per l'analogo processo per interazione debole $\nu\bar{\nu} \to W^+W^-$ dà un risultato che cresce con il quadrato dell'energia, $\sigma \propto s$, e che diverge per $\sqrt{s} \gg 4M_W^2$. Infatti in questo caso il propagatore del campo debole non interviene a modificare l'accoppiamento a contatto. Si può invece ottenere un risultato finito se si ipotizza che, oltre al secondo grafico in Fig.3.78, esista l'accoppiamento con un campo debole neutro, Z^0, descritto da un propagatore con massa $M_Z \approx M_W$.

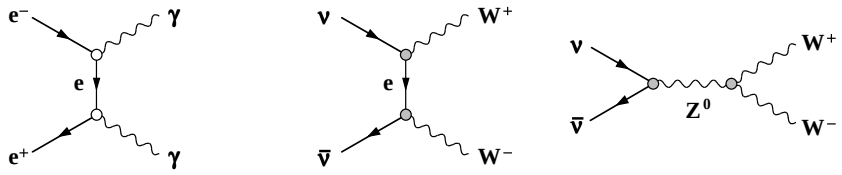


Figure 3.77: Grafici di Feynman dell'annichilazione $e^+e^- \to \gamma\gamma$ e $\nu\bar{\nu} \to W^+W^-$

Lo stesso effetto si ha per l'annichilazione $e^+e^- \to W^+W^-$ in cui intervengono i grafici mostrati in Fig.3.78: si ottiene un risultato finito per $s \to \infty$ aggiungendo il contributo di un campo debole neutro. In questo caso la condizione che la sezione d'urto non diverga definisce una relazione tra le due costanti di accoppiamento, la carica elettrica elementare e la costante universale di Fermi.

3.7.1 Isospin e ipercarica debole

Da questi argomenti e tenendo conto che la carica elettrica interviene direttamente nell'accoppiamento dei fermioni con il campo elettromagnetico mentre la *stessa* carica è trasmessa da un fermione all'altro nelle interazioni con i campi deboli, si può

[13] premio Nobel per la fisica nel 1979

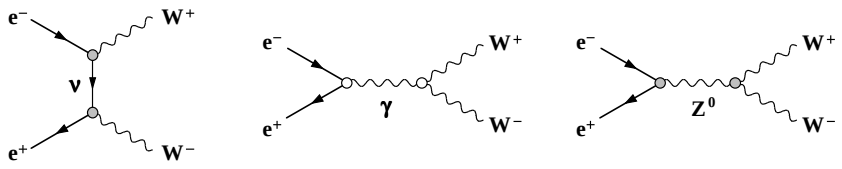


Figure 3.78: Grafici di Feynman dell'annichilazione $e^+e^- \to W^+W^-$

ipotizzare che esista una simmetria più generale che descrive le due interazioni. Lo studio di questa simmetria è stato fatto da Steven Weinberg e Abdus Salam [14] che nel 1967 hanno messo le basi della teoria dell'interazione elettro-debole.

Per individuare le trasformazioni che generano questa simmetria è opportuno ricordare che

- quark e leptoni carichi, $\ell^{\pm}$, si accoppiano con il campo elettromagnetico;
- tutti i fermioni si accoppiano con il campo debole;
- quark e leptoni carichi hanno due stati di elicità, $Left$ e $Right$;
- i neutrini sono autostati di elicità, ν_L e $\bar{\nu}_R$;
- l'interazione elettromagnetica non dipende dallo stato di elicità dei fermioni;
- l'interazione debole non dipende dallo stato di carica elettrica dei fermioni;
- l'interazione debole agisce su fermioni L e antifermioni R;
- rispetto all'interazione debole, quark e leptoni si possono rappresentare con doppietti caratterizzati dal *sapore*; la carica elettrica distingue i componenti di ciascun doppietto

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}$$

  e la stessa rappresentazione si ha per gli antifermioni.

Queste caratteristiche si possono riassumere introduncendo l'operatore di *isospin debole*, $\vec{I}$, che genera doppietti di fermioni L e singoletti di fermioni R

doppietto	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$
singoletto	e^-_R	μ^-_R	τ^-_R	u_R d'_R	c_R s'_R	t_R b'_R

La connessione tra la simmetria $SU(2)$ generata dall'isospin debole e la simmetria $U(1)$ generata dalla carica elettrica è stabilita da una relazione analoga a quella di

[14] premi Nobel per la fisica nel 1979

Gell-Mann e Nishijima tra carica elettrica, *ipercarica debole* Y e terza componente dell'isospin debole

$$Q = Y/2 + I_3$$

I generatori della simmetria dell'ipercarica debole e dell'isospin debole sono rispettivamenete una costante e le matrici di Pauli

$$U(1)_Y \qquad \mathbf{1} \qquad\qquad SU(2)_L \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per i fermioni L e R gli autovalori sono ($e = \mu = \tau$, $u = c = t$, $d' = s' = b'$)

	ν_L	e_L	e_R	u_L	d'_L	u_R	d'_R
I	$1/2$	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$	0	0
I_3	$+1/2$	$-1/2$	0	$+1/2$	$-1/2$	0	0
Y	-1	-1	-2	$+1/3$	$+1/3$	$+4/3$	$-2/3$
Q	0	-1	-1	$+2/3$	$-1/3$	$+2/3$	$-1/3$

gli autovalori relativi agli antifermioni hanno segno opposto.

La simmetria è quindi $U(1)_Y \otimes SU(2)_L$. $U(1)_Y = e^{i\alpha Y}$ descrive l'interazione tra una corrente fermionica J_Y e un campo bosonico B_Y con una costante d'accoppiamento g_Y. $SU(2)_L = e^{i\Sigma_k \alpha_k I_k}$ descrive l'interazione tra tre correnti J^k_I e tre campi B^k_I con una seconda costante d'accoppiamento g_I. L'interazione *corrente* $\cdot$ *campo* prevista dalla simmetria è

$$\frac{1}{2} g_Y J^Y B^Y + g_I \left(J^1 B^1 + J^2 B^2 + J^3 B^3 \right)$$

Esistono quindi due correnti fermioniche cariche associate agli operatori $I_1 \pm i I_2$

$$J^+_\mu = (\nu\ e)_L\, \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L = (\nu\ e)_L\, \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}_L = \nu_L \gamma_\mu e_L$$

$$J^-_\mu = (\nu\ e)_L\, \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L = (\nu\ e)_L\, \gamma_\mu \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \end{pmatrix}_L = e_L \gamma_\mu \nu_L$$

e due correnti fermioniche neutre associate a I_3 e Y

$$J^3_\mu = (\nu\ e)_L\, \gamma_\mu \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L = (\nu\ e)_L\, \gamma_\mu \begin{pmatrix} \nu \\ -e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2} \nu_L \gamma_\mu \nu_L - \frac{1}{2} e_L \gamma_\mu e_L$$

$$J^Y_\mu = (\nu\ e)_L\, \gamma_\mu \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L + e_R\, (-2)\, \gamma_\mu e_R = -\nu_L \gamma_\mu \nu_L - e_L \gamma_\mu e_L - 2 e_R \gamma_\mu e_R$$

La corrente elettromagnetica, associata all'operatore Q, è rappresentata dalla combinazione

$$J^{em}_\mu = \frac{1}{2} J^Y_\mu + J^3_\mu = -e_L \gamma_\mu e_L - e_R \gamma_\mu e_R$$

3.7.2 Angolo di Weinberg

Le tre correnti J^+, J^-, J^{em}, sono associate alle interazioni debole e elettromagnetica se si identificano i campi corrispondenti come combinazioni dei campi di $U(1)_Y \otimes SU(2)_L$

- due campi carichi

$$W^+ = \frac{B^1 + iB^2}{\sqrt{2}} \qquad W^- = \frac{B^1 - iB^2}{\sqrt{2}}$$

- due campi neutri

$$A = B^Y \cos\theta_W + B^3 \sin\theta_W \qquad Z = -B^Y \sin\theta_W + B^3 \cos\theta_W$$

Le interazioni mediate dai campi carichi sono

$$J^1 B^1 + J^2 B^2 = \frac{J^+ + J^-}{2}\frac{W^+ + W^-}{\sqrt{2}} + \frac{J^+ - J^-}{2i}\frac{W^+ - W^-}{\sqrt{2}i} = \frac{J^+ W^- + J^- W^+}{\sqrt{2}}$$

Le interazioni mediate dai campi neutri sono

$$\frac{1}{2} g_Y J^Y B^Y + g_I J^3 B^3 = \frac{1}{2} g_Y J^Y (A\cos\theta_W - Z\sin\theta_W) + g_I J^3 (A\sin\theta_W + Z\cos\theta_W) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} g_Y J^Y \cos\theta_W + g_I J^3 \sin\theta_W\right) A + \left(-\frac{1}{2} g_Y J^Y \sin\theta_W + g_I J^3 \cos\theta_W\right) Z$$

Il primo termine rappresenta l'interazione elettromagnetica $e(\frac{1}{2}J^Y + J^3)\cdot A$. Quindi si ottiene una relazione tra le costanti di interazione g_I e g_Y e la carica elementare

$$g_Y \cos\theta_W = g_I \sin\theta_W = e \qquad \frac{g_Y}{g_I} = \tan\theta_W$$

L'angolo con cui sono combinati i due campi neutri è chiamato *angolo di Weinberg*. Il secondo termine si può esprimere in funzione della corrente elettromagnetica

$$-\frac{g_I}{\cos\theta_W}\sin^2\theta_W (J^{em} - J^3) + \frac{g_I}{\cos\theta_W}\cos^2\theta_W J^3 = \frac{g_I}{\cos\theta_W}\left(J^3 - J^{em}\sin^2\theta_W\right)$$

Quindi i quattro tipi di interazione sono (Fig.3.79)

$$eJ^{em}A + \frac{g_I}{\sqrt{2}}\left(J^+ W^- + J^- W^+\right) + \frac{g_I}{\cos\theta_W}\left(J^3 - J^{em}\sin^2\theta_W\right) Z$$

e dipendono solo da due parametri: la carica elementare e la costante di accoppiamento g_I. L'angolo di Weinberg è legato alle due costanti di accoppiamento dalla relazione $g_I \sin\theta_W = e$.

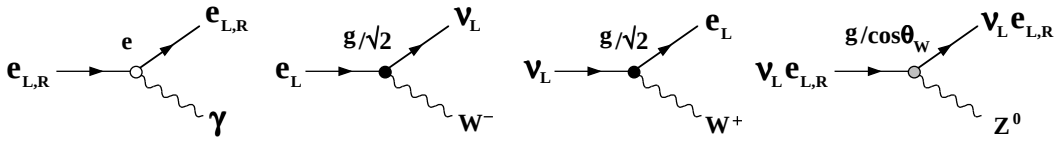


Figure 3.79: Rappresentazione delle interazioni elettro-deboli, $g \sin\theta_W = e$

Le relazioni precedenti definiscono i valori di massa dei bosoni $W^{\pm}$ e Z^0. Gli elementi di matrice dipendono dal prodotto delle costanti per il propagatore. Introducendo i propagatori, nel limite di interazione a contatto ($q^2 \ll M^2$) si ha:

$$\frac{g_I}{\sqrt{2}} \frac{1}{q^2 + M_W^2} \frac{g_I}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{4G}{\sqrt{2}} \qquad \frac{g_I}{\cos\theta_W} \frac{1}{q^2 + M_Z^2} \frac{g_I}{\cos\theta_W} \rightarrow \frac{8G}{\sqrt{2}}$$

$$M_W^2 = \frac{\sqrt{2} g_I^2}{8G} = \frac{\sqrt{2}\pi\alpha}{2G \sin^2\theta_W} \qquad M_Z^2 = \frac{\sqrt{2} g_I^2}{8G \cos^2\theta_W} = \frac{M_W^2}{\cos^2\theta_W}$$

L'accoppiamento dei fermioni con il campo debole neutro è definito dagli autovalori di $I_3 - Q \sin^2\theta_W$ (gli autovalori relativi agli antifermioni hanno segno opposto)

	ν	e	u	d'
$g_L = I_3 - Q \sin^2\theta_W$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W$	$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W$
$g_R = -Q \sin^2\theta_W$	0	$+\sin^2\theta_W$	$-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W$	$\frac{1}{3}\sin^2\theta_W$

3.7.3 Interazioni dei neutrini

La teoria di Weinberg e Salam prevede che esistano interazioni di neutrini del tipo $\nu_\mu N \rightarrow \nu_\mu X$, $\bar{\nu}_\mu N \rightarrow \bar{\nu}_\mu X$, dette *interazioni di corrente neutra*, con sezione d'urto simile a quella di interazioni di corrente carica (capitolo ???). Le misure sono più difficili che nel caso di interazioni $\nu_\mu N \rightarrow \mu^- X$, $\bar{\nu}_\mu N \rightarrow \mu^+ X$ perché non si conosce l'energia del neutrino incidente e non si osseva il neutrino diffuso.

La prima conferma dell'esistenza di queste interazioni si è avuta nel 1973 osservando appunto interazioni di neutrini senza l'emissione di muoni. Il confronto tra interazioni per corrente carica, CC, in cui si osserva sia il muone che lo stato X in cui frammenta il nucleone bersaglio, e interazioni per corrente neutra, NC, in cui non si osserva il neutrino, ma solo lo stato X, permette di fare ipotesi sul neutrino non osservato nello stato finale. Il valore dell'angolo di Weinberg è stato determinato misurando il rapporto tra le sezioni d'urto di neutrini e antineutrini.

Nel caso di interazioni su nuclei si hanno contributi dovuti alla presenza sia di quark che di antiquark nel bersaglio. Più semplice è l'interpretazione delle misure di sezione d'urto usando come bersaglio gli elettroni atomici perché il bersaglio è costituito solo da fermioni. In questo caso però le misure sono più difficili perché la sezione d'urto, proporzionale a $s = 2m_e E_\nu$, è molto più piccola. L'osservazione dell'elettrone e la misura dell'energia e dell'angolo con cui è emesso permette di distinguere le interazioni per corrente neutra.

La sezione d'urto differenziale $d\sigma/dy$ delle interazioni elastiche

$$\nu_\mu e^- \to \nu_\mu e^- \qquad\qquad \bar{\nu}_\mu e^- \to \bar{\nu}_\mu e^-$$

è definita dalla configurazione di elicità. In diverse configurazioni di elicità pesano in modo diverso gli autovalori di $I_3 - Q\sin^2\theta_W$

$$\begin{array}{llll} \nu_L e_L & \Leftarrow \Rightarrow & \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W\right] & \nu_L e_R \quad \Leftarrow \Leftarrow \quad \frac{1}{2}\left[0 + \sin^2\theta_W\right] \\ \bar{\nu}_R e_L & \Rightarrow \Rightarrow & -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W\right] & \bar{\nu}_R e_R \quad \Rightarrow \Leftarrow \quad -\frac{1}{2}\left[0 + \sin^2\theta_W\right] \end{array}$$

e, pesando in contributi per le distribuzioni angolari, si ha:

$$\frac{d\sigma_\nu}{dy} = \frac{4G^2}{\pi}\, 2m_e E_\nu \left(\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\sin^2\theta_W\right]^2 (1-y)^2\right)$$

$$\frac{d\sigma_{\bar{\nu}}}{dy} = \frac{4G^2}{\pi}\, 2m_e E_{\bar{\nu}} \left(\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W\right]^2 (1-y)^2 + \frac{1}{4}\left[\sin^2\theta_W\right]^2\right)$$

Per cui il rapporto tra le sezioni d'urto dipende solo dall'angolo di Weinberg

$$\frac{\sigma(\bar{\nu}e)}{\sigma(\nu e)} = \frac{1}{3}\,\frac{1 - 4\sin^2\theta_W + 16\sin^4\theta_W}{1 - 4\sin^2\theta_W + (16/3)\sin^4\theta_W}$$

Il risultato più preciso si ottiene misurando i rapporti delle sezioni d'urto su nucleoni $\sigma_{NC}(\nu_\mu N \to \nu_\mu X)/\sigma_{CC}(\nu_\mu N \to \mu^- X)$ e $\sigma_{NC}(\bar{\nu}_\mu N \to \bar{\nu}_\mu X)/\sigma_{CC}(\bar{\nu}_\mu N \to \mu^+ X)$. In questo caso vanno introdotti gli autovalori di $I_3 - Q\sin^2\theta_W$ dei diversi sapori di quark e antiquark pesati per le relative densità partoniche. Il valore dell'angolo di Weinberg ottenuto da queste misure è

$$\sin^2\theta_W = 0.226 \pm 0.004$$

La misura dell'angolo di Weinberg fissa i valori della massa dei bosoni: $M_W \simeq 80\ GeV$, $M_Z \simeq 90\ GeV$ e dell'accoppiamento dei bosoni con coppie fermione-antifermione. Le larghezze di decadimento sono

$$W \to f_a \bar{f}_b \qquad \frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{g_I^2}{2}\,|U_{ab}|^2 N_c\,\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{2M_W}\,p_f^2[F(\theta)]^2$$

$$Z \to f_a \bar{f}_a \qquad \frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{g_I^2}{\cos^2\theta_W}\left[g_L^2 + g_R^2\right] N_c\,\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{2M_Z}\,p_f^2[F(\theta)]^2$$

U_{ab} sono i parametri della matrice CKM (per i leptoni $U_{ab} = 1$), N_c è la molteplicità del colore ($N_c = 3$ per i quark e $N_c = 1$ per i leptoni), p_f è l'impulso dei fermioni, $F(\theta) = (1 - \cos\theta)/2$ è la distribuzione angolare e θ è l'angolo tra lo spin del bosone e la direzione del fermione. I possibili accoppiamenti sono

W^+	$\nu_e e^+$	$\nu_\mu \mu^+$	$\nu_\tau \tau^+$	$u\bar{d}$	$c\bar{d}$	$t\bar{d}$
				$u\bar{s}$	$c\bar{s}$	$t\bar{s}$
				$u\bar{b}$	$c\bar{b}$	$t\bar{b}$
Z^0	$e^- e^+$	$\nu_e \bar{\nu}_e$	$\mu^- \mu^+$	$\nu_\mu \bar{\nu}_\mu$	$\tau^- \tau^+$	$\nu_\tau \bar{\nu}_\tau$
	$u\bar{u}$	$c\bar{c}$	$t\bar{t}$	$d\bar{d}$	$s\bar{s}$	$b\bar{b}$

e quelli coniugati di carica per il bosone W^-. Il quark t ha massa maggiore di quella dei bosoni W e Z e quindi gli stati finali con il quark t non sono accessibili. Per tutte le altre coppie fermione-antifermione si ha $m_f \ll M$ per cui $p_f \simeq M/2$. Le larghezze di decadimento sono

$$\Gamma(W \to f_a \bar{f}_b) = \frac{G M_W^3}{6\pi\sqrt{2}} \, |U_{ab}|^2 N_c \qquad\qquad \Gamma(Z \to f_a \bar{f}_a) = \frac{G M_Z^3}{3\pi\sqrt{2}} \left[g_L^2 + g_R^2 \right] N_c$$

Per il bosone $W^\pm$ si ha $\Gamma_W^{\ell\nu} = \Gamma(W \to \ell\bar{\nu}) = G M_W^3/6\pi\sqrt{2} \simeq 0.23 \; GeV$. Tenendo conto che l'accoppiamento debole è universale e che la matrice CKM è unitaria si ha

$$\sum_q \Gamma(W \to q\bar{q}) = 6 \; \Gamma_W^{\ell\nu} \qquad\qquad \Gamma_W = 9 \; \Gamma_W^{\ell\nu} = 2.1 \; GeV$$

Per il bosone Z^0 si ha $\Gamma_Z^{\nu\nu} = \Gamma(Z \to \nu\bar{\nu}) = G M_Z^3/12\pi\sqrt{2} \simeq 0.17 \; GeV$. La larghezza di decadimento negli altri stati finali dipende dall'angolo di Weinberg tramite le costanti $g_L^2 + g_R^2$ che sono

$\nu\bar{\nu}$	$\ell\bar{\ell}$	$u\bar{u}$	$d\bar{d}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \sin^2\theta_W + 2\sin^4\theta_W$	$\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W + \frac{8}{9}\sin^4\theta_W$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\sin^2\theta_W + \frac{2}{9}\sin^4\theta_W$

La teoria prevede: $\Gamma_Z^{\ell\ell} \simeq 0.5 \; \Gamma_Z^{\nu\nu}$, $\Gamma_Z^{uu} \simeq 1.8 \; \Gamma_Z^{\nu\nu}$, $\Gamma_Z^{dd} \simeq 2.3 \; \Gamma_Z^{\nu\nu}$, e quindi

$$\Gamma_Z \simeq 15 \; \Gamma_Z^{\nu\nu} = 2.5 \; GeV$$

3.7.4 Scoperta dei bosoni $W^\pm$ e Z^0

I bosoni $W^\pm$ e Z^0 possono essere prodotti nell'annichilazione quark-antiquark mediante processi Drell-Yan (capitolo ???) come illustrato in Fig.3.80. Dal valore dell'angolo di Weinberg misurato in esperimenti di diffusione di neutrini di alta energia si sapeva alla fine degli anni '70 che i valori di massa erano circa $80 - 90 \; GeV$. La soglia di produzione con esperimenti a bersaglio fisso, ad esempio in interazioni protone-protone, è $E_p > M^2/2m_p \simeq 4000 \; GeV$ cioè 10 volte maggiore dell'energia del più grande protosincrotrone allora in funzione. Carlo Rubbia [15] propose di convertire il protosincrotrone del CERN in un anello di collisione antiprotone-protone per poter raggiungere l'energia sufficiente a produrre i bosoni $W^\pm$ e Z^0. Il problema di produrre e immagazzinare nell'anello di collisione un fascio sufficientemente intenso di antiprotoni fu brillantemente risolto da Symon van der Meer [16].

La sezione d'urto di produzione di bosoni $W^\pm$ di massa M nell'annichilazione quark-antiquark con energia totale $\sqrt{s_{ab}}$ è

$$\sigma(q_a\bar{q}_b \to W) = \frac{4\pi(\hbar c)^2}{s_{ab}/4} \; \frac{1}{3} \; \frac{1}{3} \; \frac{3}{4} \; \frac{\Gamma_{ab}\Gamma/4}{(\sqrt{s_{ab}} - M)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

[15] premio Nobel per la fisica nel 1984
[16] premio Nobel per la fisica nel 1984

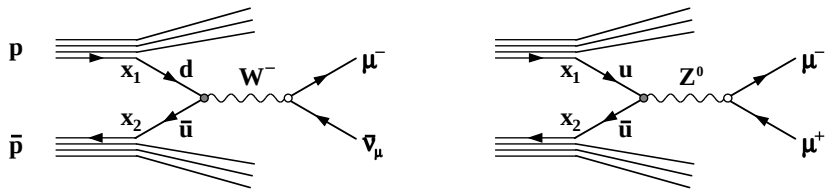


Figure 3.80: Produzione dei bosoni W^- e Z^0 in interazioni antiprotone-protone

il primo fattore 1/3 perché solo quark-antiquark dello stesso colore possono produrre uno stato incolore, il secondo fattore 1/3 perché solo gli stati di spin 1 di quark e antiquark contribuiscono, la media sugli stati di spin è $\frac{2J+1}{(2s+1)(2s+1)} = \frac{3}{4}$. Approssimando $s_{ab} \simeq M^2$ nella formula di Breit-Wigner ($\hbar = 1, c = 1$)

$$\sigma(q_a\bar{q}_b \to W) = \frac{4\pi}{3M^2}\,\frac{\Gamma_{ab}}{\Gamma}\frac{M^2(\Gamma/2)^2}{(s_{ab}-M^2)^2+M^2(\Gamma/2)^2} \simeq \frac{\pi^2}{3M}\,\Gamma_{ab}\,\delta(s_{ab}-M^2)$$

nota: $\lim_{a\to 0}\ \frac{a^2}{(s-m^2)^2+a^2} = \frac{\pi a}{2}\ \delta(s-m^2)$

Se $\vec{p}$ è l'impulso del protone, $-\vec{p}$ quello dell'antiprotone, $\sqrt{s} \simeq 2p$ l'energia totale e $x_1 p$, $-x_2 p$ gli impulsi di quark e antiquark, il quadrato dell'energia totale è $s_{ab} = x_1 x_2 s$. Introducendo le densità di quark e antiquark (la densità di quark nel protone è uguale alla densità di antiquark nell'antiprotone) la sezione d'urto di produzione del bosone W è

$$\sigma(\bar{p}p \to WX) = \frac{\pi^2}{3M}\,\Gamma_{ab}\int_0^1\int_0^1 [q_p(x_1)\bar{q}_{\bar{p}}(x_2)+q_{\bar{p}}(x_1)\bar{q}_p(x_2)]\,\frac{1}{s}\,\delta(x_1x_2-M^2/s)\,dx_1dx_2$$

trascurando la densità dei quark del mare, $\bar{q}_p(x) \ll q_p(x)$, $q_{\bar{p}}(x) \ll \bar{q}_{\bar{p}}(x)$,

$$\sigma(\bar{p}p \to WX) \simeq \frac{\pi^2}{3M^3}\,\Gamma_{ab}\int_0^1\int_0^1 x_1q_p(x_1)\;x_2\bar{q}_{\bar{p}}(x_2)\;\delta(x_1x_2-M^2/s)\;dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{3M^3}\,\Gamma_{ab}\int_\tau^1 F_1(x)F_2(\tau/x)dx \qquad\qquad \tau = \frac{M_W^2}{s}$$

$xq(x) = F(x)$ sono le funzioni di struttura misurate nella diffusione fortemente inelastica leptone-nucleone e l'integrale $\mathcal{F}(\tau)$ dipende solo dal rapporto tra la massa del bosone e l'energia totale $\bar{p}p$.

Per l'annichilazione $\bar{d}u \to W^+$, $\bar{u}d \to W^-$, si ha

$$\frac{\Gamma_{ud}}{M_W^3} = \frac{G}{6\pi\sqrt{2}}\cos^2\theta_c \qquad\qquad \sigma(\bar{p}p \to WX) = \frac{G\pi(\hbar c)^2}{18\sqrt{2}}\cos^2\theta_c\;\mathcal{F}_\pm(M_W^2/s)$$

Analogamente per l'annichilazione $\bar{u}u \to Z^0$, $\bar{d}d \to Z^0$

$$\frac{\Gamma_{qq}}{M_Z^3} = \frac{G}{12\pi\sqrt{2}}(g_L^2+g_R^2) \qquad\qquad \sigma(\bar{p}p \to ZX) = \frac{G\pi(\hbar c)^2}{36\sqrt{2}}(g_L^2+g_R^2)\;\mathcal{F}_0(M_Z^2/s)$$

I bosoni $W^{\pm}$ e Z^0 furono scoperti nel 1983 nelle interazioni antiprotone-protone a energia di circa $\sqrt{s} = 300+300\ GeV$ osservando i decadimenti in coppie di leptoni

$$W^+ \to e^+\nu_e \qquad W^+ \to \mu^+\nu_\mu \qquad Z^0 \to e^+e^- \qquad Z^0 \to \mu^+\mu^-$$

e i coniugati di carica per il W^-. Nel caso dei decadimenti del bosone $W^{\pm}$ viene identificato il leptone ($\ell = e,\ \mu,\ \tau$), ma i neutrini non sono osservati direttamente: viene misurata la somma vettoriale degli impulsi di tutte le particelle osservate e si verifica che $\vec{p}_\nu = -\sum_k \vec{p}_k$ soddisfi la cinematica prevista per il decadimento $W \to \ell\nu$. La massa del bosone W viene misurata dalla distribuzione dell'impulso del leptone. Nel caso dei decadimenti del bosone Z^0 si misurano gli impulsi di entrambe i leptoni e la massa è $M_Z^2 = (P_+ + P_-)^2$.

L'esperimento verificò la natura V-A dell'accoppiamento del bosone $W^{\pm}$ e determinò il valore dello spin misurando la distribuzione angolare dei leptoni carichi. Nell'annichilazione quark-antiquark il bosone è prodotto con lo spin parallelo alla direzione dell'antiquark, cioè, trascurando il contributo dei quark del mare, nella direzione dell'antiprotone. Nel decadimento del W^+ l'antileptone ℓ^+ è emesso con distribuzione angolare $F(\theta) = (1 + \cos\theta)^2$ rispetto alla direzione dello spin del bosone, mentre nel decadimento del W^- il leptone $\ell^-\bar{\nu}$ è emesso con distribuzione angolare $F(\theta) = (1 - \cos\theta)^2$: ℓ^- è emesso prevalentemente nella direzione del fascio di protoni$^+$ e ℓ^+ nella direzione del fascio di antiprotoni$^-$ (Fig.3.81).

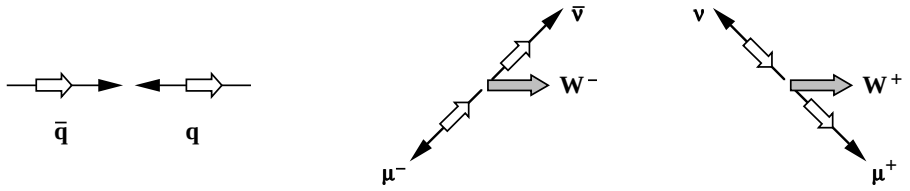


Figure 3.81: Correlazione angolare nel decadimento dei bosoni $W^{\pm}$

3.7.5 Proprietà dei bosoni $W^{\pm}$ e Z^0

Le proprietà, massa, larghezza e frazioni di decadimento dei bosoni W e Z sono state misurate con precisione in interazioni antiprotone-protone a energia ancora maggiore $\sqrt{s} = 900 + 900\ GeV$ sfruttando il fatto che il fattore $\mathcal{F}(M^2/s)$, e quindi la sezione d'urto, aumenta considerevolmente con l'energia.

Le proprietà del bosone Z sono state misurate con precisione molto maggiore in interazioni elettrone-positrone all'energia $\sqrt{s} = M_Z$. In questo caso la sezione d'urto è

$$\sigma(e^+e^- \to Z) = \frac{4\pi(\hbar c)^2}{s/4}\ \frac{3}{4}\ \frac{\Gamma_{ee}\Gamma/4}{(\sqrt{s} - M_Z)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

In un anello di collisione e^+e^- l'energia dei fasci è nota con grande precisione e si può variare attorno al valore M_Z ricostruendo la *curva di risonanza* della sezione

d'urto: in questo modo si misurano la massa e la larghezza. La sezione d'urto ha il valore massimo

$$\sigma_{max} = \frac{12\pi(\hbar c)^2}{M_Z^2} \frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} \simeq 5.8\ 10^{-32}\ cm^2$$

Selezionando diversi prodotti di decadimento si misurano le larghezze di decadimento parziali in coppie fermione-antifermione

$$\sigma(e^+e^- \to Z \to f\bar{f}) = \frac{12\pi(\hbar c)^2}{M_Z^2} \frac{\Gamma_{ee}\,\Gamma_{ff}}{\Gamma^2}$$

La misura della sezione d'urto $\sigma(e^+e^- \to Z \to f\bar{f})$ e della larghezza di decadimento ha reso possibile anche la misura della sezione d'urto in stati finali non osservati direttamente ($Z \to \nu\bar{\nu}$) e di stabilire che il numero di neutrini *leggeri*, cioè quelli con massa minore di $M_Z/2$, è uguale a tre: $N_\nu = 2.99 \pm 0.01$ (Fig.3.82)

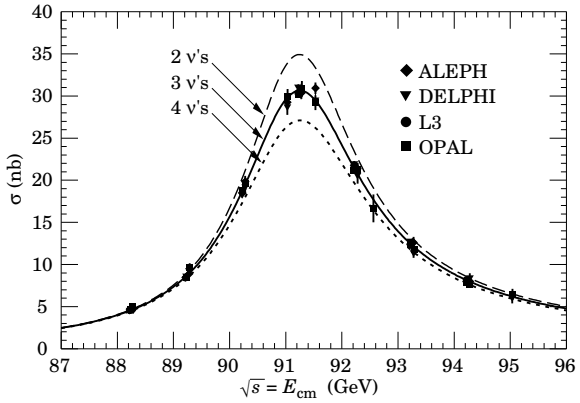


Figure 3.82: Sezione d'urto $\sigma(e^+e^- \to Z \to f\bar{f})$ in funzione dell'energia dei fasci

Le proprietà dei bosoni $W^\pm$ sono anche state studiate mediante l'annichilazione $e^+e^- \to W^+W^-$ (Fig.3.78) ottenendo risultati in ottimo accordo con quelli ricavati nell'annichilazione antiprotone-protone.

I valori delle masse, larghezze e frazioni di decadimento misurati studiando la produzione e i decadimenti dei bosoni $W^\pm$ e Z^0 sono riassunti nella tabella seguente

M_W	80.42 ± 0.04	M_Z	91.188 ± 0.002	GeV
Γ_W	2.12 ± 0.04	Γ_Z	2.495 ± 0.002	”
$BR(W \to e\bar{\nu}_e)$	10.7 ± 0.2	$BR(Z \to e^+e^-)$	3.363 ± 0.004	10^{-2}
$BR(W \to \mu\bar{\nu}_\mu)$	10.6 ± 0.2	$BR(Z \to \mu^+\mu^-)$	3.366 ± 0.007	”
$BR(W \to \tau\bar{\nu}_\tau)$	10.7 ± 0.3	$BR(Z \to \tau^+\tau^-)$	3.370 ± 0.008	”
		$BR(Z \to \nu\bar{\nu})$	20.00 ± 0.06	”
$BR(W \to q\bar{q})$	67.96 ± 0.35	$BR(Z \to q\bar{q})$	69.91 ± 0.06	”

e da questi valori si determina l'angolo di Weinberg: $\sin^2\theta_W = 0.2311 \pm 0.0002$.

3.8 Il Modello Standard

Il Modello Standard delle interazioni fondamentali è una teoria di campo efficace che descrive le interazione elettromagnetiche, deboli e adroniche tra i costituenti elementari della materia. La teoria è basata sul minimo di assunzioni a priori, essenzialmente su *principi di simmetria*, ed è detta *efficace* in quanto necessita di alcune informazioni che si possono ottenere solo da misure: i parametri del modello.

Le leggi che descrivono un sistema rappresentato con n variabili coniugate, q_i, $\dot{q}_i$, si ottengono minimizzando l'azione $S = \int L(q_1, q_2, \ldots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots)dt$, dove $L = K - U$ è la Lagrangiana del sistema; ovvero da n equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{3.1}$$

In una teoria di campo quantistica invariante per trasformazioni di Lorentz, i campi ϕ_i sono funzioni delle coordinate dello spazio-tempo x_μ e le equazioni (3.1) si scrivono in termini della *densità lagrangiana* $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ tale che $L = \int \mathcal{L} d^3x$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} = 0 \tag{3.2}$$

Qui e nel seguito usiamo unità naturali ($\hbar = 1$, $c = 1$), la notazione $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ e la somma implicita sugli indici ripetuti: $A^\mu B_\mu$ con $\mu = 1, \ldots, 4$, è il prodotto scalare di due quadrivettori. In queste unità $\mathcal{L}$ ha dimensione $\frac{energia}{volume} = energia^4$.

- Per un campo scalare di particelle di massa m e spin 0

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \; \partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3.3}$$

  si ottiene l'equazione di Klein-Gordon (appendice 4.18)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2\phi \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\nu \phi \qquad \Rightarrow \qquad \partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2\phi = 0$$

- per un campo di fermioni di spin 1/2

$$\mathcal{L}_\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \tag{3.4}$$

  si ottiene l'equazione di Dirac

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\bar{\psi} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \qquad \Rightarrow \qquad i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

  e l'equazione coniugata $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$

- per il campo elettromagnetico (campo vettoriale, spin 1)

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{3.5}$$

dove $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ è il tensore elettromagnetico (appendice 4.2), si ottengono le equazioni di Maxwell in assenza di cariche e correnti

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F_{\mu\nu} \qquad \Rightarrow \qquad \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

Se sono presenti sorgenti di carica rappresentate dal 4-vettore densità di corrente j_ν, si ha $\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$.

3.8.1 Invarianza di gauge

La lagrangiana (3.5) è invariante per trasformazioni di gauge (appendice 4.7)

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x) \tag{3.6}$$

dove $\Lambda(x)$ è una generica funzione *reale*. Per dedurre dalla (3.4) la forma dell'interazione dei fermioni col campo elettromagnetico, consideriamo la trasformazione unitaria *globale* $\psi' = e^{i\alpha}\psi$ con α costante reale. L'invarianza di (3.4), $\delta\mathcal{L} = 0$, implica $\alpha \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \ \forall \ \alpha$, cioè che il 4-vettore $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ è una corrente conservata (appendice 4.18). Se si moltiplica α per un parametro reale q, questo corrisponde alla conservazione della corrente $q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ e possiamo interpretare q come *carica elettrica*.

Però, perché la teoria sia relativisticamente invariante è necessario che α dipenda dallo spazio-tempo, cioè che la trasformazione sia *locale*. La trasformazione unitaria locale

$$U = e^{iq\Lambda(x)} \qquad\qquad \psi \to \psi' = e^{iq\Lambda(x)}\psi \tag{3.7}$$

non preserva l'invarianza della lagrangiana perché $\partial_\mu\psi' = e^{iq\Lambda(x)}(\partial_\mu + iq(\partial_\mu\Lambda(x))\psi$ e

$$\mathcal{L}'_\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu[\partial_\mu + iq(\partial_\mu\Lambda(x))]\psi - m\bar{\psi}\psi$$

La lagrangiana totale diventa

$$\mathcal{L}'_\psi + \mathcal{L}'_A = i\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu q(\partial_\mu\Lambda)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

il termine che compare, $-q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\Lambda(x)$, si può interpretare come l'interazione tra corrente e campo, $-j^\mu A_\mu$, se il campo soddisfa la trasformazione di gauge (3.6). Quindi l'ipotesi di invarianza per la trasformazione unitaria (3.7) richiede l'esistenza di un campo vettoriale A_μ. Se i quanti del campo avessero massa, la lagrangiana (3.5) dovrebbe contenere un termine $\frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu$, analogo alla (3.3), che non è invariante: $A'_\mu A'^\mu = (A_\mu - \partial_\mu\Lambda)(A^\mu - \partial^\mu\Lambda) \neq A_\mu A^\mu$. Quindi i quanti del campo devono avere massa nulla e questo è vero per il campo elettromagnetico che ha raggio di azione che si estende per $r \to \infty$.

La trasformazione unitaria equivale a trasformare l'operatore di derivazione $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$, cioè il 4-impulso $p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu$ (capitolo ???) e la lagrangiana è invariante se si introduce la *derivata covariante*

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

che si trasforma $\mathcal{D}'_\mu = U\mathcal{D}_\mu U^+$. La trasformazione di gauge $e^{iq\Lambda(x)}$ è definita da un parametro q, la *costante di accoppiamento*, e da una funzione scalare reale: è una trasformazione unitaria in una dimensione, $U(1)$.

L'interazione elettro-debole è caratterizzata dalla conservazione dell'isospin e dell'ipercarica debole legati alla carica elettrica dalla relazione $q = Y/2 + \tau_3$ [17]. La conservazione dell'ipercarica è descritta da una trasformazione $U(1)$ simile alla precedente. Introducento la costante di accoppiamento g' dei fermioni con il campo B^Y (capitolo ???)

$$U = e^{ig'\Lambda(x)} \qquad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig'(Y/2)B^Y_\mu \tag{3.8}$$

L'isospin invece è un vettore a due componenti e la trasformazione è una rotazione nello spazio a due dimensioni, $SU(2)$, i cui generatori sono le matrici di Pauli, $\vec{\sigma}$. Nel 1954 Yang e Mills estesero l'invarianza di gauge alla simmetria di isospin del sistema protone-neutrone. Nel caso dell'isospin debole si hanno doppietti (e singoletti) di leptoni e quark

$$\text{Yang-Mills:} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \ldots \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \ldots$$

Per un doppietto di fermioni di massa m_1, m_2, $\psi(x)$ è un vettore a due componenti e la lagrangiana (3.4) è

$$\mathcal{L}_\psi = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} \left[\gamma^\mu \partial_\mu - \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

In questo caso la trasformazione di gauge è $U = e^{ig\vec{\tau}\cdot\vec{\Lambda}(x)}$ con $\vec{\tau} = \vec{\sigma}/2$, dove g è la costante di accoppiamento dei fermioni con tre campi $\vec{B}_\mu$ associati alle tre componenti dell'isospin. In analogia con il caso di $U(1)$ la derivata covariante è

$$U = e^{ig\vec{\tau}\cdot\vec{\Lambda}(x)} \qquad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig\vec{\tau}\cdot\vec{B}_\mu \tag{3.10}$$

che si trasforma $\mathcal{D}'_\mu = e^{ig\vec{\tau}\cdot\vec{\Lambda}}(\partial_\mu + ig\ \vec{\tau}\cdot\vec{B}_\mu)e^{-ig\vec{\tau}\cdot\vec{\Lambda}}$. Dato che $[\tau_a, \tau_b] = i\epsilon_{abc}\tau_c$ la trasformazione di gauge dei campi è

$$\vec{B}'_\mu = \vec{B}_\mu + \partial_\mu\vec{\Lambda} - g\ \vec{\Lambda} \wedge \vec{B}_\mu \tag{3.11}$$

[17]

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Come conseguenza, i tensori dei campi che preservano l'invarianza della lagrangiana sono le tre componenti del vettore

$$\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{B}_\nu - \partial_\nu \vec{B}_\mu + g\vec{B}_\mu \wedge \vec{B}_\nu \tag{3.12}$$

che contiene un termine di *auto-interazione*: i campi B^j interagiscono tra loro.

Introducendo il doppietto ψ_L e il singoletto ψ_R di fermioni (capitolo ???), la lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_B$ è

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L(\gamma^\mu \mathcal{D}^L_\mu - m_L)\psi_L + i\bar{\psi}_R(\gamma^\mu \mathcal{D}^R_\mu - m_R)\psi_R - \frac{1}{4}B^Y_{\mu\nu}B^{Y\mu\nu} - \frac{1}{4}\vec{B}_{\mu\nu}\cdot\vec{B}^{\mu\nu} \tag{3.13}$$

con $\mathcal{D}^L_\mu = \partial_\mu + ig'(Y/2)B^Y_\mu + ig\vec{\tau}\cdot\vec{B}_\mu$; $\mathcal{D}^R_\mu = \partial_\mu + ig'(Y/2)B^Y_\mu$. In funzione dei campi i contributi alla lagrangiana sono (Fig.3.83):

- i campi liberi di fermioni e bosoni $\{\bar{\psi}\psi\}$, $\{B^2\}$;
- i termini di interazione $\{g\bar{\psi}\psi B\}$;
- i termini di auto-interazione $\{gB^3\}$, $\{g^2B^4\}$.

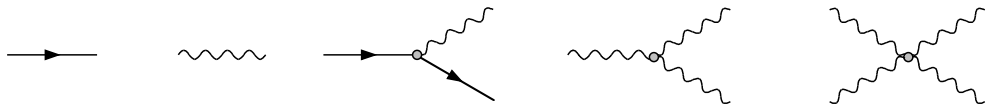


Figure 3.83: Termini che descrivono la propagazione dei campi di fermioni e bosoni e le interazioni.

Come nel caso del campo elettromagnetico, la (3.13) non è invariante se i quanti del campo hanno massa; ma le interazioni deboli sono a breve raggio d'azione e quindi devono essere mediate da bosoni con massa. Inoltre la lagrangiana (3.9) è invariante solo nel caso che le masse dei fermioni del doppietto ψ_L sono uguali e questo non è verificato né per i leptoni ($m_\nu \neq m_{\ell^-}$) né per i quark. Quindi anche i termini di massa dei fermioni non preservano l'invarianza della lagrangiana.

3.8.2 Il campo di Higgs

Una teoria dell'interazione elettro-debole invariante per le trasformazioni di gauge (3.8) e (3.10) in $U(1)_Y \otimes SU(2)_L$ deve necessariamente partire dall'ipotesi che i fermioni e i bosoni di gauge abbiano massa nulla. Ma non esiste un tripletto di bosoni di massa nulla e questa fu l'evidenza che mise in crisi la teoria di gauge di Yang-Mills basata sulla simmetria dell'isospin. Inoltre già prima della loro scoperta si sapeva che i bosoni mediatori dell'interazione debole dovevano avere massa e che questa fosse grande, $\gg 1\ GeV$.

Invece di abbandonare l'approccio dell'invarianza di gauge, che ha solide basi teoriche, fu fatta l'ipotesi che la simmetria per trasformazioni di gauge $U(1)_Y \otimes SU(2)_L$ fosse valida, ma che fosse manifesta solo a energia confrontabile con la massa

dei bosoni di gauge e che fosse *nascosta* a energia più bassa. Un fenomeno analogo è noto nel ferromagnetismo che è originato dall'interazione tra momenti magnetici atomici. A livello microscopico il momento di dipolo magnetico è proporzionale allo spin e genera un campo magnetico che tende ad orientare i dipoli, cioè gli spin, degli atomi vicini. La hamiltoniana di interazione tra momenti magnetici è del tipo $H = \kappa \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$, scalare e quindi non preferisce alcuna direzione nello spazio. La lagrangiana è quindi invariante per rotazione e infatti a temperatura elevata, maggiore della temperatura di Curie, i momenti magnetici sono orientati in modo casuale, la simmetria per rotazione è manifesta. Ma sotto la temperatura di Curie (Fig.3.84) lo spin $\vec{s}_2$ tende ad allinearsi nella direzione di $\vec{s}_1$ e così $\vec{s}_3$, etc.: la simmetria per rotazione è rotta, in modo spontaneo perché la direzione in cui gli spin si allineano è casuale.

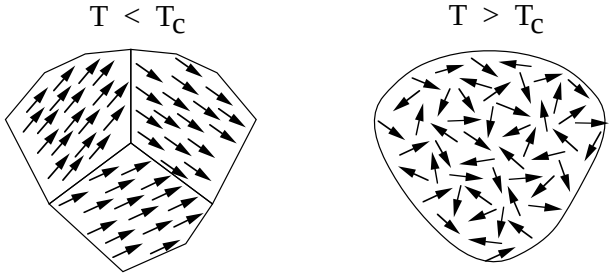


Figure 3.84: Per $T > T_C$ c'è simmetria per rotazione, quando $T < T_C$ la simmetria è scomparsa e i momenti di dipolo si orientano a formare i domini magnetici.

Nel 1964 Peter Higgs, e indipendentemente Brout, Englert e altri proposero una teoria di campo che poteva generare in modo naturale il fenomeno della rottura spontanea della simmetria e quindi generare la massa dei bosoni di gauge e dei fermioni. Il campo di Higgs non deve individuare una particolare direzione nello spazio: deve essere un campo scalare; deve essere un doppietto di isospin di campi dotati di massa e auto-interagenti; deve avere carica elettrica nulla e carica di colore nulla. Se per semplicità ci limitiamo ad una sola componente del campo, la lagrangiana è la (3.3) con l'aggiunta di un termine di auto-interazione

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\nu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \tag{3.14}$$

con μ^2 e λ costanti ($\lambda > 0$), ed è simmetrica per $\phi \to -\phi$. Il termine di energia potenziale, $U(\phi^2)$, è minimo per

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = 0 \qquad\qquad \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0$$

per cui $\phi_{min} = 0$ se $\mu^2 > 0$, oppure $\phi_{min} = \pm v = \pm\sqrt{-\mu^2/\lambda}$ se $\mu^2 < 0$. Lo stato di minima energia è lo stato di assenza di particelle, di vuoto, e v è detto *valore di aspettazione del vuoto*. Il primo caso è quello di un campo scalare con massa μ; nel secondo caso il termine di massa è immaginario e vi sono due minimi simmetrici

(Fig.3.85). Il calcolo perturbativo va fatto a partire dallo stato di minima energia e la scelta tra i due valori è a priori arbitraria. Se si sceglie di sviluppare il campo attorno al minimo $+v$

$$\phi(x) = v + \chi(x)$$

$\chi(x)$ rappresenta le fluttuazioni del campo attorno al valore di minimo. Eliminando $\mu^2 = -\lambda v^2$ la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\nu \chi \partial_\nu \chi - \lambda v^2 \chi^2 - \left(\lambda v \chi^3 + \frac{1}{4}\chi^4\right) + \frac{1}{4}\lambda v^4 \tag{3.15}$$

Il secondo termine ha ora il segno corretto e $m_\chi = \sqrt{2\lambda v^2}$ è la massa del campo di Higgs, il terzo rappresenta i termini di auto-interazione, e il quarto è una costante (inessenziale). Un risultato simile si ottiene sviluppando attorno al minimo $-v$.

La (3.14) e la (3.15) rappresentano lo stesso sistema fisico, ma nel primo caso la massa è *nascosta* e la lagrangiana è simmetrica, mentre nel secondo la dipendenza dalla massa è manifesta e la lagrangiana non è simmetrica $\chi \to -\chi$: la simmetria iniziale è *rotta* in modo *spontaneo* senza alcun intervento esterno al sistema.

Per un campo scalare nello spazio dell'isospin

$$\begin{pmatrix} \phi_u \\ \phi_d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

con numeri quantici $\tau_3 = \begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}$, la lagrangiana simile alla (3.14) è

$$\mathcal{L} = \partial^\nu \phi^+ \partial_\nu \phi - \mu^2 \phi^+ \phi - \lambda(\phi^+ \phi)^2 \tag{3.17}$$

con $\phi^+\phi = \frac{1}{2}\sum_j \phi_j^2$. Per $\mu^2 < 0$ il luogo dei minimi è ora una circonferenza (Fig.3.85) e possiamo arbitrariamente definire lo stato di vuoto, ad esempio quando $\phi_u = 0$ e ϕ_d è reale

$$\phi_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \qquad\qquad v = \sqrt{-\mu^2/2\lambda} \tag{3.18}$$

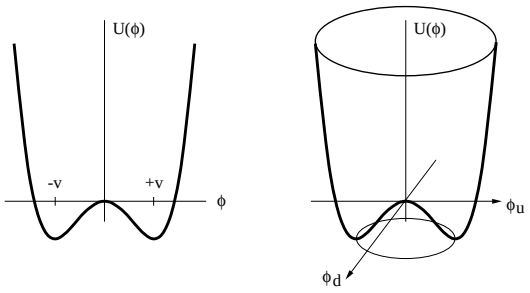


Figure 3.85: Energia del campo di Higgs.

Analogamente al caso precedente, le perturbazioni del campo attorno al minimo si ottengono aggiungendo una funzione $\rho(x)$ e con una trasformazione di gauge (3.10) cioè una rotazione nello spazio dell'isospin. La variazione del campo è

$$\chi(x) = \phi'(x) - \phi_{min} = e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{\Lambda}(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\rho(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Per una trasformazione infinitesima, $\Lambda_j \ll 1$, $e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{\Lambda}(x)} \simeq 1 + i\vec{\tau}\cdot\vec{\Lambda}(x)$, si ha

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\Lambda_2(x) + i\Lambda_1(x))v/2 + \dots \\ \rho(x) - i\Lambda_3(x)v/2 + \dots \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

e i termini che contribuiscono alla lagrangiana sono

$$\partial^\nu \chi^+ \partial_\nu \chi = \frac{1}{2}\left(\partial^\nu \vec{\Lambda}\cdot\partial_\nu\vec{\Lambda}\right)\frac{v^2}{4} + \frac{1}{2}\partial^\nu\rho\partial_\nu\rho + \dots \qquad \chi^+\chi = \frac{1}{2}\rho^2 + \dots$$

per cui, in funzione dei quattro campi $\rho(x)$, $\vec{\Lambda}(x)$, si ha

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial^\nu\vec{\Lambda}\frac{v}{2}\cdot\partial_\nu\vec{\Lambda}\frac{v}{2}\right) + \frac{1}{2}\partial^\nu\rho\partial_\nu\rho - \frac{1}{2}2\lambda v^2\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3) \tag{3.21}$$

e si riconosce la forma della lagrangiana che descrive un campo scalare con massa $m_\rho^2 = 2\lambda v^2$ e tre campi scalari $\Lambda(x)v/2$. Questi hanno massa nulla perché la (3.21) non contiene termini in Λ_j^2. Di nuovo, da un campo simmetrico nello spazio dell'isospin descritto dalla lagrangiana (3.17) con $\mu^2 < 0$ si ha un luogo di stati di vuoto $\phi_{min} = v \neq 0$ equivalenti, e con una scelta [18] tra queste soluzioni equivalenti si ottiene una rottura spontanea della simmetria che genera un campo con massa, ma lascia tre campi scalari senza massa, detti *bosoni di Goldstone*.

3.8.3 Il meccanisco di Higgs

Il passo successivo è di aggiungere alla (3.17) i campi di gauge di $U(1)\otimes SU(2)$ e l'interazione con il campo di Higgs sostituendo ∂_μ con la derivata covariante

$$\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig\vec{\tau}\cdot\vec{B}_\mu + ig'(Y/2)B_\mu^Y$$

e la (3.17) diventa

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu\phi)^+\mathcal{D}_\mu\phi - \mu^2\phi^+\phi - \lambda(\phi^+\phi)^2 - \frac{1}{4}\vec{B}_{\mu\nu}\cdot\vec{B}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}^Y B^{Y\mu\nu} \tag{3.22}$$

Ora la (3.22) è invariante per trasformazioni $U(1)\otimes SU(2)$ e qualunque scelta del valore ϕ_{min} è lecita, in particolare la (3.18). Se si sviluppa $\phi(x)$ per piccole variazioni dello stato di vuoto $\phi_{min} = \frac{v+\rho(x)}{\sqrt{2}}$, il primo termine della (3.22) è

$$(\mathcal{D}^\mu\phi)^+\mathcal{D}_\mu\phi = \frac{1}{2}\partial^\mu\rho\partial_\mu\rho + \frac{1}{8}g^2(B_{1\mu}B_1^\mu + B_{2\mu}B_2^\mu)v^2 + \frac{1}{8}(gB_{3\mu} - g'B_{Y\mu})(gB_3^\mu - g'B_Y^\mu)v^2 + \dots$$

[18] La particolare scelta (3.18) del minimo del campo di Higgs è tale che l'operatore carica elettrica, $q = Y/2 + \tau_3$, ha autovalore zero qualunque sia il valore di v.

che contiene un prodotto della combinazione dei campi B_3 e B_Y. Questo si può diagonalizzare introducendo le combinazioni (capitolo ???)

$$\begin{aligned} A &= B_Y \cos\theta + B_3 \sin\theta & \qquad B_Y &= A\cos\theta - Z\sin\theta \\ Z &= -B_Y \sin\theta + B_3 \cos\theta & \qquad B_3 &= A\sin\theta + Z\cos\theta \end{aligned}$$

e l'angolo di Weinberg, $\tan\theta = g'/g$. In funzione dei nuovi campi si ha $(gB_{3\mu} - g'B_{Y\mu})(gB_3^\mu - g'B_Y^\mu) = \frac{Z_\mu Z^\mu}{\cos^2\theta}$, $\vec{B}_{\mu\nu}\cdot\vec{B}^{\mu\nu} + B^Y_{\mu\nu}B^{Y\mu\nu} = A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} + Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}$, e la lagrangiana (3.22) che descrive i campi diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial^\mu\rho\partial_\mu\rho - \tfrac{1}{2}m_\rho^2\rho^2 \quad & -\tfrac{1}{4}B^1_{\mu\nu}B^{1\mu\nu} + \tfrac{1}{8}g^2v^2B^1_\mu B^{1\mu} \\ & -\tfrac{1}{4}B^2_{\mu\nu}B^{2\mu\nu} + \tfrac{1}{8}g^2v^2B^2_\mu B^{2\mu} \\ & -\tfrac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \tfrac{1}{8}\tfrac{g^2v^2}{\cos^2\theta}Z_\mu Z^\mu \\ & -\tfrac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.23}$$

in cui ... indica i termini di auto-iterazione dei campi. La forma della (3.23) mostra che l'interazione del campo di Higgs con i campi di gauge di $U(1)\otimes SU(2)$ produce tre campi vettoriali con massa, un doppietto con $m_B = gv/2$, un campo con $m_Z = gv/2\cos\theta$, e un campo A di massa nulla. Questo è il campo elettromagnetico che si trasforma secondo la (3.6). Nella lagrangiana non compaiono i tre bosoni di Goldstone, questi sono *scomparsi* e hanno dato origine ai tre nuovi gradi di libertà: la polarizzazione longitudinale dei tre campi vettoriali con massa.

Le combinazioni $W^\pm_\nu = (B^1_\nu \pm iB^2_\nu)/\sqrt{2}$ che corrispondono ai generatori $\tau^\pm = \tau_1 \pm i\tau_2$ hanno carica elettrica $\pm e$ legata alle costanti di accoppiamento di $U(1)\otimes SU(2)$ dalla relazione $e = g\sin\theta$. Il valore di aspettazione del vuoto del campo di Higgs è quindi determinato dalla massa dei bosoni $W^\pm$ e Z^0:

$$v = \frac{2m_W\sin\theta}{e} = \frac{2m_W\sin\theta}{\sqrt{4\pi\alpha}} = (\sqrt{2}G)^{-1/2} = 246\ GeV$$

Questo è il valore di energia a cui avviene la rottura spontanea della simmetria dell'interazione elettro-debole ed è chiamato *scala di energia di Fermi*. Il valore della massa del bosone di Higgs, $m_H = v\sqrt{2\lambda}$, rimane indeterminato poiché λ è un parametro libero non vincolato dalla teoria.

3.8.4 La simmetria del colore

Per estendere il modello all'interazione adronica, partiamo dalla lagrangiana dei quark e dall'interazione col campo di colore. Introducendo l'indice di colore dei quark, $j = 1, 2, 3$, la Lagrangiana dei fermioni (3.4) è

$$\mathcal{L}_q = \sum_q \bar{q}^j(x)i\gamma^\mu\partial_\mu q^k(x) - \sum_q m_q\bar{q}^j(x)q^j(x)$$

La costante di accoppiamento si introduce richiedendo che la Lagrangiana sia invariante per trasformazioni locali di gauge della simmetria del colore $SU(3)_C$

$$q(x) \to q'(x) = e^{ig_sT_a\Lambda^a(x)}q(x) \qquad a = 1, 2, \ldots 8 \tag{3.24}$$

dove T_a sono i generatori di $SU(3)$, le matrici di Gell-Mann (appendice 4.12), che soddisfano le relazioni di commutazione $[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$, e f_{abc} sono le costanti di struttura (reali) di $SU(3)$. L'invarianza per la trasformazione (3.24) è garantita se si introducono otto campi vettoriali, i gluoni, che si trasformano secondo la relazione

$$G^a_\mu \to G^a_\mu - \partial_\mu \Lambda_a(x) - g_s f_{abc}\Lambda_b(x) G^c_\mu$$

e la derivata covariante $\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig_s T_a G^a_\mu$. Nella Lagrangiana compare il termine di interazione della corrente dei quark con i campi di colore $\mathcal{L}_{int} = -g_s(\bar{q}\gamma^\mu T_a q)G^a_\mu$. Il tensore del campo è

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g_s f_{abc} G^b_\mu G^c_\nu$$

e quindi, come nel caso di $SU(2)$, nella lagrangiana dei campi, $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a$, compaiono termini di auto-interazione dei campi di colore. La Lagrangiana che descrive le interazioni di quark e gluoni è

$$\mathcal{L}_q = \sum_q \bar{q}^j(x) i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu q^k(x) - \sum_q m_q \bar{q}^j(x) q^j(x) - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a \tag{3.25}$$

Nella (3.25) non compare un termine di massa dei campi G^a_μ che non è invariante per la trasformazione (3.24): i gluoni hanno massa nulla. Come nel caso del campo elettromagnetico, l'interazione con il campo di Higgs non produce un termine di massa poichè il campo di Higgs non ha colore.

I quark partecipano anche all'interazione elettro-debole come doppietti e singoletti di isospin; questi sono formati da combinazioni dei sapori $q'_r = \sum_s U_{rs} q_s$. Nel modello con sei sapori di quark U_{rs} è una matrice 3×3 *unitaria*, la matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (capitolo ???), che è definita da quattro parametri. Come nel caso dei leptoni, i termini di massa $m_q \bar{q}q$ non sono invarianti per trasformazioni di $SU(2)$ e quindi la Lagrangiana che descrive l'interazione elettrodebole dei quark non può contenere termini di questo tipo: nella Lagrangiana i quark hanno massa nulla.

3.8.5 La massa dei fermioni

La (3.13) e la (3.25) non contengono termini di massa dei fermioni. Per i leptoni questi sono del tipo $m_\ell \bar{\ell}(x)\ell(x)$ e, usando i proiettori di elicità (appendice 4.18),

$$m_\ell \bar{\ell}\ell = m_\ell \bar{\ell}\left(\frac{1-\gamma_5}{2} + \frac{1+\gamma_5}{2}\right)\ell = m_\ell\left(\bar{\ell}_L \ell_R + \bar{\ell}_R \ell_L\right)$$

si vede che al termine di massa contribuiscono combinazioni di un doppietto e di un singoletto non invarianti per la trasformazione (3.10) di $SU(2)$. I termini di massa della Lagrangiana sono generati da un'interazione scalare con il campo di Higgs, detta *accoppiamento di Yukawa*. Introducendo la costante di accoppiamento $g_\ell > 0$ si ha $\mathcal{L}_\ell = -g_\ell\left(\bar{\ell}_L \phi \ell_R + \bar{\ell}_R \bar{\phi} \ell_L\right)$

$$\mathcal{L}_\ell = -g_\ell\left[\left(\bar{\nu}_\ell\ \bar{\ell}\right)_L \begin{pmatrix} \phi_u \\ \phi_d \end{pmatrix} \ell_R + \bar{\ell}_R \left(\phi^*_u\ \phi^*_d\right) \begin{pmatrix} \nu_\ell \\ \ell \end{pmatrix}_L\right] \tag{3.26}$$

$$= -g_\ell \left[\bar{\nu}_\ell \phi_u \ell_R + \bar{\ell}_L \phi_d \ell_R + \bar{\ell}_R \phi_u^* \nu_\ell + \bar{\ell}_R \phi_d^* \ell_L \right]$$

infatti i numeri quantici del campo di Higgs permettono l'accoppiamento tra doppietto e singoletto (Fig.3.86)

	ν_L	ℓ_L	ℓ_R	ϕ_u	ϕ_d
τ_3	$+1/2$	$-1/2$	0	$+1/2$	$-1/2$
q	0	-1	-1	$+1$	0
Y	-1	-1	-2	$+1$	$+1$

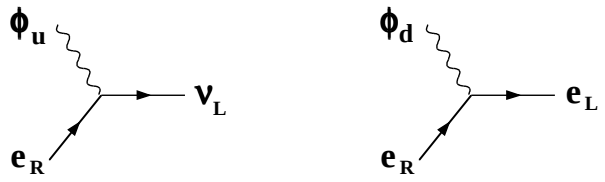


Figure 3.86: Accoppiamento di Yukawa $\ell_L - \ell_R$ con il campo di Higgs.

Se si rompe la simmetria scegliendo il valore minimo del campo di Higgs, $\phi_u = 0$, $\phi_d = \frac{v+\rho(x)}{\sqrt{2}}$, la Lagrangiana (3.26) per variazione del campo attorno a ϕ_{min} diventa

$$\mathcal{L}_\ell = -\frac{g_\ell v}{\sqrt{2}} \left(\bar{\ell}_L \ell_R + \bar{\ell}_R \ell_L \right) - \frac{g_\ell}{\sqrt{2}} \left(\bar{\ell}_L \ell_R + \bar{\ell}_R \ell_L \right) \rho(x)$$

che mostra che l'interazione ha generato un termine di massa $m_\ell = g_\ell v/\sqrt{2}$ e un termine di interazione con il campo di Higgs che ha intensità proporzionale al valore della massa del leptone

$$\mathcal{L}_\ell = -m_\ell \; \bar{\ell}\ell - \frac{m_\ell}{v} \; \bar{\ell}\rho\ell \tag{3.27}$$

Il valore delle costanti di accoppiamento g_ℓ non è definito dalla teoria e quindi le masse dei leptoni rimangono parametri liberi. La scelta del valore di minimo del campo, $\phi_u = 0$, non accoppia i leptoni L di isospin $+1/2$ (antileptoni R di isospin -1/2) col campo di Higgs: nel Modello Standard i neutrini sono fermioni di Dirac left-handed di massa nulla [19].

Con lo stesso meccanismo si genera la massa dei quark. Per i leptoni vi è differenza di carica tra stati L e stati R, mentre per i quark non vi è differenza di colore. Per simmetria, oltre al campo di Higgs (3.16) occorre introdurre il campo ottenuto con una rotazione di π nello spazio dell'isospin (appendice 4.10) [20]

$$\bar{\phi} = e^{i\pi\tau_2} \begin{pmatrix} \phi_u \\ \phi_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_d \\ -\bar{\phi}_u \end{pmatrix}$$

[19] Negli ultimi dieci anni si è accumulata evidenza sperimentale che i neutrini hanno massa $\neq 0$, il Modello Standard dovrà essere esteso per descrivere neutrini con massa.

[20]
$$e^{i\theta\tau_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

Per due sapori di quark, l'analoga della (3.26) è

$$\mathcal{L}_q = -g_u \left(\bar{u}_L \ \bar{d}_L\right) \begin{pmatrix} \bar{\phi}_d \\ -\bar{\phi}_u \end{pmatrix} u_R - g_d \left(\bar{u}_L \ \bar{d}_L\right) \begin{pmatrix} \phi_u \\ \phi_d \end{pmatrix} d_R \ + \text{h.conj.}$$

$$= -g_u \left(\bar{u}_L \bar{\phi}_d u_R - \bar{d}_L \bar{\phi}_u u_R\right) - g_d \left(\bar{u}_L \phi_u d_R + \bar{d}_L \phi_d d_R\right) \ + \text{h.conj.}$$

e, procedendo come sopra, per variazioni del campo attorno a ϕ_{min} si ha

$$\mathcal{L}_u = -\frac{g_u v}{\sqrt{2}} \ \bar{u}u - \frac{g_\ell}{\sqrt{2}} \ \bar{u}\rho u \quad \Rightarrow \quad m_u = \frac{g_u v}{\sqrt{2}} \qquad \mathcal{L}_d = \ldots$$

3.8.6 I parametri del Modello Standard

Nel Modello Standard le sorgenti dei campi sono tre famiglie di leptoni e tre famiglie di quark organizzate in doppietti e singoletti di isospin debole

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \bar{e_R} \quad \ldots \qquad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad u_R \quad d_R \quad \ldots$$

e i rispettivi antifermioni. Le interazioni elettro-debole e adronica sono mediate dai campi vettoriali della simmetria $U(1)_Y \otimes SU(2)_L \otimes SU(3)_C$: il fotone, tre bosoni $W^\pm$ Z^0, otto gluoni, e hanno intensità che dipende da tre costanti di accoppiamento g, g', g_s. Le masse dei fermioni e dei bosoni $W^\pm$ Z^0 sono generate dall'interazione con il campo scalare di Higgs. Questo è un doppietto di isospin debole con valore di minima energia $v \neq 0$ e, nel vuoto, il campo ha carica elettrica nulla e carica di colore nulla. Il campo elettromagnetico e i campi di colore non hanno massa. I campi W e Z hanno massa proporzionale a gv; i fermioni hanno ciascuno massa proporzionale a $g_f v$.

La teoria dipende da un numero di parametri liberi e il loro valore si determina da misure:

- le tre costanti di accoppiamento: G, α, $\alpha_s \ \rightarrow \ g$, g', g_s;
- tre valori di massa dei leptoni carichi $\rightarrow g_\ell$;
- sei valori di massa dei quark $\rightarrow g_q$;
- quattro parametri della matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa;
- la massa del bosone di Higgs $\rightarrow \lambda$.

Sedici di questi parametri sono misurati, la maggior parte con grande precisione, il loro valore dipende dalla scala di energia, Q^2, a cui si effettua la misura, ma la teoria prevede il loro andamento in funzione di Q^2 e, a volte, l'andamento di un parametro in funzione del valore di altri. Manca però la verifica sperimentale dell'esistenza del campo di Higgs; quindi, nonostante la coerenza e il notevole potere predittivo del modello, l'ipotesi del campo di Higgs non è ancora verificata e il parametro λ rimane indeterminato.

La ricerca del bosone di Higgs

Il bosone di Higgs si accoppia con tutti i fermioni e con i bosoni W, Z, e quindi può decaderere in coppie $f\bar{f}$ o di bosoni vettori. La larghezza di decadimento $H \to f\bar{f}$ è

$$\Gamma_{f\bar{f}} = 2\pi|\mathcal{M}|^2\rho(E) = N_c \, \frac{\sqrt{2}GM_H m_f^2}{8\pi} \, \beta^3 \tag{3.28}$$

$N_c = 3$ [1] per quark [leptoni], l'elemento di matrice è $\mathcal{M} = \frac{m_f}{v\sqrt{2E}}$, $\rho = \frac{4\pi p^2}{8\pi^3}\frac{dp}{dE}$, $p = \frac{M_H}{2}\beta$, $\beta = (1 - 4m_f^2/M_H^2)^{1/2}$ è la velocità dei fermioni. Se $M_H < 2m_W$ il contributo maggiore è dovuto al decadimento in quark beauty $H \to b\bar{b}$. Se $M_H > 2m_Z \simeq 180\ GeV$ contribuiscono i decadimenti $H \to W^+W^-$, $H \to ZZ$, con larghezza approssimativamente proporzionale a M_H^3

$$\Gamma_{WW} \simeq \frac{\sqrt{2}GM_H^3}{16\pi} \, \beta^3 \qquad\qquad \Gamma_{ZZ} \simeq \frac{1}{2}\Gamma_{WW} \tag{3.29}$$

Se $M_H > 2m_t \simeq 350\ GeV$ contribuisce anche il decadimento in coppie di quark top secondo la (3.28). Il bosone di Higgs può essere prodotto in interazioni e^+e^- oppure in interazioni adroniche, qq, $q\bar{q}$, qg, ...: negli esperimenti si cerca di identificare gli stati finali risonanti che corrispondono ai decadimenti più probabili. Il Modello Standard è autoconsistente e predice sezioni d'urto e probabilità di decadimento del bosone di Higgs; finora non è stato trovato uno stato fisico che corrisponde alle caratteristiche previste e le misure, alcune dirette altre indirette, indicano che la massa del bosone di Higgs è vincolata nell'intervallo $110 < m_H < 200\ GeV/c^2$.

Il limite inferiore alla massa del bosone di Higgs è stato determinato studiando le collisioni e^+e^- alla massima energia del LEP, $\sqrt{s} = 209\ GeV$. Dato che la sezione d'urto di annichilazione $e^+e^- \to H$ è proporzionale a $(m_e/v)^2$, e quindi piccolissima, non c'è sensibilità nell'annichilazione diretta; si cerca la produzione associata $e^+e^- \to Z^0H$ che avviene tramite un bosone Z virtuale come illustrato in Fig.3.87 sfruttando il forte accoppiamento Z-H-Z; in questo caso non si possono produrre masse maggiori di $\sqrt{s} - m_Z$. In questa regione di massa il decadimento più probabile è in coppie quark-antiquark beauty e quindi si è cercato di identificare gli stati finali $Z^0H \to \bar{q}q\ \bar{b}b$. La ricerca non ha dato risultato positivo e si è stabilito un limite inferiore $m_H > 114\ GeV$. Vari parametri del Modello Standard, in particolare i valori di m_W e della massa del quark top, dipendono dalla massa del bosone di Higgs attraverso le correzioni radiative (appendice 4.20) a vari processi. La dipendenza è $\sim \ln(m_H)$ quindi piuttosto debole, ma alcune misure sono molto precise per cui è possibile definire un limite superiore $m_H < 200\ GeV$.

Inoltre, dato che $\lambda \sim (m_H/v)^2$, la corenza del modello impone un limite superiore alla massa del campo di Higgs perché se λ è grande aumenta il potenziale di autointerazione dei campi nella (3.14) e si raggiunge il limite di unitarietà per la sezione d'urto di alcuni processi elementari quali $WW \to WW$. Inoltre va notato che all'aumentare di M_H aumenta la larghezza totale $\Gamma_H = \sum_i \Gamma_i$ (per $M_H > 800\ GeV$ si ha $\Gamma > 250\ GeV$) per cui diventa problematico definire uno "stato risonante". Nella presente formulazione il Modello Standard non ammette un bosone di Higgs con massa maggiore di $\sim 1\ TeV$.

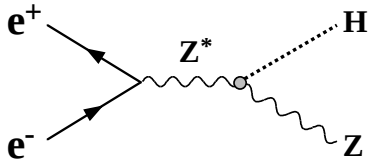


Figure 3.87: Produzione del bosone di Higgs in collisioni e^+e^-.

3.9 Oscillazioni di neutrini

I neutrini sono fermioni di spin $\frac{1}{2}$ con carica eletrica nulla e momento magmetico nullo; si manifestano in tre sapori: ν_e, ν_μ, ν_τ, con numeri leptonici, L_e, L_μ, L_τ, che si conservano separatamente. Hanno massa molto piccola, i limiti di massa sono

$$m(\nu_e) < 2\ eV \qquad m(\nu_\mu) < 0.19\ MeV \qquad m(\nu_\tau) < 18\ MeV$$

Nel Modello Standard, basato sull'equazione di Dirac per i fermioni, si assume che i neutrini abbiano massa nulla e che siano autostati di elicità, come i corrispondenti antineutrini, ν_L e $\bar{\nu}_R$: non esistono $\bar{\nu}_L$ né ν_R. Ma molti esperimenti hanno messo in evidenza transizioni tra neutrini di diverso sapore e questo non è possibile se questi stati sono degeneri in massa e $m_\nu = 0$. In effetti l'ipotesi di *oscillazioni di neutrini* era stata fatta da Bruno Pontecorvo nel 1957, in analogia con quella di oscillazioni dei mesoni K^0 proposta da Gell-Mann e Pais due anni prima (capitolo ???), e prima della scoperta del secondo neutrino, ν_μ.

3.9.1 La massa dei neutrini

L'origine della massa dei neutrini non è ancora chiarita, comunque perché i neutrini abbiano massa è necessario modificare il Modello Standard. La massa di leptoni carichi e quark è originata dall'accoppiamento delle componenti left-handed e right-handed al campo di Higgs che produce un termine $g_\ell(\bar{\ell}_L\phi_d\ell_R + \bar{\ell}_R\phi_u^*\ell_L)$ (capitolo ???), ma questo è nullo per i neutrini. Per originare la massa dei neutrini di Dirac, si possono introdurre *ad hoc* le componenti ν_R e $\bar{\nu}_L$, che però non si accoppiano con il campo debole, né con altri campi di interazione tranne il campo gravitazionale, e quindi sono *neutrini sterili*. Questo non contraddice l'evidenza che si osservano solo ν_L e $\bar{\nu}_R$.

Ma c'è una seconda possibilità basata sulla *Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone* formulata nel 1937 da Ettore Majorana. Secondo questa teoria, gli stati di fermione e anti-fermione coincidono se non hanno carica elettrica. Il campo del neutrino ha due componenti: $|\nu\rangle$ e il suo coniugato per la trasformazione CP, che è con ottima approssimazione una simmetria dell'interazione debole: $|\nu^c\rangle = CP|\nu\rangle$. La trasformazione CP è rappresentata formalmente con la coniugazione complessa e le matrici γ di Dirac (appendice ???). Questa rappresentazione dei fermioni ha due importanti conseguenze:

- poiché la trasformazione CP cambia lo stato di elicità, i neutrini hanno due stati di elicità e possono acquistare massa con l'accoppiamento col campo di Higgs;

- poiché CP è una trasformazione discreta, la legge di combinazione del numero leptonico è moltiplicativa e non additiva: si conserva la *parità leptonica* e non necessariamente il numero leptonico, $L = L_e + L_\mu + L_\tau$. Questo permette, ad esempio, il decadimento doppio-β senza emissione di neutrini, ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+2}Y\ e^-\ e^-$, che conserva la parità leptonica ma non il numero leptonico (Fig.3.88) ed è vietato per i neutrini di Dirac. Questo decadimento non è ancora stato osservato.

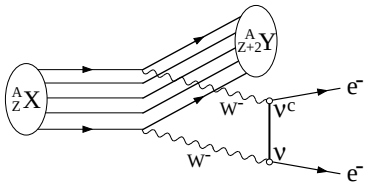


Figure 3.88: Decadimento 2β senza emissione di neutrini.

3.9.2 Oscillazioni nel vuoto

Non sappiamo quale delle due versioni, neutrini di Dirac o neutrini di Majorana, rappresenti meglio le osservazioni, comunque esistono modifiche del Modello Standard che possono originare la massa dei neutrini. Assumiamo che ci siano tre autostati di sapore e tre autostati di massa

$$(\nu_e \quad \nu_\mu \quad \nu_\tau) \qquad\qquad (\nu_1 \quad \nu_2 \quad \nu_3)$$

e che si possano convertire uno nell'altro tramite una matrice unitaria 3×3: $|\nu_\alpha\rangle = \mathbf{U}|\nu_i\rangle$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix}$$

che soddisfa la condizione $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{1}$

$$\sum_j U^*_{\alpha j} U_{\beta j} = \delta_{\alpha\beta} \qquad \sum_\alpha U^*_{\alpha j} U_{\alpha k} = \delta_{jk} \tag{3.30}$$

La matrice $\mathbf{U}$ che mescola gli autostati di sapore e gli autostati di massa, detta matrice di *Pontecorvo-Maki-Makagawa-Sakata*, ha le stesse proprietà della matrice CKM (capitolo ???) e dipende da tre angoli di mixing e un parametro complesso.

La matrice si può rappresentare come la combinazione di tre rotazioni con angoli di Eulero θ_{jk} ($c_{jk} = \cos\theta_{jk}$, $s_{jk} = \sin\theta_{jk}$) $U_{PMMS} = R_{23}R_{13}R_{12}$

$$U_{PMMS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

Nel caso di neutrini di Majorana si aggiungono due parametri complessi

$$U_{PMMS} = R_{23}R_{13}R_{12} \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nel vuoto l'equazione del moto degli autostati di massa è $i\hbar\frac{d}{dt}|\nu_j\rangle = H_m|\nu_j\rangle$, gli autovalori sono $E_j = ((pc)^2 + (m_jc^2)^2)^{\frac{1}{2}}$ e l'evoluzione temporale è $|\nu_j(t)\rangle = |\nu_j(0)\rangle e^{-iE_jt/\hbar}$. Poichè la massa dei neutrini è molto piccola $E_j \simeq pc + (m_jc^2)^2/2pc \simeq pc + m_j^2c^4/2E$. Nel seguito: $\hbar = 1$, $c = 1$. La hamiltoniana è diagonale

$$H_m = p + \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

Se al tempo $t = 0$ si ha un fascio di soli neutrini di sapore α, $\nu_\beta(0) = \sum_j U_{\beta j}|\nu_j\rangle = \delta_{\beta\alpha}$, l'evoluzione temporale del fascio è

$$\nu_\beta(t) = \sum_j U_{\beta j}|\nu_j\rangle e^{-iE_jt}$$

e $\langle\nu_\beta(t)|\nu_\alpha(0)\rangle = \sum_{jk} U^*_{\beta j}U_{\alpha k}e^{-iE_kt}\langle\nu_j|\nu_k\rangle = \sum_j U^*_{\beta j}U_{\alpha j}e^{-iE_jt}$. La probabilità di avere neutrini di sapore β al tempo t è

$$\begin{aligned} P_{\alpha\to\beta}(t) = & \ |\langle\nu_\beta(t)|\nu_\alpha(0)\rangle|^2 = |\sum_j U^*_{\beta j}U_{\alpha j}e^{-iE_jt}|^2 = \sum_{kj} U^*_{\alpha k}U_{\alpha j}U_{\beta k}U^*_{\beta j}e^{i(E_k-E_j)t} \\ = & \ \sum_j |U_{\beta j}|^2|U_{\alpha j}|^2 + 2\sum_{j>k} \Re(U^*_{\beta j}U_{\beta k}U_{\alpha j}U^*_{\alpha k})\cos(E_j - E_k)t \end{aligned} \tag{3.33}$$

La probabilità di transizione è modulata nel tempo dall'ultimo termine, per questo si parla di oscillazione di neutrini, e la condizione di unitarietà (3.30) assicura che la somma delle probabilità sia $\sum_\beta P_{\alpha\to\beta}(t) = 1 \ \forall \ t$.

Se consideriamo per semplicità il caso di due neutrini, vi è solo un angolo di mixing

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

e l'evoluzione temporale è

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(t)\rangle &= \cos\theta e^{-iE_1t}|\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2t}|\nu_2\rangle \\ |\nu_\beta(t)\rangle &= -\sin\theta e^{-iE_1t}|\nu_1\rangle + \cos\theta e^{-iE_2t}|\nu_2\rangle \end{aligned}$$

Se al tempo $t = 0$ sono presenti solo neutrini ν_α, al tempo t si ha

$$\langle \nu_\alpha(t)|\nu_\alpha(0)\rangle = \cos^2\theta e^{iE_1 t} + \sin^2\theta e^{iE_2 t}$$

e la probabilità di sopravvivenza di neutrini ν_α è (3.33)

$$\begin{aligned} P_{\alpha\to\alpha}(t) = |\langle \nu_\alpha(t)|\nu_\alpha(0)\rangle|^2 &= \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta\ \cos(E_2 - E_1)t \\ &= \cos^2 2\theta + \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta + \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\ \cos(E_2 - E_1)t \\ &= 1 - \sin^2 2\theta\ \sin^2(E_2 - E_1)t/2 \end{aligned}$$

Se invece si ha una transizione $\nu_\alpha \to \nu_\beta$

$$\langle \nu_\beta(t)|\nu_\alpha(0)\rangle = \sin\theta\cos\theta(e^{iE_2 t} - e^{iE_1 t})$$

la probabilità di transizione è (3.33)

$$\begin{aligned} P_{\alpha\to\beta}(t) = |\langle \nu_\beta(t)|\nu_\alpha(0)\rangle|^2 &= 2\sin^2\theta\cos^2\theta(1 - \cos(E_2 - E_1)t) \\ &= \sin^2 2\theta\ \sin^2(E_2 - E_1)t/2 \\ &= 1 - P_{\alpha\to\alpha}(t) \end{aligned}$$

Il termine $\sin^2 2\theta$ indica l'intensità dell'accoppiamento ν_α-ν_β, e la probabilità è modulata nel tempo dal fattore $\sin^2(E_2 - E_1)t/2$, con $E_2 - E_1 \simeq (m_2^2 - m_1^2)/2E$. A distanza L dalla sorgente dei neutrini ν_α si ha

$$\sin^2(E_2 - E_1)t/2 \simeq \sin^2(m_2^2 - m_1^2)t/4E = \sin^2(m_2^2 - m_1^2)c^4 L/4E\hbar c$$

che dipende dal valore della differenza $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. Dato che i limiti sui valori di massa dei neutrini sono $\sim eV$, le unità *naturali* per esperimenti sulle oscillazioni di neutrini sono: mc^2 in eV, E/L in $GeV/km = MeV/m$. In queste unità si ha $\frac{1}{4\hbar c} = 1.27\ \frac{GeV}{eV^2\ km}\ \left(\frac{MeV}{eV^2\ m}\right)$

$$P_{\alpha\to\beta}(t) = \sin^2 2\theta\ \sin^2\left(1.27\ \frac{\Delta m^2\ [eV^2] \times L\ [km]}{E\ [GeV]}\right) \tag{3.34}$$

e la lunghezza d'onda di oscillazione è

$$\lambda = \frac{\pi E}{1.27\Delta m^2} = 2.48\frac{E}{\Delta m^2} \tag{3.35}$$

Nella base dei sapori, l'equazione del moto nel vuoto è $i\frac{d}{dt}|\nu_\alpha\rangle = H_f|\nu_\alpha\rangle$ con $H_f = UH_mU^\dagger$

$$\begin{aligned} H_f &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \left[p + \frac{1}{2E}\begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= p + \frac{\Sigma m^2}{4E} + \frac{\Delta m^2}{4E}\begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.36}$$

Esistono diverse condizioni favorevoli allo studio di oscillazioni di neutrini per diversi valori dell'energia E e della distanza L tra sorgente e osservatore

- i neutrini solari ν_e sono prodotti nel Sole con le reazioni termonucleari descritte nel capitolo ??? con energia da zero a pochi MeV, la distanza è 10^8 km;

- i reattori nucleari producono $\bar{\nu}_e$ con energia da zero ad alcuni MeV e si possono osservare a distanze da $\sim$10 m a molti km;

- i neutrini atmosferici sono originati nei decadimenti di adroni prodotti nelle interazioni dei raggi cosmici primari con l'atmosfera. Sono prevalentemente ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$ dai decadimenti leptonici dei mesoni π e K; con minore probabilità ν_e, $\bar{\nu}_e$ prodotti nei decadimenti dei muoni e decadimenti semi-leptonici dei mesoni; i neutrini ν_τ, $\bar{\nu}_\tau$ sono trascurabili. L'energia va da $\sim$1 a $\sim$20 GeV. La distanza può variare da $\sim$10 km, se prodotti nell'atmosfera *sopra* il laboratorio, a $\sim 10^4$ km se prodotti nell'altro emisfero e attraversano la Terra prima di essere rilevati.

- acceleratori di protoni producono intensi fasci secondari di neutrini ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$ (capitolo ???) con energia $E = 1 - 100$ GeV che possono essere rivelati a distanze da ~ 100 m a ~ 1000 km.

Diverse condizioni sperimentali hanno diversa sensibilità alla misura alla differenza di massa secondo la relazione (3.34); le condizioni sono riassunte nella Tabella 3.1. Ci sono due possibili approcci sperimentali per misurare oscillazioni dei neutrini:

sorgente	ν	energia (GeV)	distanza (km)	Δm^2 (eV^2)
sole	ν_e	10^{-3}	10^8	10^{-10}
reattore	$\bar{\nu}_e$	10^{-3}	1-100	10^{-5}-10^{-3}
atmosfera	ν_μ $\bar{\nu}_\mu$ (ν_e $\bar{\nu}_e$)	1-20	10-10^4	10^{-4}-1
acceleratore	ν_μ $\bar{\nu}_\mu$	1-100	1-10^3	10^{-3}-10

Table 3.1: Sensibilità in Δm^2 per diverse sorgenti di neutrini.

esperimenti di scomparsa e esperimenti di apparizione.

Esperimenti di scomparsa

Se si conosce una sorgente che emette solo neutrini ν_α e si conosce il flusso all'origine, $\Phi_\alpha(0)$, la misura del flusso a distanza L di neutrini dello stesso sapore fornisce, tramite il rapporto $\Phi_\alpha(L)/\Phi_\alpha(0)$, la probabilità di sopravvivenza $|\langle\nu_\alpha(t)|\nu_\alpha(0)\rangle|^2$. Questo tipo di esperimento non fornisce informazione sul tipo di neutrino in cui ν_α ha eventualmente oscillato. È il caso di esperimenti fatti con neutrini solari ν_e, o da reattore $\bar{\nu}_e$: infatti questi hanno energia bassa e oscillazioni $\nu_e \to \nu_\mu$ o $\nu_e \to \nu_\tau$ non sono rivelabili poichè l'energia di questi ultimi è molto minore dell'energia di soglia per produrre leptoni μ (110 MeV) o τ (3.5 GeV). Nel caso di neutrini da reattore si può misurare il flusso $\Phi_{\bar{\nu}_e}(L)$ a diverse distanze dalla sorgente, mentre la distanza Terra-Sole è quasi costante.

Esperimenti di apparizione

Questo è il caso di esperimenti con fasci di neutrini ν_μ o $\bar{\nu}_\mu$ prodotti con acceleratori: il flusso di neutrini è conosciuto bene e la contaminazione di neutrini di altro sapore è piccola. Leptoni e o leptoni τ prodotti in reazioni $\nu_e N \to e^- X$ o $\nu_\tau N \to \tau^- X$ (e coniugate di carica) in un rivelatore a distanza L dalla sorgente misurano la probabilità di oscillazione $|\langle\nu_\alpha(t)|\nu_\mu(0)\rangle|^2$. L'energia del fascio è sufficiente a produrre le reazioni che segnalano l'oscillazione di neutrini.

Nel caso di esperimenti con raggi cosmici, il flusso di neutrini non è ben conosciuto né in intensità né nel tipo di sapore. Questi esperimenti hanno però il vantaggio che sia l'energia E che la distanza dalla sorgente L sono variabili e questo estende l'intervallo di sensibilità in Δm^2.

3.9.3 Oscillazioni nella materia

Se i neutrini si propagano nella materia, si possono verificare oscillazioni anche nel caso di $m_\nu = 0$ se esiste qualche differenza nel comportamento dei diversi sapori di neutrini. Questo è stato studiato da Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein- ed è chiamato *effetto MSW*; è dovuto alla diffusione coerente in avanti che distingue i ν_e dagli altri neutrini. La diffusione coerente è proporzionale all'ampiezza di diffusione $f(q=0)$ e al numero di bersagli per unità di volume N, mentre l'assorbimento è proporzionale al quadrato. L'effetto è analogo alla propagazione della luce in un mezzo, l'indice di rifrazione $n = 1 + \frac{2\pi N}{k^2} f(0)$ introduce uno sfasamento nella propagazione di onde con indici diversi: $e^{i(n_2-n_1)kx}$.

Poiché $f(0)$ è proporzionale alla costante di Fermi G e l'assorbimento è proporzionale a G^2, questo è trascurabile, ma la diffusione coerente può produrre un effetto importante se il fascio si propaga per grandi distanze in un mezzo di densità elevata. Consideriamo due sapori di neutrini, ν_e e ν_μ: le interazioni elastiche con emissione di neutrini a $q = 0$ per correnti neutre sono uguali, ma quelle per correnti cariche sono diverse

	ν_e	ν_μ
	$\nu_e e^- \to \nu_e e^-$	$\nu_\mu e^- \to \nu_\mu e^-$
NC	$\nu_e n \to \nu_e n$	$\nu_\mu n \to \nu_\mu n$
	$\nu_e p \to \nu_e p$	$\nu_\mu p \to \nu_\mu p$
CC	$\nu_e e^- \to e^- \nu_e$	$\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e$

e la differenza è legata alla densità di elettroni nel mezzo. Questo comporta che in un mezzo di densità ρ si introduce uno sfasamento per unità di lunghezza tra le onde

$$\frac{2\pi\hbar f(0) N_e}{p} = \sqrt{2} G (\hbar c)^2 N_e = 3.8\ 10^{-9}\ cm^{-1} \times \frac{Z}{A}\rho \tag{3.37}$$

dove ρ è in g/cm^3. L'effetto è importante nel caso della propagazione dei neutrini dal centro alla superficie del Sole ($L = 0.7\ 10^{11}\ cm$) tenendo anche conto che la densità cambia notevolmente; è meno importante su distanze pari all'attraversamento

della Terra ($L \simeq 10^8\ cm$). La combinazione con le oscillazione nel vuoto modifica i parametri della matrice di evoluzione, in particolare il termine $\nu_e \to \nu_e$, cui si aggiunge lo sfasamento (3.37) che interviene come una differenza di energia di interazione (nel seguito $\hbar = 1$, $c = 1$)

$$\sqrt{2}G(\hbar c)^3 N_e = 7.6\ 10^{-14}\ eV \times \frac{Z\rho}{A}$$

modificando la parte non diagonale della matrice (3.36)

$$H_f = (\ldots) + \begin{pmatrix} -(\Delta m^2/4E)\cos 2\theta + \sqrt{2}GN_e & (\Delta m^2/4E)\sin 2\theta \\ (\Delta m^2/4E)\sin 2\theta & (\Delta m^2/4E)\cos 2\theta \end{pmatrix} \qquad (3.38)$$

Gli angoli di mixing e la differenza Δm^2 si ottengono da (3.36) e (3.38)

$$\frac{\sin 2\theta^*}{\cos 2\theta^*} = \frac{2H_{f21}}{H_{f22} - H_{f11}} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - \chi} \qquad \chi = \sqrt{2}GN_e\frac{2E}{\Delta m^2} = 1.5\ 10^{-7}\ \frac{E\ [MeV]}{\Delta m^2\ [eV^2]} \times \frac{Z\rho}{A}$$

$$\sin 2\theta^* = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{(\cos 2\theta - \chi)^2 + (\sin 2\theta)^2}} \qquad \Delta^* m^2 = \Delta m^2 \sqrt{(\cos 2\theta - \chi)^2 + (\sin 2\theta)^2} \qquad (3.39)$$

e la probabilità di oscillazione (3.34) diventa

$$P_{\alpha\to\beta}(t) = \sin^2 2\theta^*\ \sin^2(1.27\Delta^* m^2 L/E)$$

Dalla relazione (3.39) se $\chi \simeq \cos 2\theta$ l'angolo di mixing osservato è $\theta^* \simeq 45°$, simulando oscillazione massima, qualunque sia l'effettivo mixing dei neutrini.

3.9.4 Neutrini solari

Le reazioni nucleari che producono energia nel Sole sono presentate nel capitolo ???; la Fig.3.89 mostra lo spettro di energia dei neutrini ν_e emessi nelle reazioni. Il flusso di neutrini è valutato sulla base del *Modello Solare Standard* (SSM) che tiene conto delle sezioni d'urto e del bilancio energetico delle reazioni, della termodinamica e fluodinamica solare e dell'energia di radiazione solare misurata sulla Terra. Gli esperimenti per rivelare i neutrini sulla Terra sono condotti in laboratori sotterranei a grande profondità per schermare i rivelatori dai raggi cosmici, e hanno un bersaglio di grande massa (da decine a migliaia di tonnellate) perché la sezione d'urto è molto piccola. Si misura il flusso di neutrini ν_e e, dal flusso previsto dal SSM, la probabilità $P_{\nu_e\to\nu_e}(L)$, $L = 1.5\ 10^8\ km$. Sono stati fatti due tipi di esperimenti: con metodi radiochimici e con rivelatori di elettroni emessi nelle reazioni $\nu_e N \to e^- N'$.

Gli esperimenti radiochimici sono più sensibili a neutrini di bassa energia. Si misura il numero di reazioni $\nu_e\ {}^A_Z X \to\ e^-\ {}^A_{Z+1}Y$ in un dato intervallo di tempo Δt_1. Si sceglie una reazione che abbia una soglia bassa e che produca un nucleo Y soggetto a cattura elettronica con vita media τ. In questo modo non è necessario rivelare gli elettroni prodotti che hanno energia molto piccola, ma si registra il

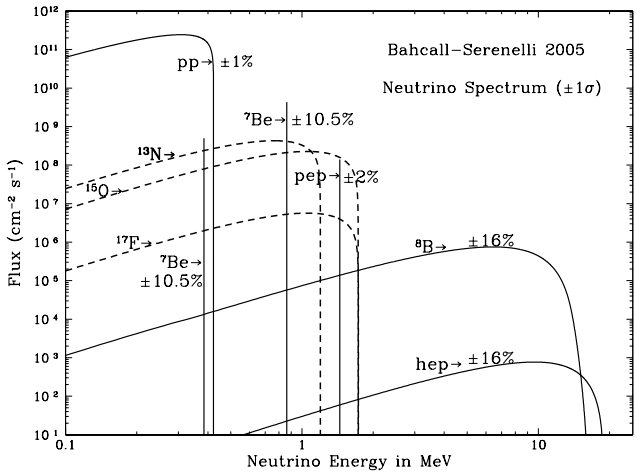


Figure 3.89: Flusso di neutrini solari in funzione dell'energia.

numero di eventi $e^- \ {}^{A}_{Z+1}Y \rightarrow \ {}^{A}_{Z}X \ \nu_e$ contando in un intervallo di tempo Δt_2 i raggi X di energia caratteristica emessi immediatamente dopo la cattura elettronica. Si eseguono diversi cicli di attivazione e conteggio: se $\Lambda = \sigma_\nu \Phi_\nu N_b$ è il numero di interazioni per unità di tempo, il numero di nuclei Y formati è $n_Y(1) = \Lambda\tau(1 - e^{-\Delta t_1/\tau})$ e il numero di decadimenti registrati è $n_{Y\rightarrow X}(2) = \Lambda\tau(1 - e^{-\Delta t_1/\tau})(1 - e^{-\Delta t_2/\tau})$.

Il primo esperimento pioneristico di questo tipo è stato fatto da Raymond Davis [21] usando come bersaglio il ${}^{37}_{17}Cl$, un isotopo stabile del Cloro con abbondanza relativa 24%. L'esperimento è stato fatto in una miniera a 1600 metri di profondità con un bersaglio di ∼1000 tonnellate di C_2Cl_4. Nella cattura dei neutrini si produce ${}^{37}_{18}Ar$ che decade al 100% per cattura elettronica

$$\nu_e \ {}^{37}_{17}Cl \rightarrow \ {}^{31}_{18}Ar \ e^- \qquad\qquad e^- \ {}^{31}_{18}Ar \rightarrow \ {}^{37}_{17}Cl \ \nu_e \qquad \tau = 24.3 \text{ giorni}$$

La soglia di reazione è $E_\nu^{min} = 0.814 \ MeV$, quindi l'esperimento non è sensibile alla maggior parte dei neutrini solari, ma solo a quelli emessi dal decdimento del Boro ${}^{8}_{5}B$ e, in parte, a quelli del ciclo CNO, (Fig.3.89). Questo esperimento fu il primo a registrare un *deficit di neutrini solari*, cioè $P_{\nu_e\rightarrow\nu_e} < 1$. Misurò un tasso di conteggio $\sim\frac{1}{3}$ di quello previsto dal SSM con un errore relativo del 10%.

Altri esperimenti sono stati fatti con il ${}^{71}_{31}Ga$, un isotopo stabile del Gallio con abbondanza relativa 40%. Si produce ${}^{71}_{32}Ge$ che decade al 100% per cattura elettronica

$$\nu_e \ {}^{71}_{31}Ga \rightarrow \ {}^{71}_{32}Ge \ e^- \qquad\qquad e^- \ {}^{71}_{32}Ge \rightarrow \ {}^{71}_{31}Ga \ \nu_e \qquad \tau = 7.9 \text{ giorni}$$

La soglia di reazione, $E_\nu^{min} = 0.233 \ MeV$, è notevolmente più bassa e gli esperimenti sono sensibili a gran parte dei neutrini del ciclo protone-protone. Questi esperimenti hanno misurato un tasso di conteggio $(53 \pm 3)\%$ di quello previsto dal SSM confermando la effettiva scomparsa dei neutrini ν_e.

[21] Premio Nobel per la Fisica nel 2002.

Gli esperimenti che rivelano l'emissione di elettroni sono costruiti con grandi recipienti con acqua, o acqua pesante, per studiare le reazioni di ν_e su elettroni atomici o su nucleo (protone, deutone). Questo metodo di misura è stato sviluppato da Masatoshi Koshiba [22]: la rivelazione è fatta osservando la radiazione Čerenkov (capitolo ???) emessa dagli elettroni che si trasmette nel mezzo trasparente. Gli esperimenti misurano la velocità degli elettroni e la direzione, questa è correlata con la direzione del Sole e permette di ridurre il fondo da altre sorgenti. Il valore minimo di velocità è $\beta_e \simeq 0.9$ e la soglia di reazione è di alcuni MeV, quindi questi esperimenti sono sensibili ai neutrini di alta energia. Con lo studio della reazione elastica $\nu_e e^- \to \nu_e e^-$ è stato misurato un tasso di conteggio pari al $(47 \pm 3)\%$ di quello previsto dal SSM.

Esperimenti che usano grandi recipienti con scintillatore liquido hanno soglie di rivelazione $\sim$1 MeV, e sono sensibili a neutrini di bassa energia.

Se il bersaglio è di acqua pesante, si possono studiare diverse reazioni neutrino-deuterio

(a) $\nu_e\ d \to p\ p\ e^-$, prodotta solo da ν_e per CC;

(b) $\nu_\alpha\ d \to \nu_\alpha\ p\ n$, prodotta da ogni tipo di neutrino per NC;

(c) $\nu_\alpha\ e^- \to \nu_\alpha\ e^-$, prodotta da ogni tipo di neutrino per NC, e da ν_e anche per CC.

Le reazioni (a) e (c) sono osservate con la rivelazione dell'elettrone, la reazione (b) con la rivelazione di sciami elettrofotonici prodotti da raggi γ emessi nella reazione di cattura neutronica con formazione di trizio, $n\ d \to\ {}^3_1H\ \gamma$ con $E_\gamma = 6.5\ MeV$. È un'esperimento di scomparsa per le reazioni (a) e (c) e un esperimento di apparizione di neutrini ν_μ e ν_τ (tra loro indistinguibili) per la reazione (c).

Il flusso dei neutrini si ottiene dal numero di reazioni osservate e dai valori di sezione d'urto. Si hanno tre relazioni

$$\begin{aligned}
\dot{n}_a &= \Phi(\nu_e)\sigma^{CC}(\nu_e d)N_d \\
\dot{n}_b &= \left(\Phi(\nu_e) + \Phi(\nu_\mu + \nu_\tau)\right)\sigma^{NC}(\nu_\alpha d)N_d \\
\dot{n}_c &= \Big((\Phi(\nu_e)\sigma^{NC+CC}(\nu_e e) + \Phi(\nu_\mu + \nu_\tau)\sigma^{NC}(\nu_\alpha e)\Big)\, N_e
\end{aligned}$$

da cui si estrae il flusso di neutrini $\Phi(\nu_e)$ e $\Phi(\nu_\mu + \nu_\tau)$ tenendo conto che la sezione d'urto per NC è la stessa per ogni tipo di neutrino, e inoltre si può verificare (capitolo ???) che

$$\frac{\sigma^{NC}(\nu_e e)}{\sigma^{NC+CC}(\nu_e e)} = \frac{g_L^2 + g_R^2/3}{(1+g_L)^2 + g_R^2/3} = \frac{1 - 4\sin^2\theta_W + (16/3)\sin^4\theta_W}{1 + 4\sin^2\theta_W + (16/3)\sin^4\theta_W} \simeq 0.16$$

Il risultato conferma le osservazioni degli altri esperimenti e inoltre dimostra la validità del SSM nel predire il flusso di neutrini solari

$$\frac{\Phi(\nu_e) + \Phi(\nu_\mu + \nu_\tau)}{\phi_{SSM}(\nu_e)} = 1.01 \pm 0.14 \qquad \frac{\Phi(\nu_e)}{\Phi(\nu_e) + \Phi(\nu_\mu + \nu_\tau)} = 0.34 \pm 0.04$$

[22] Premio Nobel per la Fisica nel 2002.

quindi $\frac{2}{3}$ dei neutrini ν_e prodotti nel Sole hanno cambiato sapore prima di raggiungere la Terra. Dalle misure delle interazioni neutrino-deutone si deduce che

- la previsione del Modello Solare Standard del flusso di neutrini $\Phi(\nu_e)$ è corretta;
- il flusso di neutrini misurato dipende dall'energia dei neutrini per l'effetto MSW e i risultati di esperimenti con soglie diverse vanno corretti secondo la (3.39);
- corretti i risultati, la probabilità di sopravvivenza a distanza L per diversi intervalli di energia E fornisce i parametri di oscillazione

$$P_{\nu_e \to \nu_e} = 1 - \cos^4\theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2(\Delta m^2_{12} L/4E) - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2(\Delta m^2_{13} L/4E) \tag{3.40}$$

- nel caso $\theta_{13} \simeq 0$, come misurato con i neutrini da reattore, le oscillazioni dei neutrini solari si riducono al caso di due stati: $|\nu_1\rangle$ e $|\nu_2\rangle$, e la matrice di mixing è R_{12}

$$P_{\nu_e \to \nu_e} \simeq 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2(\Delta m^2_{12} L/4E)$$

- e si ottiene: $\theta_{12} = 33°, \quad \Delta m^2_{12} = 7\ 10^{-5}\ eV^2$.

3.9.5 Neutrini da reattori

I reattori nucleari sono un'intensa sorgente di anti-neutrini $\bar{\nu}_e$ con energia che si estende da zero ad alcuni MeV. Gli esperimenti usano grandi recipienti di scintillatore liquido, materiale organico ricco di protoni, con l'aggiunta di nuclei N_0 che hanno un grande sezione d'urto di cattura di neutroni di bassa energia, $nN_0 \to N_1^* \to N_1\gamma$. Il metodo di rivelazione è sostanzialmente quello che ha portano alla scoperta del neutrino descritta nel capitolo ???. Si sfrutta la reazione

$$\bar{\nu}_e\ p \to e^+\ n$$

che ha un'energia di soglia di 1.8 MeV. La produzione del positrone è segnalata dalla misura di $E \sim 1\ MeV$ dall'annichilazione $e^+e^- \to \gamma\gamma$, il neutrone viene moderato nelle collisioni elastiche con i protoni e catturato dal nucleo N_0 dopo un tempo caratteristico del processo di moderazione Δt_0.

Esperimenti fatti a piccola distanza dal reattore, da 10 m a 1 km, non hanno mostrato evidenza di scomparsa di $\bar{\nu}_e$, il valore misurato è $\frac{\phi_L(\bar{\nu}_e)}{\phi_0(\bar{\nu}_e)} \simeq 1$ con errori relativi di pochi %. Un esperimento fatto a grande distanza ha invece misurato la scomparsa di $\frac{1}{3}$ di $\bar{\nu}_e$

$$\frac{\phi_L(\bar{\nu}_e)}{\phi_0(\bar{\nu}_e)} = 0.66 \pm 0.06 \qquad \langle E_{\bar{\nu}_e} \rangle = 4\ MeV \qquad L \simeq 150\ km$$

I risultati in funzione della distanza sono mostrati in Fig.3.90. Gli esperimenti misurano il rapporto $\frac{\phi_L(\bar{\nu}_e)}{\phi_0(\bar{\nu}_e)}$ integrando in un intervallo di energia dal valore di soglia al valore massimo

$$\frac{\Phi_L(\nu)}{\Phi_0(\nu)} = 1 - \mathcal{S}f(L) \qquad f(L) = \frac{1}{\Delta k}\int \sin^2 kL\ dk \qquad k = \frac{\Delta m^2}{4E}$$

$$f(L) = \frac{1}{(k_2 - k_1)L}\int_{k_1}^{k_2} \sin^2 kL\ dk = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2k_2L - \sin 2k_1L}{4(k_2 - k_1)L} \tag{3.41}$$

Questa funzione è nulla per $kL \ll 1$, alta energia e/o piccole distanze, oscilla per $kL \simeq \pi/2$ e tende al valore $\frac{1}{2}$ per $kL \gg 1$, bassa energia e/o grandi distanze.

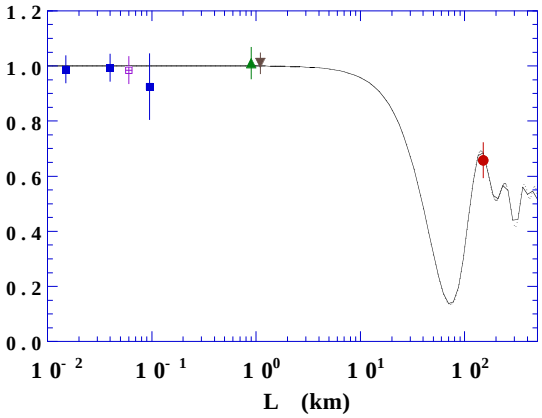


Figure 3.90: Flusso di $\bar{\nu}_e$ in funzione della distanza dal reattore.

Il confronto con gli esperimenti con i neutrini solari indica

- per $L \leq 3\ km$ il termine $\sin^2(\Delta m^2_{12}L/4E)$ è trascurabile e quindi (3.40) si riduce a
$$P_{\bar{\nu}_e \to \bar{\nu}_e} = 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2(\Delta m^2_{13}L/4E) \tag{3.42}$$
gli esperimenti con reattori vicini misurano $P_{\bar{\nu}_e \to \bar{\nu}_e} \simeq 1$ e possono mettere un limite superiore all'angolo di mixing: $\theta_{13} < 10°$;

- con questo limite, usando (3.40) con $\cos^4 \theta_{13} \simeq 1$, la misura di attenuazione di $\bar{\nu}_e$ da reattori lontani permette di migliorare il risultato ottenuto con i neutrini solari:
$$\theta_{12} = 32.4° \qquad \Delta m^2_{12} = 7.9\ 10^{-5}\ eV^2$$

3.9.6 Neutrini atmosferici

Gli esperimenti che studiano i neutrini prodotti nell'atmosfera sono fatti in laboratori sotterranei e usano come bersaglio l'acqua. Rivelano la produzione di elettroni e muoni mediante la radiazione Čerenkov, misurano la direzione e il percorso nel rivelatore, la prima è fortemente correlata con la direzione dei neutrini, il secondo

fornisce una stima (non precisa) dell'energia. Elettroni e muoni sono prodotti nel rivelatore con le reazioni

$$\nu_e N \to e^- N' \qquad \nu_\mu N \to \mu^- N' \tag{3.43}$$

e le reazioni coniugate di carica iniziate da anti-neutrini che producono e^+ e μ^+, ma i rivelatori Čerenkov non distinguono la carica elettrica.

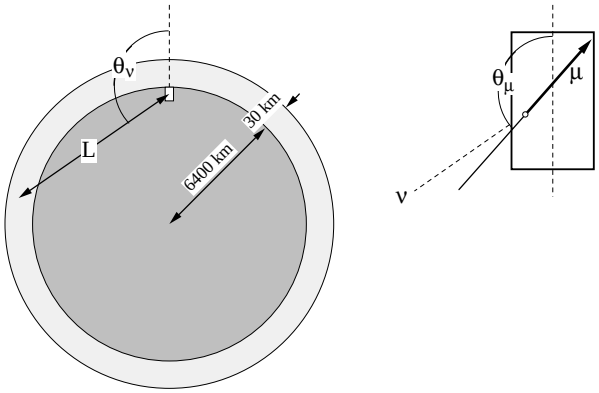


Figure 3.91: Interazioni di neutrini atmosferici in un rivelatore Čerenkov. Un neutrino attraversa la Terra percorrendo la distanza $L = \sqrt{R^2 \cos^2\theta + 2Rh} - R\cos\theta$. Il rivelatore (a destra) misura l'angolo θ.

Nell'atmosfera vengono prodotti neutrini e antineutrini nei decadimenti in cascata dei mesoni

		ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	ν_e	$\bar{\nu}_e$
$\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$	$\mu^+ \to e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e$	×	×	×	
$K^+ \to \mu^+\nu_\mu$	$\mu^+ \to e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e$	×	×	×	
$K \to \pi\mu^+\nu_\mu$	$\mu^+ \to e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e$	×	×	×	
$K \to \pi e^+\nu_e$				×	

e i decadimenti coniugati di carica per cui $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$. Il rapporto tra la frequenza delle due reazioni (3.43) dipende dall'energia dei neutrini e non è molto diverso da $\mu : e = 2 : 1$. Lo studio delle oscillazioni è stato fatto dividendo le osservazioni in quattro categorie

μ di alta energia	e di alta energia
μ di bassa energia	e di bassa energia

La direzione fornisce una misura della distanza L come mostrato in Fig.3.91, mentre la classificazione in energia fornisce un'indicazione sull'energia dei neutrini, E. Confrontando il risultato con quanto previsto dal flusso di raggi cosmici si osserva che:

- non ci sono deviazioni per gli elettroni né in funzione dell'angolo, né in funzione dell'energia;

- si osserva una chiara diminuzione del flusso dei muoni per $\cos\theta < 0$ (grande distanza) sia per bassa energia che per alta energia, $\frac{\Phi_L(\nu_\mu)}{\Phi_0(\nu_\mu)} \to \frac{1}{2}$;

- l'effetto diminuisce per $\cos\theta \to 1$ (piccola distanza) per muoni di bassa energia e si annulla per muoni di alta energia.

Non si osservano oscillazioni di ν_e, mentre vi è una chiara evidenza di oscillazioni di ν_μ che dipendono da L/E. Il valore di $\sin^2 \Delta m^2_{12} L/4E$ è troppo piccolo per produrre un effetto nell'intervallo di distanze e energie esplorate, se ne deduce che la differenza di massa è $\Delta m^2_{23} \gg \Delta m^2_{12}$ e/o $\Delta m^2_{13} \gg \Delta m^2_{12}$. Gli esperimenti con neutrini da acceleratori indicano che $\Delta m^2_{13} \simeq \Delta m^2_{23}$, quindi si possono esprimere le probabilità di oscillazione in funzione di un solo valore

$$\begin{array}{l} P_{\nu_e \to \nu_\mu} = \sin^2 2\theta_{13}\ \sin^2\theta_{23}\ \sin^2 \Delta m^2_{23} L/4E \\ P_{\nu_e \to \nu_\tau} = \sin^2 2\theta_{13}\ \cos^2\theta_{23}\ \sin^2 \Delta m^2_{23} L/4E \\ P_{\nu_e \to \nu_e} = 1 - \sin^2 2\theta_{13}\ \sin^2 \Delta m^2_{23} L/4E \\ P_{\nu_\mu \to \nu_e} = P_{\nu_e \to \nu_\mu} \\ P_{\nu_\mu \to \nu_\tau} = \cos^4\theta_{13}\ \sin^2 2\theta_{23}\ \sin^2 \Delta m^2_{23} L/4E \\ P_{\nu_\mu \to \nu_\mu} = 1 - (\sin^2 2\theta_{13}\ \sin^2\theta_{23} + \cos^4\theta_{13}\ \sin^2 2\theta_{23}) \sin^2 \Delta m^2_{23} L/4E \end{array} \tag{3.44}$$

Le oscillazioni di ν_e sono soppresse perché $\sin^2 2\theta_{13} < 0.1$ e analogamente le oscillazioni $\nu_\mu \to \nu_e$, quindi la diminuzione del flusso di muoni è interpretata come oscillazioni $\nu_\mu \to \nu_\tau$. La Fig.3.92 mostra la funzione $1 - \mathcal{S} f(L)$, nel caso $\mathcal{S} = 1$, per ν_μ di bassa e alta energia e la correlazione tra la L e $\cos\theta$ dell'esperimento in Fig.3.91. I ν_μ di bassa energia oscillano sempre, quelli di alta energia solo per valori grandi della distanza. Dato che il flusso si riduce di $\frac{1}{2}$ a grande distanza, questo indica che $\mathcal{S} = \sin^2 2\theta_{13}\ \sin^2\theta_{23} + \cos^4\theta_{13}\ \sin^2 2\theta_{23} \simeq \sin^2 2\theta_{23} \simeq 1$, cioè il mixing $\nu_\mu \to \nu_\tau$ è massimo. Dalle misure si ottiene

$$\theta_{23} = 45^\circ \qquad\qquad \Delta m^2_{23} = 2.5\ 10^{-3}\ eV^2 \tag{3.45}$$

3.9.7 Neutrini da acceleratori

Dalla Tabella 3.1 si osserva che gli esperimenti di scomparsa di neutrini ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ prodotti con acceleratori sono poco sensibili a piccoli valori di Δm^2. Gli esperimenti di apparizione di ν_e sono sensibili a

$$P_{\nu_\mu \to \nu_e} = \sin^2 2\theta_{13}\ \sin^2\theta_{23}\ \sin^2 \Delta m^2_{13} L/4E$$

se $L/E \simeq 100\ km/GeV$. Un esperimento fatto in queste condizioni ha confermato che θ_{13} è piccolo e ha misurato Δm^2_{13}

$$\theta_{13} < 10^\circ \qquad\qquad \Delta m^2_{13} = 2.8\ 10^{-3}\ eV^2 \simeq \Delta m^2_{23}$$

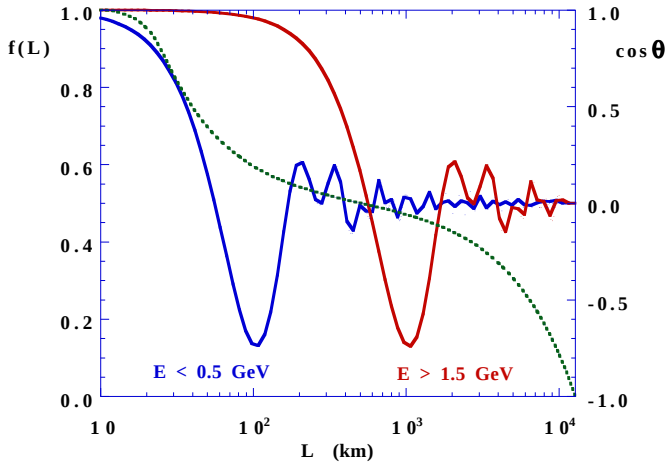


Figure 3.92: Funzione $1 - \mathcal{S}f(L)$ con $\mathcal{S} = 1$ per ν_μ di bassa e alta energia per l'esperimento di Fig.3.91 (scala a sinistra). Angolo di zenith (scala a destra).

L'indicazione dei neutrini atmosferici è che le oscillazioni $\nu_\mu \to \nu_\tau$ sono massime, questo va però confermato con esperimenti di apparizione di ν_τ. Questi esperimenti devono usare fasci di energia elevata per superare la soglia di produzione $\nu_\tau N \to \tau^- N'$ e quindi distanze $L \gg 100\ km$. Inoltre l'identificazione del leptone τ richiede impulsi elevati, $p > m_\tau$, e rivelatori con ottima risoluzione spaziale perché la lunghezza di decadimento è molto piccola, $\lambda_\tau = \frac{p}{m_\tau} c\tau_\tau$ con $m_\tau = 1.78\ GeV/c^2$ e $c\tau_\tau = 0.087\ mm$. Esperimenti con queste caratteristiche sono in corso, ma non hanno ancora prodotto risultati.

3.9.8 I parametri delle oscillazioni

Le osservazioni su neutrini solari, da reattore e atmosferici forniscono informazioni complementari che riflettono la fattorizzazione della matrice U_{PMMS} in tre rotazioni di:

$$\underset{\text{neutrini}}{U_{PMMS}} = \underset{\text{atmosferici}}{R_{23}} \times \underset{\text{da reattore}}{R_{13}} \times \underset{\text{solari}}{R_{12}}$$

$\sin^2\theta_{12}$	0.30	$\pm$ 0.02	
$\sin^2\theta_{23}$	0.50	$\pm$ 0.08	
$\sin^2\theta_{13}$	< 0.03		
Δm^2_{12}	7.9	$\pm$ 0.2	$10^{-5}\ eV^2$
Δm^2_{23}	2.5	$\pm$ 0.2	$10^{-3}\ eV^2$
Δm^2_{13}	$\simeq \Delta m^2_{23}$		

Table 3.2: Parametri di oscillazione di neutrini.

Dal confronto delle varie misure si ottengono i valori di Tabella 3.2. Per l'angolo θ_{13} esiste solo un limite superiore e non si hanno informazioni sulla fase δ che rap-

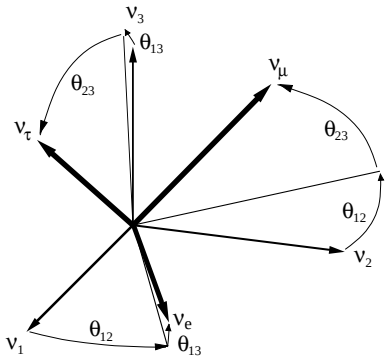


Figure 3.93: Angoli di rotazione per gli autostati dei neutrini.

presenta la violazione della simmetria CP per i leptoni. Gli angoli di mixing sono rappresentati in Fig.3.93. Nell'ipotesi $\sin\theta_{13} \ll 1$, $\cos\theta_{13} \simeq 1$, la matrice di mixing si approssima con

$$U_{PMMS} \simeq \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & s_{13} \\ -s_{12}c_{23} & c_{12}c_{23} & s_{23} \\ s_{12}s_{23} & -c_{12}s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}$$

Poiché $\sin^2\theta_{23} \simeq \frac{1}{2}$ e $\sin^2\theta_{12} \simeq \frac{1}{3}$ gli autostati di massa si possono approssimare con

$$|\nu_1\rangle \simeq \frac{2|\nu_e\rangle - |\nu_\mu\rangle + |\nu_\tau\rangle}{\sqrt{6}} \qquad |\nu_2\rangle \simeq \frac{|\nu_e\rangle + |\nu_\mu\rangle - |\nu_\tau\rangle}{\sqrt{3}} \qquad |\nu_3\rangle \simeq \frac{|\nu_\mu\rangle + |\nu_\tau\rangle}{\sqrt{2}}$$

e, poiché $\Delta m^2_{12} \ll \Delta m^2_{23}$, i valori di massa dei neutrini che contengono $|\nu_e\rangle$ sono simili: $m_1 \simeq m_2$. Esistono due possibili ordinazioni di massa, quella *normale*: $m_3 \gg m_2 > m_1$, e quella *invertita*: $m_2 > m_1 \gg m_3$, rappresentate in Fig.3.94. Qualunque sia l'ordine, i valori effettivi delle masse non sono noti perché si misurano solo le differenze Δm^2_{jk} e si conoscono solo i limiti superiori delle masse m_{ν_α}.

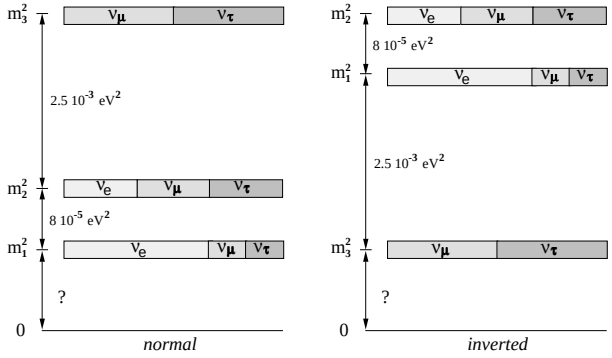


Figure 3.94: Valori delle differenze di massa $m^2_j - m^2_k$.

3.10 Universo e particelle

L'Universo, come lo osserviamo oggi, non è statico e la sua estensione è finita. Già Keplero aveva osservato che in un Universo statico e infinito e con densità di stelle uniforme, come si riteneva all'inizio del '600, il cielo non dovrebbe essere scuro ma luminoso. Il paradosso del cielo scuro di notte è stato analizzato da Olbers nel 1823 ed è noto come *paradosso di Olbers*.

Il flusso di energia che si osserva emesso da una stella di luminosità L a distanza r è $\phi = L/4\pi r^2$. Se si fa l'ipotesi che le stelle abbiano una densità uniforme ρ, il flusso totale di energia è $\Phi = \int \frac{\langle L \rangle}{4\pi r^2}\ \rho\ 4\pi r^2 dr$. Questo è infinito nelle ipotesi che la luminosità non dipenda dalla distanza, la densità sia uniforme e che l'integrale vada esteso a $r \to \infty$. Per risolvere il paradosso alcune di queste ipotesi devono essere false. Le sorgenti luminose sono in effetti raggruppate in galassie e ammassi di galassie, ma se osservato su grande scala, l'Universo ha una densità di sorgenti abbastanza uniforme. Le altre due ipotesi invece non sono verificate. L'Universo non è statico, tutte le sorgenti luminose si allontanano dalla Terra con velocità che aumenta con la distanza: la luce che si osserva diminuisce con la distanza. Se questo è vero, tutte le sorgenti si allontanano tra loro ed è plausibile che il moto di allontanamento sia iniziato Δt tempo fa e che quindi si possa osservare solo la luce emessa entro un orizzonte finito pari a $c\Delta t$.

3.10.1 L'Universo in espansione

La prima fondamentale osservazione fu fatta da Edwin Hubble nel 1929 che scoprì che ogni galassia si allontana dalla Terra con velocità proporzionale alla sua distanza. La distanza era determinata dalla luminosià, la velocità dallo spostamento verso il rosso, *redshift* [23], delle righe degli spettri atomici rispetto a quelli osservati sulla Terra; il rapporto tra velocità e distanza, $H = \dot{r}/r$ è chiamato *costante di Hubble* anche se non è propriamente costante. Questa osservazione mostra che l'Universo è in espansione e che l'espansione è iniziata approssimativamente H^{-1} tempo fa dopo una fase iniziale esplosiva come ipotizzato già nel 1923 da Georges Lemaître. Il modello del *Big Bang* è stato formulato in modo più quantitativo venti anni dopo da Gamow.

Se consideriamo due osservatori che partono dallo tesso punto al tempo t_0 e procedono con velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, la loro velocità relativa al tempo t sarà $\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_2 -$

[23] Se una sorgente luminosa emette radiazione con frequenza ν e si muove ripetto all'osservatore con velocità $u = \pm\beta c$ lungo la direzione di osservazione, per la legge di trasformazione del 4-impulso (appendice 4.2), la frequenza osservata è

$$\nu' = \mp\beta\gamma\nu + \gamma\nu = \frac{1 \mp \beta}{(1-\beta^2)^{1/2}}\nu = \left(\frac{(1 \mp \beta)^2}{(1+\beta)(1-\beta)}\right)^{1/2}\nu$$

Se la sorgente si allontana, $\nu' = \sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}\nu$, $\lambda' = \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}\lambda$, l'osservatore misura una lunghezza d'onda λ' maggiore, spostata verso il rosso. Il redshift è il rapporto $z = \frac{\lambda'-\lambda}{\lambda}$; $1 + z = \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$.

$\vec{r}_1) = \frac{d\vec{r}}{dt}$, e la loro distanza sarà $r = \int |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| dt = v(t - t_0)$ se hanno proceduto a velocità costante. In realtà la velocità sarà diminuita per effetto dell'attrazione gravitazionale e quindi la costante di Hubble viene a dipendere dal tempo. Il valore misurato oggi è $H_0 = 100h\ km\ s^{-1}/Mpc$, il *MegaParSec* [24] è pari a $3.09\ 10^{19}\ km$ e il valore del *parametro di Hubble* h tiene conto della variabilità delle definizioni: $h = 0.73 \pm 0.04$. Per le considerazioni che seguono assumiamo

$$H_0 = 2.36\ 10^{-18}\ s^{-1} \qquad\qquad H_0^{-1} = 13.4\ 10^9\ anni$$

che corrisponde ad un orizzonte di $\sim 10^{26}\ m$. I valori delle grandezze misurate, o derivate, qui e nel seguito hanno in generale un'incertezza del $(5 \div 10)\%$.

L'evoluzione dell'Universo è definita dall'equazione di campo di Einstein della relatività generale. Per una distribuzione di materia omogenea e isotropa, la soluzione per l'estensione di spazio R è fornita dalle equazioni di Friedmann-Lemaître

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3c^2} \tag{3.46}$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} - \frac{k}{R^2} - \frac{\Lambda}{3c^2} \tag{3.47}$$

$G = 0.67\ 10^{-10}\ m^3 Kg^{-1} s^{-2} = 1.07\ 10^{-20}\ GeV^{-1} m^5 s^{-4}$ è la costante di Newton, ρ è la densità di energia, p è la pressione, k è il *parametro di curvatura* dello spazio e Λ è la *costante cosmologica* introdotta da Einstein, prima dell'affermazione del concetto di espansione dell'Universo, per evitare l'implosione gravitazionale e ottenere una soluzione stazionaria.

La relazione tra densità e pressione si ottiene derivando la (3.47) rispetto al tempo e dividendo per $2\dot{R}/R$: $\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{4\pi G}{3c^2}\frac{\dot{\rho}R}{\dot{R}} + \frac{k}{R^2}$;
sostituendo la (3.46) si ha: $\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{4\pi G}{3c^2}\left(\frac{\dot{\rho}R}{\dot{R}} + 2\rho\right) + \frac{\Lambda}{3c^2} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3c^2}$;

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + p) \tag{3.48}$$

- se $\rho \sim R^{-3}$, come previsto per la materia, $\dot{\rho} = -3\rho\dot{R}/R$ e quindi $p = 0$;
- se $\rho \sim R^{-4}$, come previsto per la radiazione, $\dot{\rho} = -4\rho\dot{R}/R$ e quindi $p = \rho/3$: la pressione di radiazione si aggiunge alla gravità;
- se ρ fosse costante si otterrebbe $p = -\rho$: la pressione si oppone alla gravità.

La soluzione con $\Lambda = 0$, è quella che si ottiene con la meccanica classica. Se infatti consideriamo una massa m all'interno del campo gravitazionale prodotto da una distribuzione di materia uniforme, posta a distanza r dal centro della distribuzione

[24] Il parallasse-secondo è la distanza che corrisponde all'osservazione di una stella sotto l'angolazione di un secondo d'arco ($2\pi/60 \times 60 \times 360 = 4.85\ \mu rad$) da due punti distanti una unità astronomica ($AU = 1.5\ 10^{11}\ m$): $pc = 3.09\ 10^{16}\ m$.

di materia, la legge di gravitazione è $m\ddot{r} = -GmM/r^2$. La somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale della massa m è una costante del moto che possiamo esprimere in termini dell'energia di riposo mc^2

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GmM}{r} = -\frac{\kappa}{2}mc^2$$

Nell'ipotesi di densità di energia uniforme, la massa M all'interno della sfera di raggio r è $M = 4\pi\rho r^3/3c^2$ e si ha

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi Gm\rho r^2}{3c^2} = -\frac{\kappa}{2}mc^2 \qquad\qquad \dot{r}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3c^2}\, r^2 - \kappa c^2$$

Se $\kappa = -1$, la curvatura è positiva e l'energia totale è positiva: il sistema tenderà ad espandersi indefinitivamente e, poiché ρr^3 è costante $\rho r^2 \to 0$, il valore asintotico della velocità è $\lim_{t\to\infty} \dot{r} = c$. Se $\kappa = +1$, la curvatura è negativa e l'energia è negativa: il sistema raggiungerà una dimensione massima e poi tenderà a collassare. Se $\kappa = 0$, lo spazio è *piatto* e l'energia totale è nulla: il sistema si espande con velocità asintotica nulla, $\lim_{t\to\infty} \dot{r} = 0$.

Poiché nella descrizione dell'evoluzione dell'Universo possiamo considerare solo distanze relative ad un certo istante, definiamo la distanza al tempo t come prodotto della distanza misurata al tempo t_0 per un *fattore di scala*: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 R(t)$; la Fig.3.95 mostra l'andamento di $R(t)$ per un Universo chiuso ($k = +1$), piatto ($k = 0$) o aperto ($k = -1$). L'equazione di evoluzione di $R(t)$ è

$$r_0^2\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} r_0^2 R^2 - \kappa c^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} - \frac{k}{R^2}$$

Nel caso di Universo piatto, con $k = 0$, $\Lambda = 0$, l'*Universo di Einstein-de Sitter*, si

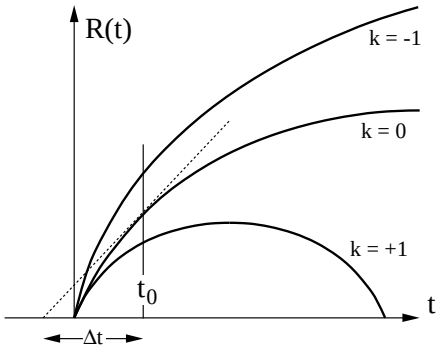


Figure 3.95: Fattore di scala dello spazio per i tre valori del parametro di curvatura; le misure son fatte oggi al tempo t_0.

ha

$$H^2 = \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2}$$

Il valore di densità di energia per cui si ha un Universo piatto è chiamata *densità critica*

$$\rho_c = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} = 5.6\ GeV/m^3$$

se il valore misurato è $\rho < \rho_c$ l'Universo tenderà ad espandersi indefinitivamente, se $\rho > \rho_c$ tenderà a contrarsi. Alla densità di energia contribuisce la materia non relativistica (barioni) e la radiazione (fotoni e neutrini); le misure mostrano che il contributo di materia barionica e radiazione è molto minore di ρ_c. Inoltre le misure dei moti delle galassie mostrano che queste si muovono con velocità maggiori di quelle previste se fossero soggette all'attrazione gravitazionale della materia visibile con cui interagiscono. Da queste osservazioni si deduce che nell'Universo è presente un grande quantità di materia che non emette radiazione, *materia oscura*, con densità di energia maggiore della materia barionica visibile. La densità di energia totale della materia e della materia barionica visibile è

$$\rho_m = 1.33 \qquad \rho_b = 0.23 \quad GeV/m^3$$

e la densità di energia della materia oscura è $\rho_{dm} = 1.10\ GeV/m^3$. In un Universo dominato dalla materia, la densità è inversamente proporzionale a R^3 e, se l'Universo è piatto, si ha $\rho R^3 = \rho_c R_0^3$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho_c}{3c^2 R^3} \qquad\qquad \dot{R} = \left(\frac{8\pi G\rho_c}{3c^2 R}\right)^{1/2}$$

In un Universo piatto dominato dalla materia lo spazio si espande proporzionalmente a $t^{2/3}$

$$\int R^{1/2} dR = \frac{2}{3} R^{3/2} = \left(\frac{8\pi G\rho_c}{3c^2}\right)^{1/2} t \qquad\qquad R(t) = \left(\frac{6\pi G\rho_c}{3c^2}\right)^{1/3} t^{2/3}$$

e il tempo di espansione è $t_0 = 2/3H_0 \simeq 9\ 10^9\ anni$, un po' più breve di quello che si ottiene da varie informazioni astronomiche.

3.10.2 La radiazione cosmica di fondo

La seconda fondamentale scoperta fu fatta da Arno Penzias e Robert W. Wilson [25] che nel 1965 osservarono che la potenza emessa dal cosmo sotto forma di radiazione elettromagnetica si comporta come quella di un corpo nero a temperatura di circa 2.7 K. La *radiazione cosmica di fondo* è emessa in modo isotropo da ogni parte dell'Universo con una distribuzione in frequenza che segue rigorosamente la distribuzione di Planck. La temperatura dell'Universo è oggi $T = (2.725 \pm 0.002)\ K$. La densità di energia della radiazione si ottiene dalla legge di emissione del corpo nero (appendice 4.1)

$$\rho_\gamma = \frac{4}{c}\sigma T^4 = 0.26\ 10^{-3}\ GeV/m^3$$

[25] premi Nobel per la fisica nel 1978

$\sigma = 354\ GeV\ s^{-1}m^{-2}K^{-4}$ è la costante di Stefan-Boltzmann. Poiché $\rho_\gamma \ll \rho_m$, oggi l'Universo è dominato dalla materia.

La legge di espansione della radiazione nello spazio è però diversa da quella della materia perché la lunghezza d'onda aumenta con R e l'energia diminuisce, la radiazione si *raffredda*. Poiché $\rho_\gamma \sim R^{-4}$, il termine di curvatura $\sim R^{-2}$ si può trascurare nell'equazione (3.47) per $R \to 0$; da questo si deduce che c'è stata un'epoca, prima che si formassero gli atomi, in cui la densità della radiazione era maggiore di quella della materia. La legge di espansione della radiazione è

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho_\gamma}{3c^2} \qquad\qquad \frac{\dot{\rho}_\gamma}{\rho_\gamma} = -\frac{4\dot{R}}{R} = -4\left(\frac{8\pi G\rho_\gamma}{3c^2}\right)^{1/2}\rho_\gamma^{1/2}$$

Risolvendo l'equazione $\dot{\rho}_\gamma = -4\sqrt{(\ldots)}\rho_\gamma^{3/2}$ si ha

$$\rho_\gamma = \left(\frac{3c^2}{32\pi G}\right)t^{-2} = \frac{4\sigma}{c}T^4 \tag{3.49}$$

quindi nell'epoca dominata dalla radiazione $R(t) \sim t^{1/2} \sim T^{-1}$.

Alla densità della radiazione elettromagnetica va aggiunta quella di fermioni ultrarelativistici, i neutrini che assumiamo abbiano massa nulla. Non si hanno misure del fondo di neutrini cosmici, ma da argomenti sulla produzione e separazione dei neutrini dalla materia barionica si può stimare che abbia oggi una temperatura di $1.9\ K$. Considerando il numero di specie di neutrini e antineutrini, e assumendo che abbiano massa nulla, la stima della densità di energia della radiazione è

$$\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma} = \frac{6}{2}\,\frac{7}{8}\,\frac{T_\nu^4}{T_\gamma^4} = 0.68 \qquad\qquad \rho_r = \rho_\gamma + \rho_\nu = 0.43\ 10^{-3}\ GeV/m^3$$

- Riassumiamo le relazioni delle statistiche di bosoni e fermioni:

$$dn = g_\pm \frac{4\pi p^2 dp}{8\pi^3\hbar^3}\frac{1}{e^{E/kT}\pm 1} = g_\pm \frac{1}{2\pi^2(\hbar c)^3}\frac{E^2dE}{e^{E/kT}\pm 1}$$

$$n = \int dn = g_\pm \frac{(kT)^3}{2\pi^2(\hbar c)^3}\int \frac{x^2dx}{e^x \pm 1} \tag{3.50}$$

$$\rho = \int E dn = g_\pm \frac{(kT)^4}{2\pi^2(\hbar c)^3}\int \frac{x^3dx}{e^x \pm 1} \tag{3.51}$$

Bose-Einstein: $\int \frac{x^s dx}{e^x-1} = s!\zeta(s+1)$; Fermi-Dirac: $\int \frac{x^s dx}{e^x+1} = s!(1-2^{-s})\zeta(s+1)$;
ζ è la funzione di Riemann: $\zeta(s) = \sum_n s^{-n}$;
con $\mathcal{N} = 1/2\pi^2(\hbar c)^3 = 6.6\ 10^{36}\ MeV^{-3}m^{-3}$, $Z_3 = 2\zeta(3) = 2.404$; $Z_4 = 6\zeta(4) = \pi^4/15$, si ha per fotoni e per specie di neutrino:

	g	n	ρ	$\langle E\rangle = \rho/n$
γ	2	$2\mathcal{N}Z_3(kT)^3$	$2\mathcal{N}Z_4(kT)^4$	$2.70kT$
$\nu+\bar{\nu}$	2	$2\frac{3}{4}\mathcal{N}Z_3(kT)^3$	$2\frac{7}{8}\mathcal{N}Z_4(kT)^4$	$3.15kT$

Per le densità di particelle, si ha: $n_b = \rho_b/m_b c^2 = 0.24\ m^{-3}$, $n_\gamma = \rho_\gamma/2.7kT_\gamma = 4.1\ 10^8\ m^{-3}$, $n_\nu = \rho_\nu/3.15kT_\nu = 3.3\ 10^8\ m^{-3}$. Il rapporto tra barioni e fotoni è

$$\frac{n_b}{n_\gamma} = 0.58\ 10^{-9} \tag{3.52}$$

3.10.3 L'energia del vuoto

Indicando con $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ la densità di energia normalizzata alla densità critica, si ha $\Omega_T = \sum_i \Omega_i = 0.24$

		barioni	materia oscura	radiazione
Ω	=	0.042	0.20	$7.8\ 10^{-5}$

Le osservazioni astronomiche danno altre informazioni importanti:

- l'isotropia della radiazione cosmica di fondo indica che l'Universo si sta espandendo con $\rho \simeq \rho_c$ e questo richiede $\Omega_T \simeq 1$;
- nella distribuzione della radiazione cosmica di fondo si osserva un piccola anisotropia, al livello di $\sim 10^{-5}$, che indica che fluttuazioni di densità, che presumibilmente hanno dato poi origine alle galassie, erano presenti in epoca anteriore alla separazione della radiazione dalla materia; questo implica che la materia oscura sia di natura non relativistica, cioè *fredda*, per cui è improbabile che questa sia formata da neutrini;
- la misura di alcune sorgenti ad elevato redshift ($z = 0.5 \div 1$) mostra che queste hanno velocità di recessione maggiore della legge lineare di Hubble; questo implica una accelerazione dell'espansione dell'Universo, contrariamente a quanto ci si aspetterebbe nel caso di densità critica se questa fosse soggetta alla sola attrazione gravitazionale.

Questa ultima osservazione, davvero sorprendente, può trovare una spiegazione se si fa l'ipotesi di un contributo alla densità di energia costante nel tempo che può essere legato alla costante cosmologica. Infatti nell'equazione (3.46) una sorgente di energia con densità costante produce una pressione negativa $p = -\rho$ che, come la costante cosmologica, tende ad accelerare l'espansione

$$\frac{\ddot{R}}{R} = +\frac{8\pi G\rho}{3c^2}$$

Dato che la densità di energia della materia e della radiazione cambiano nel tempo, si ritiene che questo contributo sia originato dalle fluttuazioni del vuoto (che non cambia nel tempo) e, per questo, si parla di *energia del vuoto*.

Alcune misure sull'anisotropia della radiazione cosmica di fondo indicano che la densità di energia del vuoto, $\Omega_\Lambda \simeq 0.75$, sia tale da ottenere l'energia critica: $\Omega_T \simeq 1$. L'origine della materia oscura e dell'energia del vuoto sono tuttora misteriosi e sono oggetto di un intenso lavoro di ricerca teorica e sperimentale per trovare spiegazione.

3.10.4 Il modello del Big-Bang

Sulla base dell'informazione disponibile, si cerca di andare indietro nel tempo e ricostruire le fasi dell'espansione dell'Universo. Trascuriamo la fase esplosiva iniziale e quella immediatamente successiva che sono di difficile rappresentazione. L'Universo è inizialmente dominato dalla radiazione e per $t \to 0$ la densità di energia aumenta $\sim T^4$ e, per questo, si parla di *Hot Big Bang*. A temperatura kT maggiore della massa delle particelle, queste – bosoni e fermioni, e le rispettive antiparticelle – sono in equilibrio con popolazione proporzionale al loro peso statistico di spin e isospin. Anche le particelle fortemente instabili sono mantenute in equilibrio fintanto che il tasso di produzione $\lambda_p = n\sigma v$ è maggiore della costante di decadimento $\lambda_d = 1/\tau$ e le reazioni di produzione bilanciano i decadimenti, ad esempio $q_i\bar{q}_j \leftrightarrow W^{\pm}$. La densità di energia, dalla relazione (3.51), è

$$\rho = \frac{\pi^2}{30(\hbar c)^3}\, g\, (kT)^4 \qquad\qquad g = \sum g_B + \frac{7}{8}\sum g_F$$

e la somma è fatta sui pesi statistici di bosoni e fermioni di massa $mc^2 > kT$. Dall'equazione (3.49) si ha il tempo di espansione

$$t = \left(\frac{3c^2}{32\pi G\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{90c^2(\hbar c)^3}{32\pi^3 G}\right)^{1/2} \frac{1}{g^{1/2}(kT)^2} = \frac{1}{g^{1/2}}\left(\frac{1.55\ MeV}{kT}\right)^2\ s$$

che dipende, oltre $\sim T^{-2}$, anche dal numero di particelle in equilibrio con la radiazione. A temperatura kT compresa tra la massa del protone e $\Lambda_{QCD} \sim 200\ MeV$ si ha una importante transizione da una fase in cui quark e gluoni sono liberi alla condensazione in adroni. Prima della transizione si ha

γ	gluoni	g_B	quark $u+d$	e	μ	ν	g_F	
2	2×8	18	3×8	4	4	6	38	$g = 205/4$

Dopo la transizione il numero di stati si è ridotto a 1/3

γ	g_B	e	μ	ν	g_F	
2	2	4	4	6	14	$g = 57/4$

A temperatura $kT \simeq 200\ MeV$, si sono formati protoni e neutroni, che non sono relativistici, il tempo di espansione è $t \simeq 20\ \mu s$, i pioni decadono mentre i muoni iniziano a decadere. Barioni e antibarioni dovrebbero avere la stessa densità, un po' più bassa della densità dei fotoni perchè inizia a diminuire più rapidamente $\sim e^{mc^2/kT}$. A questa temperatura la reazione $\gamma\gamma \leftrightarrow p\bar{p}$ $(n\bar{n})$ non è più all'equilibrio e si ha solo l'annichilazione nucleone-antinucleone che avviene fintanto che $n\sigma_{p\bar{p}}v_{p\bar{p}} > 1/t$. Quando la densità di nucleoni è divenuta troppo piccola l'annichilazione si arresta. Secondo stime basate sulla legge di espansione e sulla sezione d'urto di annichilazione, a temperatura $kT \sim 10\ MeV$ si ha $n_b/n_\gamma = n_{\bar{b}}/n_\gamma \simeq 10^{-18}$, e questo valore si dovrebbe conservare fino a oggi. Ma oggi non si osserva presenza

di antibarioni nell'Universo e il rapporto di densità n_b/n_γ misurato (3.52) è diverso per un fattore $\sim 10^9$! Quindi si deve supporre che la scomparsa dell'antimateria sia dovuta a fenomeni avvenuti a temperatura molto più elevata e che coinvolgano quark e antiquark. Le condizioni necessarie per la scomparsa dell'antimateria sono state enunciate da Sakharov nel 1966 e sono:

- l'intervento di un'interazione che non conserva il numero barionico;
- questa interazione agisce in condizioni di non equilibrio termico;
- la violazione della simmetria CP.

Quando l'Universo ha raggiunto la temperatura $kT \simeq 10\ MeV$, la densità di barioni si è stabilizzata, le particelle leggere (γ, e^+, e^-, ν, $\bar{\nu}$) sono in equilibrio termico con pesi statistici $g_B = 2$, $g_F = 10$, $g = 43/4$, il tempo di espansione è $t \simeq 7\ ms$, protoni e neutroni ($\tau_n = 980\ s$) sono stabili e hanno la stessa molteplicità.

3.10.5 La nucleosintesi primordiale

La terza importante osservazione quatitativa in supporto al modello del Big Bang è la misura dell'abbondanza di nuclei leggeri presenti nell'Universo. Infatti a temperatura più bassa, nei minuti successivi, si verificano le condizioni per la fusione di protoni e neutroni a formare i nuclei leggeri, Deuterio, Elio, ..., e le abbondanze relative prodotte in questa fase sono rimaste invariate fino all'inizio della nucleosintesi nelle stelle (capitolo ???).

Fintanto che la tempertura è maggiore della differenza di massa tra neutrone e protone, $\Delta m = 1.29\ MeV$, e della massa dell'elettrone, $0.51\ MeV$, le reazioni

$$\gamma\gamma \leftrightarrow e^+e^- \qquad \nu_e\bar{\nu}_e \leftrightarrow e^+e^- \qquad \nu_e p \leftrightarrow e^+ n \qquad \bar{\nu}_e n \leftrightarrow e^- p$$

mantengono l'equilibrio tra le diverse specie di particelle. I neutroni non hanno ancora il tempo di decadere, e protone e neutrone non hanno modo di fondere a formare il Deuterio perchè questo, non appena formato con la reazione $p\ d \rightarrow\ ^2H\ \gamma$ viene immediatamente scisso con la reazione inversa dato che $n_\gamma \gg n_b$.

A temperatura $kT = 1\ MeV$, la sezione d'urto dei neutrini è $\sigma_\nu \simeq G_F^2(\hbar c)^2 E_\nu^2/\pi \simeq 10^{-47}\ m^2$ (capitolo ???) e la densità dei neutrini è $n_\nu = 1.2\ 10^{37}\ m^{-3}$ per specie. La velocità di interazione, $n_\nu \sigma_\nu c \simeq 0.1\ s^{-1}$ è ormai minore dell'inverso del tempo di espansione, $t \simeq 1\ s$. A questo punto i neutrini ν_e si disaccoppiano e, data la piccola sezione d'urto, non interagiranno più col resto dell'Universo (i neutrini ν_μ e ν_τ si sono disaccoppiati da tempo).

A temperatura $kT < m_e c^2$ la densità di elettroni e positroni inizia a diminuire rispetto a quella dei fotoni. Come nel caso dei barioni, c'è un piccolo eccesso di elettroni e l'annichilazione $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ consuma il resto dei positroni. Quando $kT \simeq 20\ keV$ il numero di elettroni si è stabilizzato e non cambierà più. Durante questa fase, per effetto dell'annichilazione, la densità di fotoni non è diminuita $\sim T^4$, ma più lentamente. Nella trasformazione si conserva la densità di entropia, s =

$\frac{\rho+p/3}{T} = \frac{4\rho}{3T}$, fintanto che e^+, e^-, γ, sono in equilibrio. Se T_1 e T_2 sono le temperature iniziale e finale:

$$g_1 T_1^3 = g_2 T_2^3 \qquad \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3 = \frac{2 + 4 \times 7/8}{2} = \frac{11}{4}$$

Quindi T_γ è aumentata rispetto alla temperatura dei neutrini, T_ν, e il rapporto si è mantenuto durante l'espansione fino ad oggi se i neutrini hanno massa nulla, e oggi dovremmo osservare $T_\nu = (4/11)^{1/3}\ 2.725\ K = 1.95\ K$.

I neutrini si disaccoppiano dai nucleoni quando $kT \simeq 0.9\ MeV$ e $t \simeq 1\ s$, il rapporto tra neutroni e protoni è $n_n^0/n_p^0 = e^{-\Delta m/kT} \simeq 0.24$ e i neutroni iniziano a decadere $n \to p e^- \bar{\nu}$ con vita media $\tau = 890\ s$. Al tempo t si ha $n_n(t) = n_n^0 e^{-t/\tau}$, $n_p(t) = n_p^0 + n_n^0(1 - e^{-t/\tau})$ e il rapporto cambia

$$\frac{n_n(t)}{n_p(t)} = \frac{0.24\ e^{-t/\tau}}{1.24 - 0.24\ e^{-t/\tau}}$$

La reazione $p\ n \to\ ^2H\ \gamma$ è esotermica con $Q = 2.23\ MeV$, e l'energia media dei fotoni comincia a essere $\ll Q$, ma la formazione del Deuterio è ritardata perché $n_\gamma \gg n_b$. I rapporti delle densità di p, n, ^2H e γ si stabilizzano quando la densità dei fotoni non è più sufficiente a produrre la fotodisintegrazione; per $kT \simeq 0.05\ MeV$ e $t \simeq 400\ s$ si è formata una piccola quantità di ^2H e ora il rapporto è

$$r = \frac{n_n}{n_p} = 0.14$$

Una volta formato, il Deuterio partecipa alle reazioni di fusione

$$p\ ^2H \to\ ^3He\ \gamma \quad Q = 5.5 \qquad n\ ^3He \to\ ^4He\ \gamma \quad Q = 20.6\ MeV$$
$$n\ ^2H \to\ ^3H\ \gamma \quad Q = 6.3 \qquad p\ ^3H \to\ ^4He\ \gamma \quad Q = 19.8\ MeV$$

Tutte queste reazioni sono fortemente esotermiche, $Q \gg kT$, e procedono in tempi molto brevi solo nel verso $\to$. Si formano l'Elio e piccole quantità di ^2H, ^3He, ^3H che poi decadrà in ^3He. Con un rapporto r di 2 neutroni ogni 14 protoni, il rapporto n_{He}/n_H è 1/12 $(= \frac{r/2}{1-r})$. La frazione di massa di Elio formata ($m_{He} \simeq 4m_H$) è

$$Y = \frac{4n_{He}}{n_H + 4n_{He}} = \frac{2r}{1+r} = 0.25$$

Non si formano nuclei con $A = 5$, ma piccolissime quantità di ^6Li, ^7Li, e ^7Be (fortemente instabile), poi la nucleosintesi non può avanzare perché le densità di nuclei con A = 6–7 è troppo piccola e il nucleo ^8Be non si forma nella fusione $^4He^4He$.

Le abbondanze relative dei nuclei leggeri formati in questa fase di evoluzione dell'Universo dipende dal rapporto n_b/n_γ e si è mantenuta costante fin quando, molto tempo dopo, è iniziata la nucleosintesi nelle stelle che però ha variato di poco i rapporti. Le misure forniscono questi risultati

$$Y = 0.25 \pm 0.01 \qquad \frac{^2H}{H} = (2.8 \pm 0.3)\ 10^{-5} \qquad \frac{^7Li}{H} = (1.7^{+1.0}_{-0.1})\ 10^{-10}$$

La Fig.3.96 mostra il confronto tra questi risultati e la previsione del modello del Big Bang in funzione del rapporto n_b/n_γ. Le abbondanze relative sono in buon accordo con il valore $n_b/n_\gamma = (0.56 \pm 0.5)\ 10^{-9}$ che si ottiene da misure della radiazione cosmica di fondo.

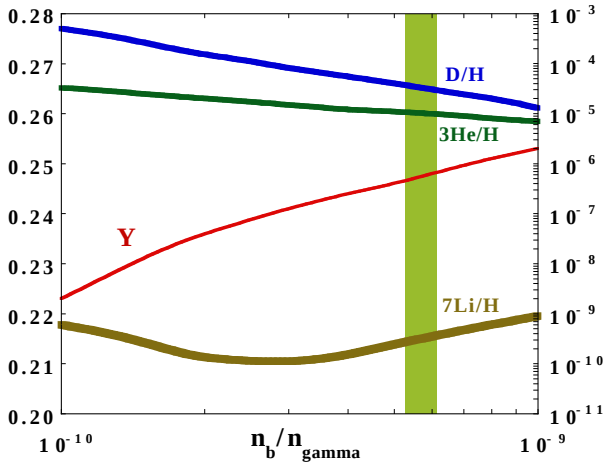


Figure 3.96: Previsione del modello del Big Bang per il rapporto Y di Elio/Idrogeno (scala a sinistra) e di altri nuclei leggeri (scala a destra) in funzione di n_b/n_γ.

La materia neutra

Protoni, nuclei leggeri ed elettroni sono rimasti sotto forma di plasma in equilibrio con la radiazione fintanto che l'energia termica si è mantenuta maggiore dell'energia di ionizzazione. Per $kT < 1\ eV$ inizia la formazione degli atomi che procede lentamente perché $n_b \ll n_\gamma$; al tempo $t \simeq 10^6$ anni, si sono formati gli atomi, la materia barionica dell'Universo è costituita per 3/4 di Idrogeno, 1/4 di Elio e una piccola frazione di Deutero, Elio-3, ..., ed è divenuta trasparente alla radiazione γ. Questa, che ha $kT \simeq 0.1\ eV$, continua a raffreddarsi $\sim T^4$, ed è la stessa che si osserva dopo 13 miliardi di anni come radiazione cosmica di fondo.

Da questo momento inizia l'epoca della materia che è neutra e non interagisce più con la radiazione, e si raffredda $\sim T^3$. Ma ha memoria di alcune fluttuazioni di densità formatesi nella prima fase di espansione; inizia a lavorare la gravitazione che che sulla base di queste fluttuazioni di densità, forma le galassie e gli ammassi.

La Fig.3.97 mostra l'andamento della densità di energia in funzione del tempo da 1 microsecondo dopo il Big Bang, quando si sono formati gli adroni, a $t_0 =$ oggi.

La tabella riassume alcune tappe importanti della storia.

t	kT	ρ (GeV/m^3)	
1 μs	1 GeV	10^{47}	quark+gluoni $\rightarrow$ adroni
1 s	1 MeV	10^{35}	ν si disaccoppiano, e^+ annichilano
5 minuti	50 keV	10^{29}	si formano i nuclei leggeri
$\frac{1}{3}$M anni	0.3 eV	10^{9}	si formano gli atomi, γ si disaccoppiano
100M anni	10 meV	10^{5}	si formano le galassie
13G anni	0.2 meV	1	oggi

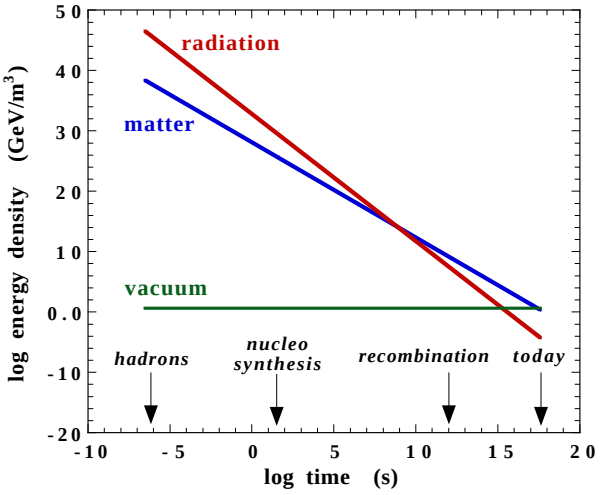


Figure 3.97: Densità di energia della radiazione, materia e vuoto in funzione del tempo di espansione dell'Universo.

Chapter 4

Appendici

4.1 Radiazione del corpo nero

Un corpo in equilibrio termico a temperatura T irraggia energia, la radiazione ha uno spettro di frequenza continuo che dipende solo dalla frequenza e dalla temperatura e non dalla forma né dal materiale. La potenza emessa per unità di frequenza dall'elemento di superficie dS nell'angolo solido $d\Omega$ che forma un angolo θ rispetto alla normale alla superficie (Fig.4.1) è

$$d^3W = \frac{e(\nu, T)}{\pi} \cos\theta dS d\Omega d\nu$$

dove $e(\nu, T)$ è il *potere emissivo specifico* $[J\ m^{-2}]$. Questo è pari alla potenza irraggiata in un emisfero per unità di superficie e per unità di frequenza

$$\frac{d^2W}{dSd\nu} = \frac{e(\nu, T)}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \cos\theta d\cos\theta d\phi = e(\nu, T)$$

Se il corpo è esposto a radiazione, parte di questa sarà riflessa o diffusa e l'altra

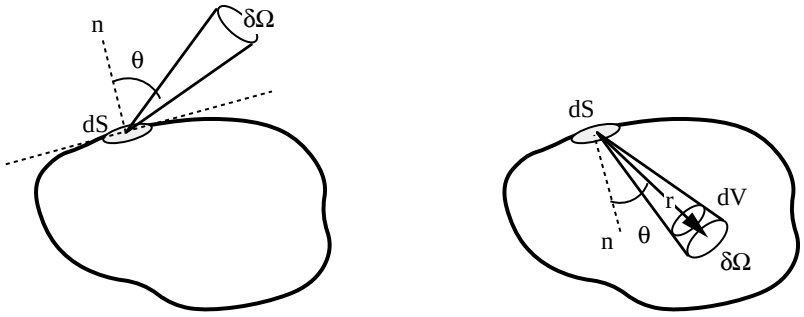


Figure 4.1: Radiazione emessa da una superficie

parte sarà assorbita. La frazione di energia assorbita, $a(\nu, T)$, è il *potere assorbente specifico* ed è una quantità adimensionale. La *legge di Kirchhoff*, del 1859, stabilisce che il rapporto tra il potere emissivo e il potere assorbente di un corpo è una funzione

universale di frequenza e temperatura, questa è il *potere emissivo del corpo nero*

$$\frac{e(\nu,T)}{a(\nu,T)} = e_o(\nu,T)$$

Il corpo nero ha potere assorbente specifico unitario per ogni frequenza, $a(\nu,T) = 1$. Per provare questa legge, Kirchhoff considerò due superfici inizialmente alla stessa temperatura T. Se il rapporto tra potere emissivo e potere assorbente fosse diverso per le due superfici, si stabilirebbe un passaggio di energia da una all'altra e queste acquisterebbero temperature diverse. Con queste due sorgenti si potrebbe realizzare una macchina termica capace di convertire energia termica in lavoro senza altri cambiamenti del sistema, in contraddizione con il secondo principio della termodinamica.

Per realizzare una sorgente che rappresenti un corpo nero, Kirchhoff considerò una cavità mantenuta a temperatura T in cui è praticato un foro piccolo rispetto alla superficie della cavità. La radiazione che penetra all'interno della cavità attraverso il foro ha una piccola probabilità di uscire dal foro e, anche se le pareti interne non sono molto assorbenti, sarà totalmente assorbita dopo riflessioni multiple all'interno.

Le misure fatte da Plummer e Pringsheim nel 1899 sul potere emissivo di cavità confermarono le previsioni basate sulla trattazione della radiazione come un fluido termodinamico e, in particolare che

- lo spettro emissivo del corpo nero a temperatura T è una *funzione universale*, indipendente dal materiale, che tende a zero per $\nu \to 0$ e per $\nu \to \infty$;
- il rapporto tra la frequenza per cui si ha il massimo dello spettro e la temperatura del corpo è una costante (*legge dello spostamento di Wien*)

$$\frac{\nu_{max}}{T} = costante$$

- l'energia totale irraggiata è proporzionale alla quarta potenza della temperatura (*legge di Stefan-Boltzmann*)

Il potere emissivo di una cavità, la quantità che si misura negli esperimenti, è proporzionale alla densità di energia per unità di volume e per unità di frequenza, quantità che si può calcolare in base a considerazioni di termodinamica. Consideriamo una superficie chiusa (Fig.4.1); la potenza irraggiata per unità di frequenza dall'elemento di superficie dS è

$$\frac{d^3W}{d\nu} = \frac{e_o(\nu,T)}{\pi}\ \cos\theta\ dSd\Omega$$

Questa si propaga con velocità c all'interno della cavità; l'energia contenuta nell'elemento di volume dV è

$$\frac{d^4E}{d\nu} = \frac{d^3W}{d\nu}\ dt = \frac{e_o(\nu,T)}{\pi}\ \cos\theta\ dSd\Omega\ \frac{dr}{c}$$

L'elemento di volume all'interno della cavità è $dV = r^2 dr d\Omega = dS \cos\theta dr$

$$\frac{d^3E}{d\nu} = \frac{e_o(\nu,T)}{\pi}\ \frac{dV}{c}\ d\Omega$$

Integrando sull'angolo solido otteniamo la *densità di energia specifica*

$$u(\nu,T) = \frac{d^2E}{dV d\nu} = \frac{4}{c}\ e_o(\nu,T)$$

Trattando la radiazione all'interno della cavità come un fluido termodinamico, Wien ottenne nel 1894 una relazione funzionale per la densità di energia specifica

$$u(\nu,T) = \nu^3 F(\nu/T)$$

dove $F(\nu/T)$ è una funzione universale che dipende solo dal rapporto tra frequenza e temperatura. Integrando lo spettro si ottiene la legge di Stefan-Boltzmann

$$U(T) = \int_0^\infty u(\nu,T)d\nu = \int_0^\infty \nu^3 F(\nu/T)d\nu = T^4 \int_0^\infty x^3 F(x)dx = costante \times T^4$$

con $x = \nu/T$. Introducendo la formula di Planck della densità di energia per unità di frequenza

$$e(\nu,T) = \frac{c}{4}\frac{8\pi}{c^3}\ \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$\int e(\nu,T)d\nu = \frac{2\pi(kT)^4}{h^3c^2}\int \frac{x^3dx}{e^x-1} = \frac{(kT)^4}{4\pi^2\hbar^3c^2}\ \frac{\pi^4}{15} = \sigma\ T^4$$

si ottiene il valore della *costante di Stefan-Boltzmann*

$$\sigma = \frac{\pi^2k^4}{60\hbar^3c^2} = 5.67\ 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$$

Calcolando il massimo dello spettro, ν_{max}, si ottiene la legge dello spostamento di Wien

$$\frac{d}{d\nu}\ u(\nu,T) = x^2T^2\ [3F(x) + xF'(x)] = 0$$

infatti la soluzione dell'equazione differenziale, se esiste, si ha per $x_{max} = costante$

$$\frac{\nu_{max}}{T} = 5.9\ 10^{10}\ s^{-1}K^{-1}$$

4.2 Richiami di relatività ristretta

4.2.1 Il principio di relatività

Consideriamo due sistemi di riferimento in moto relativo con velocità costante e supponiamo per semplicità che le terne di assi siano parallele. L'osservatore O è in quiete nel riferimento $\vec{x} \equiv (x,y,z)$. L'osservatore O' è in quiete nel riferimento

$\vec{x}' \equiv (x', y', z')$ e si muove con velocità $\vec{u} \equiv (u, 0, 0)$ rispetto all'osservatore O. La relatività galileiana assume che il tempo sia lo stesso per i due osservatori $t' \equiv t$. Le leggi di trasformazione sono, per le coordinate

$$x' = x - ut \qquad y' = y \qquad z' = z$$

per le componenti della velocità

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'} = \frac{d\vec{x}'}{dt} \qquad v'_x = v_x - u \qquad v'_y = v_y \qquad v'_z = v_z$$

e per l'accelerazione

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a} = invariante$$

Quindi, se la massa (il coefficiente di inerzia al moto) non dipende dal sistema di riferimento le leggi della meccanica sono valide in qualunque riferimento inerziale.

Le leggi dell'elettromagnetismo prevedono che l'evoluzione temporale delle componenti del campo elettromagnetico nel vuoto soddisfi l'equazione di d'Alembert

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}}$$

che non è invariante per trasformazioni galileiane. D'altra parte, il principio di relatività deve essere valido sia per le leggi della meccanica che per quelle dell'elettro magnetismo, a meno che non si assuma *ad hoc* che esista un mezzo in cui si propagano le onde elettromagnetiche con velocità c solidale con un sistema di riferimento privilegiato, l'*etere*. L'esperimento fatto da Michelson e Morley nel 1887 ha dimostrato che la velocità della luce è indipendente dal moto relativo tra la sorgente e l'osservatore e che cioè non esiste un sistema di riferimento privilegiato in cui si propagano le onde elettromagnetiche. Rimangono quindi due ipotesi possibili perché sia le leggi della meccanica che quelle dell'elettromagnetismo rispettino il principio di relatività

- le leggi della meccanica non sono formulate in modo corretto;
- le leggi dell'elettromagnetismo non sono formulate in modo corretto.

Il Principio di Relatività enunciato da Einstein nel 1905 prevede che

- le leggi della fisica (meccanica e elettromagnetismo) sono le stesse in ogni riferimento inerziale;
- la velocità della luce nel vuoto è la stessa in ogni riferimento inerziale.

Le conseguenze dell'enunciato sono

- il tempo non è invariante;
- la relatività galileiana e le leggi della meccanica newtoniana non sono formulate in modo corretto, ma sono valide solo nell'approssimazione $u/c \ll 1$.

4.2.2 Le trasformazioni di Lorentz

Le leggi di trasformazione dello spazio-tempo che soddisfano il principio di relatività di Einstein sono state ricavate da Lorentz [1] nel 1890 per assicurare l'invarianza delle leggi dell'elettromagnetismo. Per rispettare l'isotropia dello spazio-tempo, cioè l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento inerziali, le leggi di trasformazione devono essere lineari nelle quattro coordinate

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned}$$

Facendo riferimento alla Fig.4.2 si ha $a_{21} = a_{23} = a_{24} = 0; a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0;$ $a_{22} = a_{33} = 1$; e, per simmetria del moto lungo gli assi $x - x'$, $a_{12} = a_{13} = a_{42} = a_{43} = 0$. Senza perdere di generalità, le trasformazioni diventano

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{14}t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= a_{41}x + a_{44}t \end{aligned}$$

Inoltre, poiché quando $x' = 0$ si ha $x = ut$ per ogni valore di t, risulta $a_{14} = -ua_{11}$.

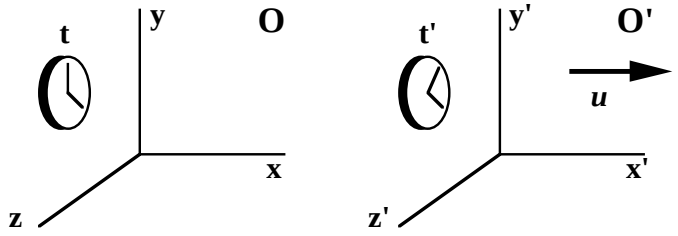


Figure 4.2: Due riferimenti inerziali in moto relativo

Le relazioni tra gli altri parametri liberi si ottengono imponendo che la velocità di propagazione della luce sia la stessa nei due riferimenti

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

$$a_{11}^2 - c^2a_{41}^2 = 1 \qquad c^2a_{44}^2 - u^2a_{11}^2 = c^2 \qquad c^2a_{41}a_{44} + ua_{11}^2 = 0$$

Da cui si ottiene:

$$a_{11} = a_{44} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \qquad a_{41} = \mp\frac{u/c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

[1] premio Nobel per la fisica nel 1902

Quindi, introducendo i parametri $\beta = u/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, e fissando la direzione ($\pm$) del moto di x' rispetto a x, si ha

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(-\beta x/c + t) \end{aligned}$$

Definendo il *quadrivettore posizione*, $X \equiv (x, y, z, ct) \equiv (\vec{x}, ct)$, la trasformazione di Lorentz è $X' = L(\beta) \cdot X$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma x - \beta\gamma ct \\ y \\ z \\ -\beta\gamma x + \gamma ct \end{pmatrix}$$

La matrice di trasformazione $L(\beta)$ ha determinante unitario, $det(L) = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$, cioè una trasformazione di Lorentz è una rotazione nello spazio-tempo. Per la trasformazione inversa si ha $X = L^{-1}(\beta) \cdot X'$, con $L^{-1}(\beta) = L(-\beta)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma x' + \beta\gamma ct' \\ y' \\ z' \\ \beta\gamma x' + \gamma ct' \end{pmatrix}$$

Nell'approssimazione non relativistica, $u \ll c$, $\beta \ll 1$, $\gamma = 1 + \beta^2/2 + \ldots$, al primo ordine in β si ha:

$$x' = (1 + \beta^2/2 + \ldots)x - \beta(1 + \beta^2/2 + \ldots)ct = x - \beta ct + \ldots \approx x - ut$$

$$t' = -(\beta/c)(1 + \beta^2/2 + \ldots)x + (1 + \beta^2/2 + \ldots)t = t - \beta^2 x/u \approx t$$

Alcune conseguenze delle trasformazioni di Lorentz sulle misure di distanze e intervalli di tempo sono:

- *Contrazione delle distanze.* L'osservatore O' misura la distanza tra due punti $d_o = x'_2 - x'_1$. Questa si trasforma: $x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) - \beta\gamma c(t_2 - t_1)$. L'osservatore O misura le posizioni corrispondenti x_2, x_1 *allo stesso istante* $t_2 = t_1$: quindi misura la distanza $d = x_2 - x_1 = d_o/\gamma$.

- *Dilatazione degli intervalli di tempo.* L'osservatore O' misura l'intervallo tra due istanti: $T_o = t'_2 - t'_1$ *nello stesso punto* $x'_2 = x'_1$. L'osservatore O misura l'intervallo di tempo $T = (\beta\gamma/c)(x'_2 - x'_1) + \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma T_o$. Quindi gli intervalli di tempo non sono invarianti. L'intervallo di tempo misurato nel sistema di quiete è chiamato *intervallo di tempo proprio*: $dt_o = dt/\gamma$.

4.2.3 Quadrivettori

Le trasformazioni di Lorentz assicurano che la relazione $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = c^2 \Delta t^2$ sia valida in ogni sistema di riferimento, ovvero

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta y^2 = invariante$$

Se consideriamo il *quadrivettore posizione* $X \equiv (x, y, z, ct)$, l'indipendenza della velocità della luce dal sistema di riferimento corrisponde all'invarianza del prodotto scalare tra quadrivettori posizione definendo il *tensore metrico*

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il *prodotto sacalare di due quadrivettori è invarianate*

- se X, Y, sono due quadrivettori definiti nel riferimento dell'osservatore O e $X' = L(\beta)X$, $Y' = L(\beta)Y$ i quadrivettori corrispondenti nel riferimento dell'osservatore O' di componenti

  $$x'_\alpha = \Sigma_\gamma \; L_{\alpha\gamma} \; x_\gamma \qquad y'_\beta = \Sigma_\delta \; L_{\beta\delta} \; y_\delta$$

  il prodotto scalare è

  $$X' \cdot Y' = \Sigma_{\alpha\beta} \; x'_\alpha \; g_{\alpha\beta} \; y'_\beta = \Sigma_{\alpha\beta}\Sigma_\gamma \; L_{\alpha\gamma} \;\; g_{\alpha\beta} \; \Sigma_\delta \; L_{\beta\delta} \; y_\delta =$$

  $$= \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \; x_\gamma \; (\Sigma_{\alpha\beta} \; L_{\alpha\gamma} \; g_{\alpha\beta} \; L_{\beta\delta}) \; y_\delta = \Sigma_{\gamma\delta} \; x_\gamma \; g_{\gamma\delta} \; y_\delta = X \cdot Y$$

Nello spazio-tempo $(\vec{x}, ct)$ l'ipercono $X^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2 = 0$, $x = \pm ct$, detto *cono di luce*, definisce tre zone (Fig.4.3):

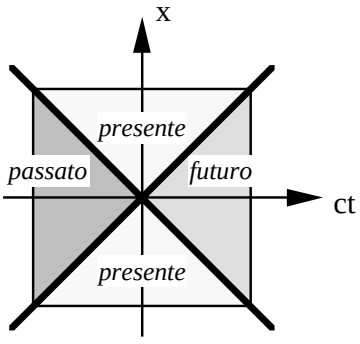


Figure 4.3: Cono di luce

- nella la zona $X^2 < 0$ due eventi dello spazio-tempo possono essere contemporanei: questa zona rapresenta quindi il *presente*. Quadrivettori con $V^2 < 0$ sono definiti di *tipo spazio*;

- eventi nella la zona $X^2 > 0$ non possono essere contemporanei. Quadrivettori con $V^2 > 0$ sono definiti di *tipo tempo*;
- la zona $t > 0$ rappresenta il *futuro*;
- la zona $t < 0$ rappresenta il *passato*.

4.2.4 Trasformazione della velocità

Se un corpo ha velocità $\vec{v}' = d\vec{x}'/dt'$ nel riferimento dell'osservatore O' e questo si muove con velocità $\vec{u}$ rispetto al riferimento dell'osservatore O, la velocità del corpo rispetto all'osservatore O ha componenti

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'}\,\frac{dt'}{dt} = \frac{\frac{d}{dt'}(\gamma x' + \beta\gamma ct')}{\frac{d}{dt'}(\beta\gamma x'/c + \gamma t')} = \frac{\gamma v'_x + \beta\gamma c}{\beta\gamma v'_x/c + \gamma} = \frac{v'_x + \beta c}{1 + \beta v'_x/c} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt'}\,\frac{dt'}{dt} = \frac{v'_y}{\gamma(1+\beta v'_x/c)} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt'}\,\frac{dt'}{dt} = \frac{v'_z}{\gamma(1+\beta v'_x/c)} \end{aligned}$$

La trasformazione inversa si ottiene cambiando $+\beta$ in $-\beta$.

4.2.5 Il quadrivettore velocità

Il quadrivettore velocità è definito come la *derivata rispetto al tempo proprio del quadrivettore posizione* $U = dX/dt_o \equiv d(\vec{x}, ct)/dt_o$. Poiché $dt_o = dt/\gamma$, si ha

$$\frac{d\vec{x}}{dt_o} = \frac{d\vec{x}}{dt}\frac{dt}{dt_o} = \gamma\vec{v} \qquad \frac{dct}{dt_o} = \gamma c \qquad U = \frac{dX}{dt_o} \equiv (\gamma\vec{v}, \gamma c)$$

Le componenti del quadrivettore velocità si trasformano secondo le trasformazioni di Lorentz, $U' = L(\beta) \cdot U$ e il prodotto scalare di quadrivelocità è invariante.

$$\begin{aligned} U'_x &= \frac{dx'}{dt_o} = \frac{d}{dt_o}(\gamma x - \beta\gamma ct') = \gamma U_x - \beta\gamma U_4 \\ U'_y &= \frac{dy'}{dt_o} = \frac{dy}{dt_o} = U_y \\ U'_z &= \frac{dz'}{dt_o} = \frac{dz}{dt_o} = U_z \\ U'_4 &= \frac{dct'}{dt_o} = \frac{d}{dt_o}(-\beta\gamma x + \gamma ct) = -\beta\gamma U_x + \gamma U_4 \end{aligned}$$

Il modulo della quadri-velocità è chiaramente invariante

$$U'^2 = U^2 = U_4^2 - U_x^2 - U_y^2 - U_z^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2\vec{v}^2 = \gamma^2 c^2(1 - \beta^2) = c^2$$

4.2.6 Il quadrivettore quantità di moto

In meccanica classica la quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v} = md\vec{x}/dt$ si conserva in un sistema isolato. Poiché la velocità non è invariante, per preservare la conservazione della quantità di moto occorre supporre che la massa non sia invariante. Se definiamo m_o la massa misurata nel riferimento di quiete, la quantità di moto è

$$\vec{p} = m_o d\vec{x}/dt_o = m_o \gamma d\vec{x}/dt = \gamma m_o \vec{v} = m\vec{v}$$

si ha cioè la definizione della meccanica classica se definiamo $m = \gamma m_o$. La massa, il coefficiente di inerzia al moto, aumenta con la velocità. Definiamo il

$$\textit{quadrivettore quantità di moto} \qquad P = m_o U = (m_o \gamma \vec{v}, m_o \gamma c)$$

Il modulo della quadri-quantità di moto, o quadri-impulso, è invariante

$$P^2 = m^2c^2 - \vec{p}^2 = m^2(c^2 - \vec{v}^2) = m_o^2 c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) = m_o^2 c^2$$

quindi $dP^2 = 2c^2 m dm - 2\vec{p} \cdot d\vec{p} = 0$. L'energia cinetica è $K = \vec{p}^2/2m$ e la variazione di energia cinetica è

$$dK = \vec{p} \cdot d\vec{p}/m = c^2 dm \qquad\qquad K = \int_o^p dK = c^2 \Delta m = mc^2 - m_o c^2$$

Se interpretiamo $m_o c^2$ come *energia di riposo*, l'energia meccanica totale è proporzionale alla quarta componente del quadri-impulso

$$E = m_o c^2 + K = mc^2 = \gamma m_o c^2$$

Nel limite non relativistico, $\beta \ll 1$, $\gamma = 1 + \beta^2/2 + 3\beta^4/8 + \ldots$,

$$E = m_o c^2 + \frac{1}{2}\, m_o \beta^2 c^2$$

Le componenti del quadrivettore quantità di moto, $P = m_o U \equiv (\vec{p}, E/c)$, si trasformano secondo le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{array}{rcl} p'_x & = & \gamma p_x - \beta\gamma E/c \\ p'_y & = & p_y \\ p'_z & = & p_z \\ E'/c & = & -\beta\gamma p_x + \gamma E/c \end{array}$$

Per una particella di massa m_o e velocità βc si ha

$$p = \beta\gamma m_o c \qquad E = \gamma m_o c^2 \qquad E^2 = (m_o c^2)^2 + (pc)^2$$

ovvero

$$\beta = \frac{pc}{E} \qquad\qquad \gamma = \frac{E}{m_o c^2} \qquad\qquad \beta\gamma = \frac{p}{m_o c}$$

Il valore dell'energia si esprime di solito in eV (o nei multipli: keV, MeV, GeV, ...), quindi è pratica usuale esprimere i valori di massa in MeV/c^2 e i valori di quantità di moto in MeV/c. In questo modo si può omettere c in tutte le relazioni tra massa, quantità di moto e energia.

4.2.7 Il quadrivettore accelerazione

Il quadrivettore accelerazione è definito come la *derivata rispetto al tempo proprio della quadri-velocità*

$$A = \frac{dU}{dt_o} \equiv \left(\frac{d}{dt_o}\ \gamma\vec{v}, \frac{d}{dt_o}\ \gamma c \right) = \frac{1}{m_o}\ \frac{dP}{dt_o}$$

Le componenti della quadri-accelerazione si trasformano secondo le trasformazioni di Lorentz, $A' = L(\beta) \cdot A$. Per trovare le componenti osserviamo che

$$\frac{d\gamma}{dt_o} = \gamma\ \frac{d}{dt}(1-\vec{\beta}^2)^{-1/2} = \gamma^4\ \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \qquad\qquad \frac{d\vec{v}}{dt_o} = \gamma c\ \frac{d\vec{\beta}}{dt}$$

Le componenti sono

$$\frac{d}{dt_o}\ \gamma\vec{v} = \gamma^4 c \left(\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) \vec{\beta} + \gamma^2 c\ \frac{d\vec{\beta}}{dt} \qquad\qquad \frac{d}{dt_o}\ \gamma c = \gamma^4 c\ \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt}$$

Il modulo quadro del quadrivettore è

$$A^2 = \gamma^8 c^2 (\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt})^2 - \gamma^8 c^2 (\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt})^2\ \beta^2 - 2\gamma^6 c^2 (\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt})^2\ \beta^2 - \gamma^4 c^2 (\frac{d\vec{\beta}}{dt})^2 =$$

$$\gamma^8 c^2 (\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt})^2 (1-\beta^2) - 2\gamma^6 c^2 (\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt})^2 \beta^2 - \gamma^4 c^2 (\frac{d\vec{\beta}}{dt})^2 = -\gamma^6 c^2 (\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt})^2 \beta^2 - \gamma^4 c^2 (\frac{d\vec{\beta}}{dt})^2$$

$$A^2 = -\gamma^4 c^2 \left[\gamma^2 \left(\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \right] = -\gamma^4\ [\gamma^2 (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 + \vec{a}^2]$$

Nel limite non relativistico $\beta \ll 1$, $\gamma \to 1$; in relatività galileiana si ha $A^2 \to -c^2 (\frac{d\beta}{dt})^2 = -\vec{a}^2$, e poiché A^2 è invariante, il valore dell'accelerazione, $a = \sqrt{-A^2}$, è invariante.

4.2.8 Il quadrivettore forza

Se nel riferimento dell'osservatore O' agisce la forza $\vec{f}'$ su un corpo in moto con velocità $\vec{v}'$, le componenti della forza $\vec{f}$ nel riferimento O sono (Fig.4.4)

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{dp_x}{dt} = \frac{\frac{d}{dt'}(\gamma p'_x + \beta\gamma E'/c)}{\frac{d}{dt'}(\beta\gamma x'/c + \gamma t')} = \frac{f'_x + \beta \vec{f}' \cdot \vec{v}'/c}{1+\beta v'_x/c} \\ f_y &= \frac{dp_y}{dt} = \frac{f'_y}{\gamma(1+\beta v'_x/c)} \\ f_z &= \frac{dp_z}{dt} = \frac{f'_z}{\gamma(1+\beta v'_x/c)} \end{aligned}$$

e la potenza è

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\frac{d}{dt'}(\beta\gamma p'_x c + \gamma E')}{\frac{d}{dt'}(\beta\gamma x'/c + \gamma t')} \qquad\qquad \vec{f} \cdot \vec{v} = \frac{\beta c f'_x + \vec{f}' \cdot \vec{v}'}{1 + \beta v'_x/c}$$

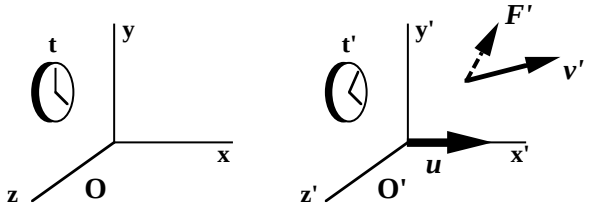


Figure 4.4: Trasformazione delle componenti di una forza

Il quadrivettore forza, definito come *derivata rispetto al tempo proprio del quadri-impulso*,

$$F = \frac{dP}{dt_o} \equiv \left(\frac{d\vec{p}}{dt_o}, \frac{dE/c}{dt_o} \right)$$

si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz, $F' = L(\beta) \cdot F$. Se il corpo è in quiete nel riferimento dell'osservatore O', $(\vec{v}' = 0, \vec{v} = \vec{u})$, la componente longitudinale, $f_L = f_x$, e la componente trasversa, $f_T = (f_y^2 + f_z^2)^{1/2}$, della forza nel riferimento dell'osservatore O sono

$$f_L = f'_L \qquad\qquad f_T = f'_T/\gamma$$

La componente longitudinale della forza rimane invariata, mentre la componente trasversa si riduce del fattore $1/\gamma$. Poiché $dt = \gamma dt'$, la componente trasversa dell'impulso $f_T dt$ è invariante.

Per ricavare la legge di trasformazione delle componenti dei campi elettrici e magnetici, consideriamo una carica elettrica q in quiete nel riferimento dell'osservatore O', $(\vec{v}' = 0, \vec{v} = \vec{u})$ e soggetta all'azione dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$. La forza che agisce sulla carica è $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. L'invarianza di gauge dell'elettromagnetismo (appendice 4.7) assicura che la carica elettrica è invariante. L'osseratore O' misura una forza $\vec{f}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$. Le componenti del campo elettrico sono:

$$\begin{array}{lcl} f'_x = f_x & \Rightarrow & E'_x = E_x \\ f'_y = \gamma f_y & \Rightarrow & E'_y = \gamma(E_y - uB_z) \\ f'_z = \gamma f_z & \Rightarrow & E'_z = \gamma(E_z + uB_y) \end{array}$$

e, invertendo la relazione, si ha

$$E_y = \gamma(E'_y + uB'_z) \qquad\qquad E_z = \gamma(E'_z - uB'_y)$$

Per le componenti del campo magnetico si ha

$$B'_x = B_x \qquad B'_y = \gamma(B_y + uE_z/c^2) \qquad B'_z = \gamma(B_z - uE_y/c^2)$$

Quindi le componenti longitudinali del campo elettrico e del campo magnetico sono invariate, la componente trasversa del campo elettrico [magnetico] aumenta del fattore γ e dipende anche dal valore del campo magnetico [elettrico] nel riferimento

dell'osservatore O

$$\begin{aligned} E'_L &= E_L & \qquad E'_T &= \gamma\left(E_T + c\ (\vec{\beta}\wedge\vec{B})_T\right) \\ B'_L &= B_L & \qquad B'_T &= \gamma\left(B_T - \tfrac{1}{c}\ (\vec{\beta}\wedge\vec{E})_T\right) \end{aligned}$$

Ad esempio, una carica q produce un campo elettrico a simmetria sferica nel riferimento di quiete e il campo magnetico è nullo. Nel riferimento in cui ha velocità $\vec{u}$ (Fig.4.5) le linee di campo si addensano per la contrazione delle distanze e inoltre è presente una corrente elettrica lungo l'asse del moto, $x\ i\hat{x} = q\vec{u}$, che produce un campo magnetico secondo la legge di Biot-Savart.

Analogamente per un dipolo magnetico $\vec{\mu}$. Nel riferimento di quiete vi è il campo magnetico di dipolo e il campo elettrico è nullo. Nel riferimento in cui ha velocità $\vec{u}$ le linee di campo si addensano e si osserva un campo elettrico indotto dalla variazione di flusso del campo magnetico.

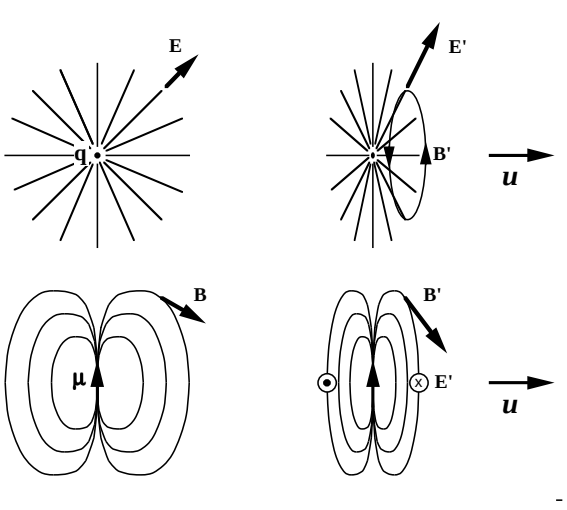


Figure 4.5: Trasformazione dei campi generati da una carica elettrica e da un dipolo magnetico in moto con velocità $\vec{u}$

Le trasformazioni delle componenti del campo elettromagnetico sono

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x & \qquad E'_x &= E_x \\ B'_y &= \gamma B_y + \beta\gamma E_z/c & \qquad E'_y &= \gamma E_y - \beta\gamma c B_z \\ B'_z &= \gamma B_z - \beta\gamma E_y/c & \qquad E'_z &= \gamma E_z + \beta\gamma c B_y \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} B'_x \\ B'_y \\ B'_z \\ E'_x/c \\ E'_y/c \\ E'_z/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & +\beta\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & +\beta\gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ E_x/c \\ E_y/c \\ E_z/c \end{pmatrix}$$

4.2.9 Il tensore elettromagnetico

Usando la definizione del 4-vettore potenziale elettromagnetico (appendice 4.7), $A = (\vec{A}, V/c)$ e del 4-gradiente, $\nabla = (\vec{\nabla}, \partial/\partial ct)$, che si trasformano

$$A'_\alpha = \sum_\beta L_{\alpha\beta}\ A_\beta \qquad\qquad \partial'_\alpha = \sum_\beta L_{\alpha\beta}\ \partial_\beta$$

si definisce il *tensore elettromagnetico* (antisimmetrico) come 4-rotore del 4-potenziale elettromagnetico, $F = \nabla \wedge A$, con componenti $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ che si trasformano

$$F'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma\delta} L_{\alpha\gamma}\ L_{\beta\delta}\ F_{\gamma\delta}$$

Le componenti del tensore elettromagnetico sono

$$\begin{array}{l} F_{12} = \partial_x A_y - \partial_y A_x = +B_z \\ F_{23} = \partial_y A_z - \partial_z A_y = +B_x \\ F_{13} = \partial_x A_z - \partial_z A_x = -B_y \\ F_{41} = \partial_4 A_x - \partial_x A_4 = E_x/c \\ F_{42} = \partial_4 A_y - \partial_y A_4 = E_y/c \\ F_{43} = \partial_4 A_z - \partial_z A_4 = E_z/c \end{array} \qquad F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z/c \\ E_x/c & E_y/c & E_z/c & 0 \end{pmatrix}$$

e si trasformano

$$F'_{12} = \partial'_x A'_y - \partial'_y A'_x = (\gamma\partial_x - \beta\gamma\partial_4)A_y - \partial_y(\gamma A_x - \beta\gamma A_4) = \gamma F_{12} - \beta\gamma F_{42}$$

$$F'_{13} = \partial'_x A'_z - \partial'_z A'_x = (\gamma\partial_x - \beta\gamma\partial_4)A_z - \partial_z(\gamma A_x - \beta\gamma A_4) = \gamma F_{13} - \beta\gamma F_{43}$$

$$F'_{23} = \partial'_y A'_z - \partial'_z A'_y = \partial_y A_z - \partial_z A_y = F_{23}$$

$$F'_{41} = \partial'_4 A'_x - \partial'_x A'_4 = (\gamma\partial_4 - \beta\gamma\partial_x)(\gamma A_x - \beta\gamma A_4) - (\gamma\partial_x - \beta\gamma\partial_4)(\gamma A_4 - \beta\gamma A_x) =$$
$$= (\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)(\partial_4 A_x - \partial_x A_4) = F_{41}$$

$$F'_{42} = \partial'_4 A'_y - \partial'_y A'_4 = (\gamma\partial_4 - \beta\gamma\partial_x)A_y - \partial_y(\gamma A_4 - \beta\gamma A_x) = \gamma F_{42} - \beta\gamma F_{12}$$

$$F'_{43} = \partial'_4 A'_z - \partial'_z A'_4 = (\gamma\partial_4 - \beta\gamma\partial_x)A_z - \partial_z(\gamma A_4 - \beta\gamma A_x) = \gamma F_{43} - \beta\gamma F_{13}$$

Le equazioni di Maxwell sono invarianti per trasformazioni di Lorentz e si scrivono in modo compatto

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_\alpha \partial_\alpha F_{\beta\alpha} = \mu_o j_\beta$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0$$

e la densità di energia del campo elettromagnetico, $u = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B})$, è

$$\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{E^2}{c^2} + B^2\right) = \mu_o u$$

4.3 L'esperimento di Michelson e Morley

Se esiste un mezzo in cui si propagano le onde elettromagnetiche, l'*etere*, un osservatore in moto rispetto ad esso deve essere in grado di rivelare l'effetto della velocità relativa. In particolare, un osservatore sulla Terra si trova in un riferimento che si muove con velocità media $u = 3\ 10^4\ m\ s^{-1}$ ($\beta = 10^{-4}$) attorno al Sole. (La velocità di rotazione attorno all'asse terrestre è circa 100 volte più piccola e quindi trascurabile).

L'esperimento per osservare l'effetto della volicità relativa tra una sorgente e l'ipotetico etere fu fatto nel 1887 usando l'interferometro messo a punto da Michelson [2] (Fig.4.6). Una sorgente S invia un fascio luminoso la cui intensità è in parte trasmessa e in parte riflessa da una lastra di vetro semi-argentata P che forma un angolo di 45° con la direzione del fascio. I due fasci percorrono i tratti di lunghezza ℓ_1 e ℓ_2 e vengono riflessi dagli specchi M_1 e M_2. Poi il primo fascio viene riflesso dalla lastra P e il secondo la attraversa di modo che i due fasci raggiungono il telescopio T dove si osserva l'interferenza. Se $\ell_1 = \ell_2$ e l'interferometro è in quiete rispetto all'etere, i due fasci giungono in fase e l'interferenza è costruttiva.

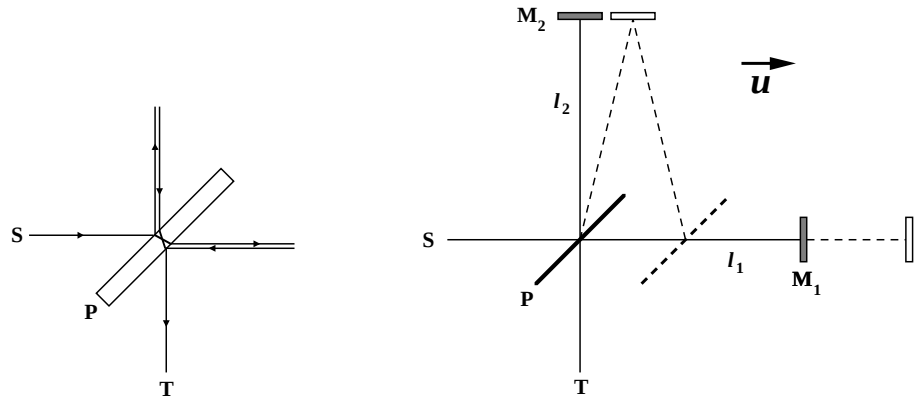


Figure 4.6: Esperimento di Michelson e Morley

Se l'interferometro si muove con velocità u parallela a ℓ_1,

- il primo raggio percorre il tratto ℓ_1 prima a velocità $c+u$ e poi a velocità $c-u$ e impiega il tempo

$$t_1 = \frac{\ell_1}{c+u} + \frac{\ell_1}{c-u} = \frac{2\ell_1 c}{c^2-u^2} = \frac{2\ell_1}{c}\frac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2\ \frac{2\ell_1}{c}$$

- il secondo raggio percorre due volte il tratto di lunghezza $\ell = [\ell_2^2 + (ut_2)^2]^{1/2}$ a velocità c; $t_2^2 = \ell^2/c^2 = \ell_2^2/c^2 + u^2 t_2^2/c^2$; $t_2^2(1-\beta^2) = \ell^2/c^2$; e impiega il tempo

$$t_2 = \gamma\ \frac{2\ell_2}{c}$$

[2] premio Nobel per la fisica nel 1907

Se $\ell_1 = \ell_2$, la differenza in tempo è

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2\ell}{c}(\gamma^2 - \gamma) = \frac{2\ell}{c}(1 + \beta^2 + \ldots - 1 - \beta^2/2 - \ldots) \simeq \frac{\ell}{c}\,\beta^2$$

Nell'esperimento si utilizzava come sorgente una lampada di Sodio che emetteva luce di lunghezza d'onda $\lambda = 0.59\ 10^{-10}\ m$ e i bracci dell'interferometro erano lunghi circa 10 m. Quindi l'esperimento era sicuramente in grado di misurare una differenza di fase dovuta al moto rispetto all'etere con velocità $\beta \simeq 10^{-4}$, $\phi = 2\pi c\Delta t/\lambda = 2\pi\beta^2\ell/\lambda \simeq 1\ rad$, ma non fu osservato alcun effetto di interferenza. L'interferometro era flottante su un bagno di mercurio e poteva essere ruotato in ogni direzione rispetto alla velocità u della Terra. In particolare, ruotando di 90° si scambiava il tempo di percorrenza della luce lungo i due bracci.

L'esperimento fu ripetuto con diverse orientazioni dei bracci dell'interferometro e in diversi periodi dell'anno senza mai osservare alcun effetto del moto rispetto all'etere. Alcune ipotesi *ad hoc* per sotenere l'ipotesi dell'esistenza dell'etere, come quella del trascinamento da parte della Terra oppure della contrazione dei bracci dell'interferometro lungo la direzione della velocità u, si dimostrarono infondate. Quindi fu concluso che non esiste un riferimento privilegiato per la propagazione delle onde elettromagnetiche.

4.4 Il paradosso dei gemelli

Il paradosso dei gemelli è un effetto reale, verificato con precisione in molti esperimenti. Condideriamo due orologi identici, ad esempio, due particelle instabili identiche che hanno vita media τ, e hanno carica elettrica. La prima è ferma nel laboratorio, la seconda è vincolata da un campo magnetico a percorrere una circonferenza di raggio R con velocità angolare costante ω e periodo T (misurato dall'orologio del laboratorio). Le due particelle si incontrano nello stesso punto dopo ogni periodo, ma per un osservatore nel laboratorio la particella ferma ha vita media τ mentre la particella in moto ha vita media $\gamma\tau$ con $\gamma = (1 - \omega^2R^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} > 1$. Quindi la seconda invecchia più lentamente della prima. Dopo n giri, la probabilità di sopravvivenza della particella in quiete è $P = e^{-nT/\tau}$ minore di quella della particella in moto $P' = e^{-nT/\gamma\tau}$. La simmetria tra due sistemi di riferimento è assicurata se questi sono *inerziali*, ma in questo caso il secondo orologio non è in moto rettilineo uniforme rispetto al primo e quindi la simmetria non sussiste: da qui il paradosso.

Consideriamo due riferimenti inerziali in moto relativo con velocità costante $\vec{v}$ lungo l'asse x. Rispetto alle quantità misurate dall'osservatore O del primo riferimento l'osservatore O' misura

$$x' = \gamma x - \beta\gamma ct \qquad\qquad ct' = -\beta\gamma x + \gamma ct$$

e la trasformazione è rappresentata nel piano $x\times ct$ in Fig.4.7. La retta $x' = costante$ è nel cono del futuro, mentre la *linea di simultaneità*, $t' = costante$, è nel cono del presente. Proiettando sull'asse ct un punto lungo la retta $x' = costante$ si ottiene

che O osserva che i tempi si dilatano per l'osservatore O'. L'effetto è simmetrico se facciamo la stessa rappresentazione dell'osservatore O che si muove con velocità $-\vec{v}$ rispetto all'osservatore O': $x = \gamma x' + \beta\gamma ct'$, $ct = \beta\gamma x' + \gamma ct'$.

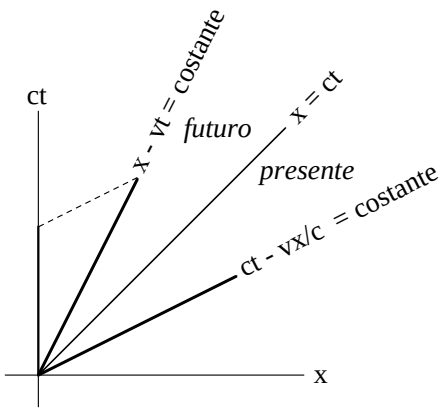


Figure 4.7: Rappresentazione del moto di O' visto da O.

Consideriamo ora due gemelli che sincronizzano gli orologi nello stesso punto, $x = x' = 0$. Il gemello O rimane fermo, il gemello O' si muove con velocità costante v_1 fino ad un punto a distanza d, qui inverte il moto e torna al punto di partenza con velocità costante v_2. Quando si incontrano, se per semplicità assumiamo $v_2 = -v_1$, il primo gemello ha misurato un intervallo di tempo $T = 2d/v$, il secondo ha misurato

$$T' = \oint dt' = \int \frac{dt}{\gamma_1} + \int \frac{dt}{\gamma_2} = \frac{T}{\gamma} < T \tag{4.1}$$

ed è quindi più giovane.

La storia dei gemelli è rappresentata nel piano $x \times ct$ in Fig.4.8. Il gemello O percorre la linea $x = costante = 0$. Nel primo tratto, il gemello O' percorre la linea $x - vt = 0$ fino al punto $x = d$. Qui inverte il moto e percorre la linea $x = d - v(t - t_d) = 2d - vt$ e incontra il gemello O al tempo $2t_d = 2d/v$. Le linee di simultaneità durante il moto sono $\gamma(ct - vx/c) = costante$ nel primo tratto, e $\gamma(ct + vx/c) = costante$ nel secondo. Quindi nel primo tratto il gemello O' vede il gemello O *più giovane*, ma nel punto di inversione del moto vi è una discontinuità e O diventa *improvvisamente più vecchio* di un intervallo di tempo Δt. Anche nel secondo tratto il gemello O' vede che l'orologio di O scorre più lentamente, ma l'effetto totale al momento dell'incontro è che O risulta più vecchio.

Il tempo trascorso per l'orologio di O è $2t_d$. Le due linee di simultaneità che si incrociano nel punto di inversione sono

$$t = t_d \pm \frac{v}{c^2}(x - d)$$

L'intervallo di tempo tra queste due linee per $x = 0$ è $\Delta t = 2vd/c^2 = 2t_d\beta^2$. Ma per il gemello O' risulta $\Delta t' = 0$. Il tempo trascorso per l'orologio di O' è secondo la

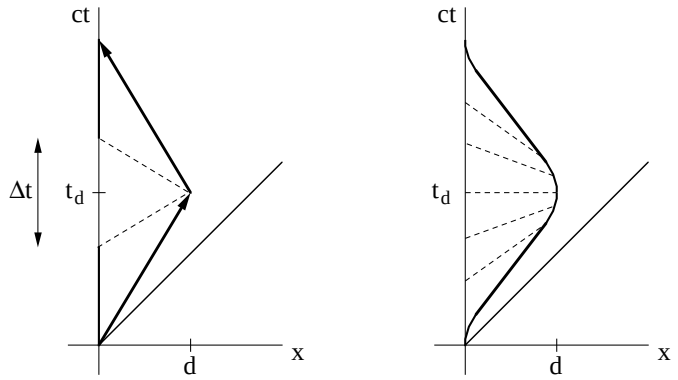


Figure 4.8: Linee orarie del viaggio andata-ritorno di O' visto da O.

(4.1) $2t'_d = 2t_d/\gamma$ e al momento dell'incontro O' è più giovane. Ma il tempo trascorso *senza contare* Δt è $2t_d - \Delta t = 2t_d(1-\beta^2) = 2t_d/\gamma^2$, $2t'_d = \gamma(2t_d - \Delta t)$ e quindi O' si immagina che al momento dell'incontro O sia più giovane mentre invece è più vecchio.

Quindi l'effetto gemelli è dovuto alla asimmetria tra i due riferimenti, cioè alla accelerazione del riferimento O' che, in questo caso, è trattata come una discontinuità. Alle stesse conclusioni si arriva se il riferimento O' è accelerato con continuità come mostrato in Fig.4.8 a destra.

4.5 La precessione di Thomas

Il moto di precessione di un vettore in un riferimento rotante è un effetto relativistico: fu calcolato da Llewellyn Thomas nel 1926 e chiarì l'origine del fattore $\times 2$ introdotto *ad hoc* da Goudsmit e Uhlenbeck nel fattore giromagnetico relativo allo spin dell'elettrone. La precessione di Thomas è originata dall'osservazione che due successive trasformazioni di Lorentz in direzioni diverse equivalgono ad una trasformazione più una rotazione attorno all'asse normale al piano delle due.

La trasformazione di Lorentz di un generico 4-vettore A rispetto a due riferimenti inerziali in moto relativo con velocità $\vec{\beta}$ è

$$\begin{aligned} A'_0 &= \gamma A_0 - \gamma\vec{\beta}\cdot\vec{A} \\ \vec{A}' &= -\gamma\vec{\beta}A_0 + \vec{A}_\perp + \gamma\vec{A}_\parallel = -\gamma\vec{\beta}A_0 + \vec{A} + (\gamma-1)(\hat{\beta}\cdot\vec{A})\hat{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'_0 &= \gamma A_0 - \gamma \textstyle\sum_k \beta_k A_k \\ A'_j &= -\gamma\beta_j A_0 + \textstyle\sum_k \left(\delta_{jk} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_j\beta_k\right) A_k \end{aligned}$$

$$L(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_x^2 & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_x\beta_y & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_x\beta_z \\ -\gamma\beta_y & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_y\beta_x & 1+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_y^2 & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_y\beta_z \\ -\gamma\beta_z & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_z\beta_x & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_z\beta_y & 1+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_z^2 \end{pmatrix}$$

Per una rotazione attorno all'asse z si ha

$$L(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo una trasformazione con velocità $\vec{\beta}$ lungo l'asse x seguita da una trasformazione con velocità $\delta\vec{\beta}$ nel piano x-y. Le trasformazioni del 4-vettore spazio-tempo sono:

$$X_1 = L(\vec{\beta})X_0 \qquad\qquad X_2 = L(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta})X_0$$

per cui si passa da X_1 a X_2 con la trasformazione

$$X_2 = L(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta})L(-\vec{\beta})X_1$$

Sviluppando al primo ordine in $\delta\vec{\beta}$ si ha

$$\delta\gamma = \gamma^3\vec{\beta}\cdot\delta\vec{\beta} \qquad \delta\gamma\vec{\beta} = \gamma\delta\vec{\beta} + \vec{\beta}\delta\gamma = \gamma\delta\vec{\beta} + \gamma^3(\vec{\beta}\cdot\delta\vec{\beta})\vec{\beta} = \gamma(1+\gamma^2\beta^2)\delta\vec{\beta} = \gamma^3\delta\vec{\beta}$$

$$L(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma + \gamma^2\delta\beta_x & -(\gamma\beta + \gamma^3\delta\beta_x) & -\gamma\beta_y & 0 \\ -(\gamma\beta + \gamma^3\delta\beta_y) & \gamma + \gamma^2\delta\beta_x & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_y & 0 \\ -\gamma\beta_y & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L(-\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & 0 & 0 \\ \gamma\beta_x & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta})L(-\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma^2\delta\beta_x & -\gamma\delta\beta_y & 0 \\ -\gamma^2\delta\beta_x & 1 & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_y & 0 \\ -\gamma\delta\beta_y & -\frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa è la combinazione di due trasformazioni di Lorentz tra riferimenti inerziali con velocità $\delta\beta_x$ e $\delta\beta_y$, ma il sistema di riferimento risulta ruotato attorno all'asse z di un angolo $\delta\phi = \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\delta\beta$. La velocità angolare della precessione di Thomas è

$$\vec{\omega}_T = \lim_{\delta t\to 0} \frac{\gamma-1}{\beta^2}\frac{\vec{\beta}\wedge\delta\vec{\beta}}{\delta t} = \frac{\gamma-1}{\beta^2}\ \vec{\beta}\wedge\frac{d\vec{\beta}}{dt}$$

Per $\beta \ll 1$, $\gamma = 1 + \beta^2/2 + \ldots$

$$\vec{\omega}_T = \frac{1}{2}\ \vec{\beta}\wedge\frac{d\vec{\beta}}{dt} = \frac{\vec{v}\wedge\vec{a}}{2c^2}$$

4.6 Cinematica relativistica

Le variabili cinematiche di una particella di massa m, velocità $\vec{v} = \vec{\beta}c$ e fattore di Lorentz $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, sono

- impulso: $\vec{p} = \vec{\beta}\gamma mc$
- energia totale: $E = \gamma mc^2$
- energia cinetica: $K = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$
- 4-impulso: $P = (\vec{p}, E/c)$

Il prodotto scalare di 4-vettori, $A \cdot B = A_4 B_4 - \vec{A} \cdot \vec{B}$, è invariante per trasformazioni di Lorentz, per cui risulta $P^2 = E^2/c^2 - p^2 = (mc)^2$. Le variabili mc^2, pc, E, hanno tutte le stesse dimensioni e quindi nelle relazioni si può omettere la velocità della luce c e usare come unità di misura MeV/c^2, MeV/c e MeV.
Per una particella: $P^2 = E^2 - p^2 = m^2$;
per due particelle: $(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1^2 + 2P_1 \cdot P_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$.

4.6.1 Trasformazioni delle variabili

Il riferimento *naturale* di un sistema di due o più particelle è quello del *centro di massa* in cui $\vec{p} = \sum_k \vec{p}_k = 0$. Spesso però il riferimento dell'osservatore, detto riferimento del *laboratorio*, è quello in cui una delle particelle è inizialmente in quiete. Se nel riferimento del laboratorio la particella m è in moto con impulso $\vec{p}$ e la particella M è in quiete (Fig.4.9)

lab	$P_1 = (\vec{p}, E)$	$P_2 = (0, M)$	$P = (\vec{p}, E + M)$
cm	$P_1^* = (+\vec{p}^*, E_1^*)$	$P_2^* = (-\vec{p}^*, E_2^*)$	$P^* = (0, E^*)$

$E^* = E_1^* + E_2^*$ è la massa totale del sistema. Il quadrato dell'energia nel centro di

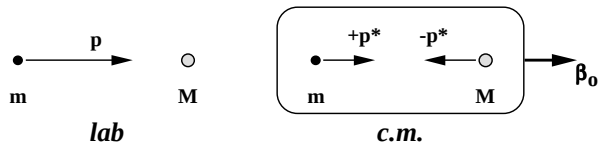


Figure 4.9: Riferimenti del laboratorio e del centro di massa

massa è

$$P_{cm}^2 = E^{*2} = P_{lab}^2 = m^2 + M^2 + 2EM$$

per cui la velocità del centro di massa nel laboratorio β_o è

$$\beta_o = \frac{p}{E+M} \qquad \gamma_o = \frac{E+M}{E^*} \qquad \beta_o\gamma_o = \frac{p}{E^*}$$

con $E^* = (m^2 + M^2 + 2EM)^{1/2}$. La trasformazione di Lorentz dal riferimento del laboratorio a quello del centro di massa

$$\begin{pmatrix} p_L^* \\ p_T^* \\ E^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_o & 0 & -\beta_o\gamma_o \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta_o\gamma_o & 0 & \gamma_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_L \\ p_T \\ E \end{pmatrix}$$

(in questo caso $p = p_L$, $p_T = 0$) definisce i valori dell'impulso e delle energie in quest'ultimo

$$p_1^* = \gamma_o p - \beta_o \gamma_o E = \frac{(E+M)p}{E^*} - \frac{pE}{E^*} = \frac{Mp}{E^*} \qquad p_2^* = -\beta_o \gamma_o M = -\frac{Mp}{E^*}$$

$$E_1^* = -\beta_o \gamma_o p + \gamma_o E = -\frac{p^2}{E^*} + \frac{(E+M)E}{E^*} = \frac{ME + m^2}{E^*} \qquad E_2^* = \gamma_o M = \frac{ME + M^2}{E^*}$$

4.6.2 Energia di soglia di una reazione

Nell'urto tra una particella di massa m e energia E e una particella di massa M in quiete nel laboratorio si possono produrre due o più particelle di massa $m_1, m_2, m_3, \ldots$ se l'energia E è maggiore della soglia di reazione definita dalla relazione

$$P_{lab}^2 \geq \left(P_{cm}^2\right)_{min} \qquad m^2 + M^2 + 2EM \geq (\Sigma_k m_k)^2$$

perché all'energia di soglia le particelle nello stato finale hanno impulso nullo nel riferimento del centro di massa. L'energia cinetica di soglia della particella m è

$$m^2 + M^2 + 2(K_{min} + m)M = (\Sigma_k m_k)^2 \qquad K_{min} = \left[(\Sigma_k m_k)^2 - (m+M)^2\right]/2M$$

Esempio

L'antiprotone è stato scoperto in urti protone-nucleone producendo la reazione $pN \to pNp\bar{p}$. Se il nucleone è libero, cioè usando un bersaglio di idrogeno, $m = M = 0.94\ GeV$

$$K_{min} = \left[(4m)^2 - (2m)^2\right]/2m = 6m = 5.6\ GeV$$

Se il nucleone è legato in un nucleo, allora è soggetto al moto di Fermi con impulso $p \leq p_F \simeq 0.24\ GeV$. Questo è diretto in modo casuale rispetto alla direzione di collisione. Il valore minimo [massimo] dell'energia di soglia si ha quando $\vec{p}_F$ è antiparallelo [parallelo] a $\vec{p}$. L'energia del nucleone è $E_F = (p_F^2 + m^2)^{1/2}$. L'energia di soglia è definita dalla relazione

$$P_{lab}^2 = 2m^2 + 2EE_F - 2\vec{p}\cdot\vec{p}_F = 2\left(m^2 + EE_F \pm pp_F\right) \geq 16m^2$$

approssimando $E_F = m + p_F^2/2m + \ldots$, $p \simeq E$,

$$EE_F \pm pp_F = E(m \pm p_F + p_F^2/2m) \geq 7m^2 \qquad E \geq \frac{7M}{1 \pm p_F/m + p_F^2/2m^2}$$

l'energia cinetica minima è $K_{min} = 4.2\ GeV$, $K_{min} = 7.5\ GeV$, nei due casi.

Esempio

Il valor medio dell'energia della radiazione del fondo cosmico di 2.7 K è $\langle E_\gamma \rangle = kT = 8.62\ 10^{-5} \times 2.7\ eV = 2.3\ 10^{-4}\ eV$. Nell'urto di protoni di raggi cosmici con la radiazione di fondo si possono produrre mesoni π^0 di massa $m_\pi = 0.135\ GeV$ con la reazione di fotoproduzione $\gamma p \to \pi^0 p$.

$$P_\gamma = (-\vec{p}_\gamma, p_\gamma) \qquad P = (\vec{p}, E) \qquad m_p^2 + 2p_\gamma E + 2p_\gamma p \geq (m_p + m_\pi)^2$$

$$E + p \geq \frac{(m_p + m_\pi)^2 - m_p^2}{2p_\gamma} = \frac{0.27\ GeV^2}{4.6\ 10^{-13}\ GeV} = 5.9\ 10^{11}\ GeV$$

L'energia di soglia, $E = 3\ 10^{20}\ eV$, è vicina alla massima energia oggi raggiunta nell'osservazione dei raggi cosmici (Fig.3.2 del capitolo ???).

4.6.3 Urto elastico

Nell'urto elastico tra una particella di massa m e impulso p e una particella di massa M in quiete nel riferimento del laboratorio si ha una relazione tra l'energia e la direzione delle particelle nello stato finale

$$P_1 = (\vec{p}, E) \qquad P_2 = (0, M) \qquad P_1' = (\vec{p'}, E') \qquad P_2' = (\vec{p''}, E'')$$

La conservazione dell'energia e impulso è riassunta nella relazione $P_1 + P_2 = P_1' + P_2'$

$$(P_2')^2 = M^2 = (P_1 + P_2 - P_1')^2 = m^2 + M^2 + m^2 + 2EM - 2EE' + 2pp' \cos\theta - 2E'M$$

dove θ è l'angolo di diffusione della particella m nel riferimento del laboratorio

$$EE' - pp' \cos\theta + E'M = EM + m^2$$

Se $E \gg m$, $E' \gg m$, cioè $p \simeq E$, $p' \simeq E'$,

$$E'[E(1 - \cos\theta) + M] = EM \qquad\qquad E' = \frac{E}{1 + (E/M)(1 - \cos\theta)}$$

Questo si applica sicuramente alla diffusione di un fotone ($m = 0$) di energia $E = h\nu$ e impulso $p = h\nu/c$

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + (h\nu/Mc^2)(1 - \cos\theta)} \qquad\qquad \lambda' = \lambda + \frac{h}{Mc}(1 - \cos\theta)$$

Quest'ultima è la relazione dell'effetto Compton, $\gamma e \to \gamma e$, e $\lambda_e = h/m_e c = 2.4\ 10^{-10}\ cm$ è la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone.

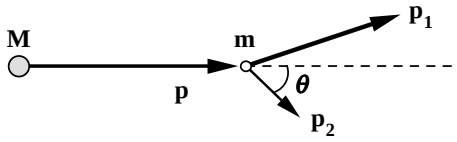


Figure 4.10: Collisione tra una particella di massa M e impulso $\vec{p}$ e una particella di massa m in quiete

4.6.4 Energia trasferita in una collisione

Consideriamo la collisione tra una particella di massa M e impulso $\vec{p}$ ($p = \beta\gamma M$) e una particella di massa m in quiete. Se $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ sono gli impulsi dopo la collisione, si ha: $E + m = E_1 + E_2$; $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. La particella di massa m è emessa ad angolo polare θ con energia E_2 (Fig.4.10)

$$E_1 = E + m - E_2 = [M^2 + p_1^2]^{1/2} = [M^2 + (\vec{p} - \vec{p}_2)^2]^{1/2}$$

$$E^2 + m^2 + E_2^2 + 2mE - 2EE_2 - 2mE_2 = M^2 + p^2 + p_2^2 - 2pp_2\cos\theta$$

sostituendo $E^2 = M^2 + p^2$ e $E_2^2 = m^2 + p_2^2$;

$$(E+m)^2E_2^2 - 2m(E+m)^2E_2 + m^2(E+m)^2 = p^2E_2^2\cos^2\theta - m^2p^2\cos^2\theta$$

$$[(E+m)^2 - p^2\cos^2\theta]E_2^2 - 2m(E+m)^2E_2 + m^2[(E+m)^2 + p^2\cos^2\theta] = 0$$

la soluzione dell'equazione è

$$E_2 = m\,\frac{(E+m)^2 + p^2\cos^2\theta}{(E+m)^2 - p^2\cos^2\theta}$$

L'energia trasferita è massima per $\cos\theta = 1$

$$E_2^{max} = m\,\frac{(E+m)^2 + p^2}{(E+m)^2 - p^2} = m + \frac{2mp^2}{m^2 + 2mE + M^2}$$

dove $s = m^2 + 2mE + M^2$ è il quadrato dell'energia nel centro di massa. L'energia cinetica massima trasferita è

$$K_2^{max} = \frac{2mp^2}{m^2 + 2mE + M^2}$$

Se $M \gg m$, come nel caso di collisioni di particelle con gli elettroni atomici, si ha

- per $E \ll M^2/2m$

$$K_2^{max} = \frac{2mp^2}{2mE + M^2} \simeq \frac{2mp^2}{M^2} = 2m\beta^2\gamma^2$$

- per $E \gg M^2/2m$, quasi tutta l'energia E viene trasferita alla particella di massa m

$$K_2^{max} \simeq \frac{2mp^2}{2mE} = \beta^2 E$$

4.6.5 Decadimento

L'esempio più semplice è il decadimento in due particelle $M \to m_1 m_2$. Nel riferimento della particella M

$$P = (0, M) \qquad P_1 = (+\vec{p}^*, E_1^*) \qquad P_1 = (-\vec{p}^*, E_2^*)$$

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^* E_2^* + 2p^{*2}$$

$$M^2 - m_1^2 - m_2^2 - 2p^{*2} = 2(m_1^2 + p^{*2})^{1/2}(m_2^2 + p^{*2})^{1/2}$$

$$(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4(M^2 - m_1^2 - m_2^2)p^{*2} + 4p^{*4} = 4m_1^2 m_2^2 + 4(m_1^2 + m_2^2)p^{*2} + 4p^{*4}$$

$$(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 = 4M^2 p^{*2}$$

Nel centro di massa le due particelle hanno impulso

$$p^* = \frac{[(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2]^{1/2}}{2M}$$

e energia

$$E_1^* = (m_1^2 + p^{*2})^{1/2} = \frac{M + m_1^2 - m_2^2}{2M} \qquad E_2^* = (m_2^2 + p^{*2})^{1/2} = \frac{M - m_1^2 + m_2^2}{2M}$$

Se nel laboratorio la particella M ha impulso $\vec{p}$, gli impulsi delle due particelle sono definiti dalla trasformazione di Lorentz con $\beta = p/E$, $\beta\gamma = p/M$ (Fig.4.11)

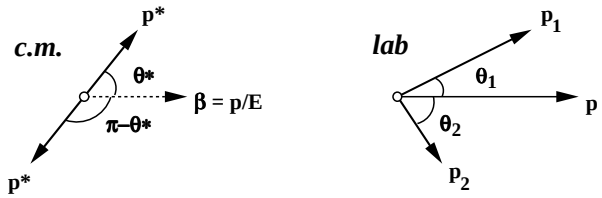


Figure 4.11: Decadimento $M \to m_1 m_2$ nel riferimento del centro di massa e del laboratorio

$$\begin{aligned} p_1 \cos\theta_1 &= \gamma p^* \cos\theta^* + \beta\gamma E_1^* & \qquad p_2 \cos\theta_2 &= -\gamma p^* \cos\theta^* + \beta\gamma E_2^* \\ p_1 \sin\theta_1 &= p^* \sin\theta^* & \qquad p_2 \sin\theta_2 &= p^* \sin\theta^* \\ E_1 &= \beta\gamma p^* \cos\theta^* + \gamma E_1^* & \qquad E_2 &= -\beta\gamma p^* \cos\theta^* + \gamma E_2^* \end{aligned}$$

L'angolo di emissione rispetto alla linea di volo della particella M è

$$\tan\theta_k = \frac{p^* \sin\theta^*}{\pm\gamma p^* \cos\theta^* + \beta\gamma E_k^*} = \frac{\sin\theta^*}{\gamma(\pm\cos\theta^* + \beta/\beta_k^*)}$$

con $\beta_1^* = p^*/E_1^*$, $\beta_2^* = p^*/E_2^*$. Quindi, se $\beta_k^* < \beta$ si ha $\theta_k > 0$ e la particella k è emessa nell'emisfero in avanti per qualunque valore di θ^*. Il valore massimo dell'angolo θ si ha quando $d\tan\theta/d\theta^* = 0$

$$\frac{d\tan\theta}{d\theta^*} = \frac{1 + \cos\theta^* \beta/\beta^*}{\gamma(\cos\theta^* + \beta/\beta_k^*)^2} = 0 \qquad \cos\theta^* = -\frac{\beta^*}{\beta}$$

$$\tan\theta_{max} = \frac{[1-(\beta^*/\beta)^2]^{1/2}}{\gamma(\beta/\beta^* - \beta^*/\beta)} = \frac{1}{\gamma[(\beta/\beta^*)^2-1]^{1/2}}$$

L'angolo $\theta = \theta_1 + \theta_2$ tra le due particelle si ottiene dalla relazione

$$P^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2\cos\theta = M^2$$

$$\cos\theta = \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - M^2}{2p_1p_2}$$

Nel limite $E_k \gg m_k$, cioè $p_k \simeq E_k$, si ha

$$2E_1E_2(1-\cos\theta) = 4E_1E_2\sin^2\theta/2 = M^2 - m_1^2 - m_2^2 \qquad \sin\theta/2 = \frac{(M^2-m_1^2-m_2^2)^{1/2}}{2(E_1E_2)^{1/2}}$$

L'angolo minimo di apertura si ha quando $E_1 = E_2$.

Massa invariante

La massa di una particella che decade $M \to m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ si determina misurando l'impulso $\vec{p}_k$ e la massa m_k di tutte le particelle prodotte (o facendo ipotesi sul valore delle masse)

$$P^2 = M^2 = (\Sigma_k P_k)^2 = (\Sigma_k E_k)^2 - (\Sigma_k \vec{p}_k)^2$$

Nel caso di due particelle

$$M^2 = (E_1+E_2)^2 - (\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2\cos\theta$$

Se $E_k \gg m_k$ la relazione si semplifica

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1p_2(1-\cos\theta) \qquad M^2 - m_1^2 - m_2^2 = 4p_1p_2\sin^2\theta/2$$

Differenziando questa relazione si ha

$$dM^2 = 2MdM = 4p_1p_2\sin^2\theta/2\left(\frac{dp_1}{p_1} + \frac{dp_1}{p_1} + \frac{d\theta}{\tan\theta}\right)$$

Se δp e $\delta\theta$ sono gli errori con cui si misurano gli impulsi e l'angolo, e gli errori non sono correlati, la risoluzione nella misura della massa è

$$\frac{\delta M}{M} = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2M^2}\left[\left(\frac{\delta p_1}{p_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta p_2}{p_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta\theta}{\tan\theta}\right)^2\right]^{1/2}$$

Vita media

Una particella di massa m e vita media τ decade con funzione di distribuzione

$$\frac{dn}{dt} = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}$$

Se nel riferimento del laboratorio ha velocità $\vec{\beta}c$, la lunghezza di decadimento è $\lambda = \beta c\gamma\tau = (p/mc)c\tau$ e la funzione di distribuzione è

$$\frac{dn}{dx} = \frac{e^{-x/\lambda}}{\lambda} = \frac{mc}{p}\,\frac{e^{-(mc/p)\ x/c\tau}}{c\tau}$$

4.7 Richiami di elettromagnetismo

In presenza di densità di carica $\rho(\vec{r},t)$ e di densità di corrente $\vec{j}(\vec{r},t)$, le equazioni di Maxwell che descrivono i campi sono

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{D}=\epsilon_o\vec{E}+\vec{P}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{B}=\mu_o\vec{H}+\vec{M}$$

dove $\vec{P}$ e $\vec{M}$ sono i momenti di dipolo elettrico e magnetico per unità di volume. La conservazione della carica elettrica è espressa dall'equazione di continuità

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

La forza che agisce su una carica q in moto con velocità $\vec{v}$ è $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$ e il lavoro fatto dal campo nell'unità di tempo, la potenza dissipata in effetto Joule, è $W=q\vec{v}\cdot\vec{E}$. Per una densità di carica ρ e di corrente $\vec{j}=\rho\vec{v}$

$$W=\int\vec{j}\cdot\vec{E}\;d\vec{r}=\int\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E}\;d\vec{r}$$

e, tenendo conto della relazione $\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{H})=-\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{H})+\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})$, si ha

$$W=-\int\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)d\vec{r}-\int\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{H})\;d\vec{r}$$

La relazione precedente rappresenta la conservazione dell'energia: nel volume di integrazione il lavoro fatto dal campo nell'unità di tempo è pari alla somma della variazione dell'energia del campo e del flusso di energia attraverso la superficie, con le definizioni

$$\textit{densità di energia} \qquad u=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})$$

$$\textit{flusso di energia} \qquad \vec{S}=\vec{E}\wedge\vec{H}$$

4.7.1 Energia irraggiata

Nel vuoto le equazioni di Maxwell sono

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_o} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_o\vec{j}+\epsilon_o\mu_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Una carica q sottoposta ad un'accelerazione $\vec{a}$ produce un campo elettromagnetico di

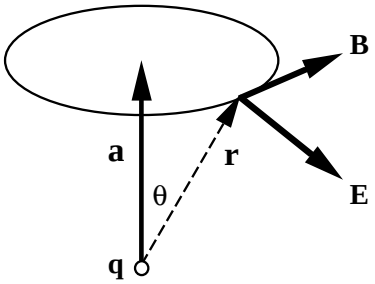


Figure 4.12: Campo di radiazione di una carica accelerata

radiazione. Nelle ipotesi $v \ll c$, $r \gg \lambda$ (lunghezza d'onda della radiazione emessa), il campo di radiazione a distanza r è (Fig.4.12)

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\frac{\hat{r} \wedge (\hat{r} \wedge \vec{a})}{c^2 r} \qquad \vec{B} = \frac{1}{c}\hat{r} \wedge \vec{E} \qquad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{qa}{c^2 r}\sin\theta$$

dove θ è l'angolo tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{r}$. I campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali tra loro e al vettore $\vec{r}$. La densità di energia irraggiata a distanza r è

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_o \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_o}\vec{B}^2\right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o}\frac{\vec{a}^2}{4\pi c^4 r^2}\sin^2\theta \qquad [eV\ m^{-3}]$$

il flusso di energia irraggiata è

$$S = \frac{1}{\mu_o}|\vec{E} \wedge \vec{B}| = c\ u = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o}\frac{\vec{a}^2}{4\pi c^3 r^2}\sin^2\theta \qquad [eV\ m^{-2}\ s^{-1}]$$

la potenza irraggiata è

$$W = \Phi(\vec{S}) = \int \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o}\frac{\vec{a}^2}{4\pi c^3 r^2}\ r^2 \sin^2\theta\ d\cos\theta\ d\phi \qquad [eV\ s^{-1}]$$

formula di Larmor $$W = \frac{2}{3}\ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o}\ \frac{\vec{a}^2}{c^3}$$

Se la carica q oscilla a frequenza ω, la potenza emessa dal dipolo elettrico $\vec{d} = q\vec{x}_o e^{i\omega t}$ è proporzionale al quadrato della derivata seconda del momento di dipolo elettrico, $q\vec{a} = d^2\vec{d}/dt^2 = -\omega^2\vec{d}$, cioè proporzionale alla quarta potenza della frequenza,

$$W = \frac{2}{3}\frac{d^2}{4\pi\epsilon_o}\frac{\omega^4}{c^3} = \frac{4}{3}\frac{\langle d^2\rangle}{4\pi\epsilon_o}\frac{\omega^4}{c^3}$$

dove $\langle d^2\rangle$ è il valore quadratico medio del momento di dipolo elettrico. Analogamente, per un dipolo magnetico $\vec{\mu}$ oscillante si ottiene

$$W = \frac{2}{3}\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\mu^2\omega^4}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{\mu^2\omega^4}{c^5} = \frac{4}{3}\frac{\langle\mu^2\rangle}{4\pi\epsilon_o}\frac{\omega^4}{c^5}$$

dove $\langle\mu^2\rangle$ è il valore quadratico medio del momento di dipolo magnetico.

Estensione relativistica della formula di Larmor

La formula di Larmor che esprime la potenza emessa come radiazione elettromagnetica di una carica q soggetta ad accelerazione $\vec{a}$ è valida per velocità $v \ll c$. Per ottenere una relazione valida per ogni valore di v occorre sostituire al valore $\vec{a}^2$ la corrispondente espressione relativistica (appendice 4.2)

$$-A^2 = \gamma^4 c^2 \left[\gamma^2 \left(\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\vec{\beta}}{dt} \right)^2 \right]$$

La potenza irraggiata da una carica accelerata è quindi

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o c^3} \gamma^4 c^2 \left[\gamma^2 \left(\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\vec{\beta}}{dt} \right)^2 \right]$$

Poiché la carica è invariante, anche la potenza irraggiata è invariante per trasformazioni di Lorentz.

4.7.2 Il potenziale vettore

Il campo induzione magnetica $\vec{B}$ ha divergenza nulla e si può esprimere come il rotore di un generico vettore $\vec{A}$ poiché $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \equiv 0 \; \forall \; \vec{A}$. Definiamo il *potenziale vettore* $\vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

legato al campo elettrico dalla relazione

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = -\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Il vettore $\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t$ ha rotore nullo e, poiché $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} V) \equiv 0 \; \forall \; V$, si può esprimere come il gradiente di una funzione scalare $V(\vec{r}, t)$. Il campo elettrico è

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$$

dove $V(\vec{r}, t)$ è il *potenziale elettrico*. La divergenza del campo elettrico è

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \nabla^2 V = \rho/\epsilon_o$$

Il rotore del campo induzione magnetica è

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_o \vec{j} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$-\nabla^2\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\mu_o\vec{j}-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

Il potenziale vettore $\vec{A}$ è definito a meno del gradiente di una funzione scalare $\Phi(\vec{r},t)$. Infatti la trasformazione $\vec{A'}=\vec{A}+\vec{\nabla}\Phi$ lascia invariata la definizione del campo induzione magnetica poiché $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\Phi\equiv 0\ \forall\ \Phi$. E la definizione del campo elettrico

$$\vec{E'}=-\frac{\partial\vec{A'}}{\partial t}-\vec{\nabla}V'=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\vec{\nabla}V'$$

rimane invariata per una trasformazione $V'=V-\partial\Phi/\partial t$. Quindi i campi elettrico e magnetico sono invarianti per una

$$\textit{trasformazione di gauge}\qquad \vec{A'}=\vec{A}+\vec{\nabla}\Phi\qquad V'=V-\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

In particolare si può scegliere la funzione $\Phi(\vec{r},t)$ in modo che soddisfi la

$$\textit{condizione di Lorentz}\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

In questo caso le equazioni dei potenziali elettromagnetici diventano

$$-\nabla^2V+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2V}{\partial t^2}=\frac{\rho}{\epsilon_o}\qquad -\nabla^2\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\mu_o\vec{j}$$

che hanno soluzioni

$$V(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int\frac{\rho(\vec{r'},t-|\vec{r}-\vec{r'}|/c)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,d\vec{r'}\qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_o}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r'},t-|\vec{r}-\vec{r'}|/c)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,d\vec{r'}$$

La densità di carica $\rho=d^3q/dxdydz$ non è invariante. Se ρ_o è la densità di carica nel riferimento di quiete, la densità di carica in un riferimento in moto con velocità $\vec{v}$ è $\rho=\gamma\rho_o$ poiché la dimensione longitudinale risulta contratta. Nel riferimento in moto la densità di corrente è $\vec{j}=\rho\vec{v}=\gamma\rho_o\vec{v}$. Ricordando la definizione del quadrivettore velocità, definiamo la

$$\textit{quadri-densità di corrente}\qquad J=\rho_0U=(\vec{j},\rho c)$$

che si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz. L'equazione di continuità si rappresenta come il prodotto scalare di due quadrivettori

$$\nabla\cdot J=0$$

Introducendo il *quadri-potenziale elettromagnetico* $A\equiv(\vec{A},V/c)$ le equazioni del potenziale vettore e del potenziale scalare si scrivono in forma invariante ($\nabla^2=-\vec{\nabla}^2+\partial^2/\partial c^2t^2$)

$$\nabla^2\cdot A=\mu_oJ$$

4.8 Sviluppo in multipoli del campo elettromagnetico

Consideriamo un sistema atomico o nucleare costituito da cariche in moto in una regione di estensione R e rappresentato da una densità di carica $\rho(\vec{r},t)$ e di corrente $\vec{j}(\vec{r},t)$. Il campo elettromagnetico prodotto si può ottenere come sviluppo di Fourier delle componenti armoniche di frequenza ω. Se $J(\vec{r},t) = J(\vec{r})e^{-i\omega t}$ è la 4-densità di corrente, il potenziale elettromagnetico ha la forma $A(\vec{r},t) = A(\vec{r})e^{-i\omega t}$ con $A(\vec{r})$ soluzione dell'equazione di Helmoltz

$$\nabla^2 A(\vec{r}) + k^2 A(\vec{r}) = -\mu_o J(\vec{r}) \qquad k = \omega/c$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_R \frac{\vec{j}(\vec{r'})\ e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\ d\vec{r'} \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_R \frac{\rho(\vec{r'})\ e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\ d\vec{r'}$$

dove l'integrale va esteso al volume occupato dal sistema ($R \approx 10^{-8}\ cm$ per un atomo, $R \approx 10^{-13}\ cm$ per un nucleo). Cerchiamo la soluzione approssimata a distanza r molto maggiore della lunghezza d'onda della radiazione e della dimensione della sorgente ($r \gg \lambda \gg R$) detta *zona di radiazione*, cioè per energie $\hbar\omega \ll \hbar c/R$ ($\hbar\omega \ll 1\ keV$ per un atomo, $\hbar\omega \ll 100\ MeV$ per un nulcleo). In questa approssimazione

$$|\vec{r}-\vec{r'}| = (\vec{r}^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r'} + \vec{r'}^2)^{1/2} = r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{r} + \ldots \qquad \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{r^3} + \ldots$$

la soluzione per il potenziale vettore è

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r} + \frac{\hat{r}\cdot\vec{r'}}{r^2} + \ldots\right) e^{ik(r-\hat{r}\cdot\vec{r'}+\ldots)}\ \vec{j}(\vec{r'})\ d\vec{r'}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{e^{ikr}}{r}\ \sum_n\ \frac{(-ik)^n}{n!}\int(\hat{r}\cdot\vec{r'})^n\ \vec{j}(\vec{r'})\ d\vec{r'}$$

4.8.1 Potenziale di dipolo elettrico

Il primo termine dello sviluppo, $n = 0$, si ottiene calcolando l'integrale per parti

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{e^{ikr}}{r}\int\vec{j}(\vec{r'})\ d\vec{r'} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{e^{ikr}}{r}\int\vec{r'}\ [\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r'})]\ d\vec{r'}$$

Usando l'equazione di continuità per la componente a frequenza ω

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r'}) = -\frac{\partial\rho(\vec{r'})}{\partial t} = i\omega\rho(\vec{r'})$$

e introducendo il *momento di dipolo elettrico*, $\vec{d} = \int\rho(\vec{r'})\vec{r'}d\vec{r'}$, si ottiene il primo termine dello sviluppo

potenziale di dipolo elettrico $$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_o}{4\pi}\ i\omega\ \frac{e^{ikr}}{r}\int\rho(\vec{r'})\vec{r'}\ d\vec{r'} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\ i\omega\vec{d}\ \frac{e^{ikr}}{r}$$

Le derivate spaziali del potenziale vettore sono

$$\partial_x A_y = -\frac{\mu_o}{4\pi}\, i\omega\, (\frac{e^{ikr}}{r}\, ik\, \frac{x}{r} - e^{ikr}\frac{x}{r^3})\, d_y = -\frac{\mu_o}{4\pi}\, \omega k\, \frac{e^{ikr}}{r^2}\, (i - \frac{1}{kr})\, x d_y \qquad \partial_y A_x = \dots$$

e per $kr \gg 1$ troviamo i campi $\vec{B}$ e $\vec{E}$ del termine di dipolo elettrico

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r}) \approx ik\, \hat{r} \wedge \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\, \frac{\omega^2}{c}\, \frac{e^{ikr}}{r}\, \hat{r} \wedge \vec{d} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = c\, \vec{B}(\vec{r}) \wedge \hat{r}$$

Il flusso di energia è

$$S = \frac{1}{\mu_o}\, |\vec{E} \wedge \vec{B}| = \frac{\mu_o}{(4\pi)^2}\, \frac{\omega^4}{c}\, \frac{d^2}{r^2}\, \sin^2\theta = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\, \frac{\omega^4}{c^3}\, \frac{d^2}{r^2}\, \sin^2\theta$$

e la potenza emessa è

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\, \frac{\omega^4}{c^3}\, d^2\, \sin^2\theta \qquad W = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\, \frac{\omega^4}{c^3}\, d^2$$

Il secondo termine dello sviluppo del potenziale vettore, $n = 1$, è

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_o}{4\pi}\, ik\, \frac{e^{ikr}}{r} \int (\hat{r} \cdot \vec{r'})\, \vec{j}(\vec{r'})\, d\vec{r'}$$

Poiché $(\vec{r'} \wedge \vec{j}) \wedge \hat{r} = (\vec{r'} \cdot \vec{j})\hat{r} - (\vec{r'} \cdot \hat{r})\vec{j}$ possiamo scomporre l'integrando in due termini

$$(\vec{r'} \cdot \hat{r})\vec{j} = (\vec{r'} \wedge \vec{j}) \wedge \hat{r} - (\vec{r'} \cdot \vec{j})\hat{r}$$

4.8.2 Potenziale di dipolo magnetico

Nel primo termine compare il prodotto vettore $\vec{M}(\vec{r'}) = \vec{r'} \wedge \vec{j}(\vec{r'})$ che è la *magnetizzazione* prodotta dalla corrente. Introducendo il *momento di dipolo magnetico*, $\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int \vec{M}(\vec{r'})d\vec{r'}$, troviamo il

$$\textit{potenziale di dipolo magnetico} \qquad \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_o}{4\pi}\, ik\, \frac{e^{ikr}}{r}\, \hat{r} \wedge \vec{\mu}$$

Nel limite $kr \gg 1$ i campi $\vec{B}$ e $\vec{E}$ del termine di dipolo magnetico sono

$$\vec{B}(\vec{r}) = ik\, \hat{r} \wedge \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\, \frac{\omega^2}{c^2}\, \frac{e^{ikr}}{r}\, \hat{r} \wedge (\hat{r} \wedge \vec{\mu}) \qquad \vec{E}(\vec{r}) = c\, \vec{B}(\vec{r}) \wedge \hat{r}$$

Il flusso di energia è

$$S = \frac{1}{\mu_o}\, |\vec{E} \wedge \vec{B}| = \frac{\mu_o}{(4\pi)^2}\, \frac{\omega^4}{c^3}\, \frac{\mu^2}{r^2}\, \sin^2\theta = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\, \frac{\omega^4}{c^5}\, \frac{\mu^2}{r^2}\, sin^2\theta$$

e la potenza emessa è

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\, \frac{\omega^4}{c^5}\, \mu^2\, \sin^2\theta \qquad W = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\, \frac{\omega^4}{c^5}\, \mu^2$$

4.8.3 Potenziale di quadrupolo elettrico

Nel secondo termine compare il prodotto scalare $\vec{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r'})$ e calcolando l'integrale per parti si ottiene

$$\int \vec{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r'})\ d\vec{r'} = -\frac{1}{2}\int \vec{r'}^2\ [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r'})]\ d\vec{r'} = -\frac{i\omega}{2}\int (\hat{r} \cdot \vec{r'})\ r'\ \rho(\vec{r'})\ d\vec{r'}$$

per cui il potenziale vettore è

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{k\omega}{2}\ \frac{e^{ikr}}{r}\int (\hat{r} \cdot \vec{r'})\ \vec{r'}\ \rho(\vec{r'})\ d\vec{r'}$$

Nel limite $kr \gg 1$ i campi $\vec{B}$ e $\vec{E}$ sono

$$\vec{B}(\vec{r}) = ik\hat{r} \wedge \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{\omega^3}{2c^2}\ \frac{e^{ikr}}{r}\int (\hat{r} \wedge \vec{r'})(\hat{r} \cdot \vec{r'})\rho(\vec{r'})\ d\vec{r'} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = c\ \vec{B}(\vec{r}) \wedge \hat{r}$$

Nell'integrale compaiono le componenti del

$$\textit{momento di quadrupolo elettrico} \qquad Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\ d\vec{r}$$

Se consideriamo i vettori $\vec{Q}_i = \Sigma_j Q_{ij}\vec{x}_j/r$ e osserviamo che le componenti dell'integrale $\int(\hat{r} \wedge \vec{r'})(\hat{r} \cdot \vec{r'})\rho(\vec{r'})d\vec{r'}$ sono

$$\Big[\int\Big]_z = 3(y' - x')(x' + y' + z') = Q_y - Q_x \qquad \ldots$$

troviamo i campi $\vec{B}$ e $\vec{E}$ del termine di quadrupolo elettrico

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{\omega^3}{c^2}\ \frac{e^{ikr}}{r}\ \frac{\hat{r} \wedge \vec{Q}}{6} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{\omega^3}{c}\ \frac{e^{ikr}}{r}\ \frac{(\hat{r} \wedge \vec{Q}) \wedge \hat{r}}{6}$$

Il flusso di energia è

$$S = \frac{1}{\mu_o}\ |\vec{E} \wedge \vec{B}| = \frac{\mu_o}{(4\pi)^2}\ \frac{\omega^6}{c^3}\ \frac{\langle \Sigma_{ij}|Q_{ij}|^2\rangle}{36\ r^2}\ \sin^2\theta = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\ \frac{\omega^6}{c^5}\ \frac{\langle \Sigma_{ij}|Q_{ij}|^2\rangle}{36\ r^2}\ \sin^2\theta$$

dove $\langle \Sigma_{ij}|Q_{ij}|^2\rangle$ è il valore quadratico medio del momento di quadrupolo. La potenza emessa è

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\ \frac{\omega^6}{c^5}\ \frac{\langle \Sigma_{ij}|Q_{ij}|^2\rangle}{36\ r^2}\ \sin^2\theta \qquad W = \frac{1}{54}\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\ \frac{\omega^6}{c^5}\ \langle \Sigma_{ij}|Q_{ij}|^2\rangle$$

4.8.4 Sviluppo in autofunzioni del momento angolare

I sistemi atomici e nucleari sono autostati del momento angolare ed è conveniente esprimere il potenziale elettromagnetico come sviluppo in serie di armoniche sferiche. Oltre al momento angolare orbitale occorre tener conto dello spin delle particelle che

produce una *magnetizzazione intrinseca* $\vec{M}(\vec{r},t) = \vec{M}(\vec{r})e^{-i\omega t}$. Questa contribuisce alla densità di corrente con un termine a divergenza nulla, $\vec{j}_M(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}(\vec{r})$, e le equazioni del campo sono

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_o \qquad\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i\omega B \qquad\qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o(\vec{j} + \vec{\nabla} \wedge \vec{M}) - i\omega\epsilon_o\mu_o\vec{E}$$

che si possono rendere simmetriche considerando il campo a divergenza nulla $\vec{E}^* = \vec{E} + (i/\omega\epsilon_o)\vec{j}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^* = 0 \qquad\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}^* - i\omega B = (i/\omega\epsilon_o)\ \vec{\nabla} \wedge \vec{j} \qquad\qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} + i\omega\epsilon_o\mu_o\vec{E}^* = \mu_o\vec{\nabla} \wedge \vec{M}$$

Da queste relazioni, osservando che $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{U} = -\nabla^2\vec{U}$ per un vettore a divergenza nulla, si ottengono le equazioni del campo elettrico e di induzione magnetica

$$(\nabla^2+k^2)\vec{E}^* = -ikc\mu_o\ \vec{\nabla}\wedge(\vec{M}+\frac{1}{k^2}\ \vec{\nabla}\wedge\vec{j}) \qquad\qquad (\nabla^2+k^2)\vec{B} = -\mu_o\ \vec{\nabla}\wedge(\vec{j}+\vec{\nabla}\wedge\vec{M})$$

Per esprimere le soluzioni in autofunzioni del momento angolare $\vec{L} = -i\vec{r} \wedge \vec{\nabla}$, osserviamo che, per un vettore a divergenza nulla si ha $\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{U}) = \vec{r} \cdot \nabla^2\vec{U}$, e quindi che le equazioni dei prodotti scalari $\vec{r} \cdot \vec{E}^*$ e $\vec{r} \cdot \vec{B}$ sono

$$(\nabla^2 + k^2)\ \vec{r} \cdot \vec{E}^* = -ikc\mu_o\ \vec{r}\ \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{M} + \frac{1}{k^2}\ \vec{\nabla} \wedge \vec{j}) = -ikc\mu_o\ (\vec{r}\wedge\vec{\nabla})(\vec{M} + \frac{1}{k^2}\ \vec{\nabla} \wedge \vec{j})$$

$$(\nabla^2 + k^2)\ \vec{r} \cdot \vec{B} = -\mu_o\ \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{j} + \vec{\nabla} \wedge \vec{M}) = -\mu_o\ (\vec{r}\wedge\vec{\nabla})(\vec{j} + \vec{\nabla} \wedge \vec{M})$$

e, introducendo il momento angolare, si ha

$$(\nabla^2+k^2)\ \vec{r}\cdot\vec{E}^* = kc\mu_o\ \vec{L}\cdot(\vec{M}+\frac{1}{k^2}\ \vec{\nabla}\wedge\vec{j}) \qquad\qquad (\nabla^2+k^2)\ \vec{r}\cdot\vec{B} = -i\mu_o\ \vec{L}\cdot(\vec{j}+\vec{\nabla}\wedge\vec{M})$$

Queste equazioni hanno soluzioni

$$\vec{r} \cdot \vec{E}^* = -\frac{k}{4\pi\epsilon_o\ c}\int_R \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\ \vec{L}' \cdot (\vec{M} + \frac{1}{k^2}\ \vec{\nabla}' \wedge \vec{j})\ d\vec{r'}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{B} = \frac{i\mu_o}{4\pi}\int_R \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\ \vec{L}' \cdot (\vec{j} + \vec{\nabla}' \wedge \vec{M})\ d\vec{r'}$$

utilizzando lo sviluppo della funzione di Green in autofunzioni del momento angolare

$$G(\vec{r}-\vec{r'}) = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \sum_{lm}\ g_l(r,r')\ Y^*_{lm}(\theta',\phi')\ Y_{lm}(\theta,\phi)\ J(r',\theta',\phi')$$

si ottengono i valori dei campi

$$E(r,\theta,\phi) = \frac{e^{ikr}}{r}\sum_{lm}\ a^E_{lm}\ Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad\qquad B(r,\theta,\phi) = \frac{e^{ikr}}{r}\sum_{lm}\ a^B_{lm}\ Y_{lm}(\theta,\phi)$$

4.8.5 Momenti di multipolo del campo di radiazione

Nel limite $r \gg R$, $kr \gg 1$, i *coefficienti di multipolo elettrico* sono

$$a^E_{lm} = -\frac{i}{\epsilon_o}\ \frac{1}{(2l+1)!!}\left(\frac{l+1}{l}\right)^{1/2} k^{l+1}(Q_{lm} + Q'_{lm})$$

con i *momenti di multipolo elettrico*

$$Q_{lm} = \int_R r^l\ Y^*_{lm}(\theta,\phi)\ \rho(\vec{r})\ d\vec{r}$$

$$Q'_{lm} = -\frac{1}{l+1}\ \frac{k}{c}\int_R r^l\ Y^*_{lm}(\theta,\phi)\ \vec{\nabla}\cdot[\vec{r}\wedge\vec{M}(\vec{r})]\ d\vec{r}$$

I *coefficienti di multipolo magnetico* sono

$$a^M_{lm} = i\mu_o\ \frac{1}{(2l+1)!!}\left(\frac{l+1}{l}\right)^{1/2} k^{l+1}(M_{lm} + M'_{lm})$$

con i *momenti di multipolo magnetico*

$$M_{lm} = -\frac{l}{l+1}\ \frac{1}{c}\int_R r^l\ Y^*_{lm}(\theta,\phi)\ \vec{\nabla}\cdot[\vec{r}\wedge\vec{j}(\vec{r})]\ d\vec{r}$$

$$M'_{lm} = -\frac{1}{c}\int_R r^l\ Y^*_{lm}(\theta,\phi)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{M}(\vec{r})\ d\vec{r}$$

Per valutare il contributo dei momenti di multipolo, consideriamo un sistema di particelle di massa m_i, carica elettrica q_i e momento magnetico $\vec{\mu}_i$

$$\rho(\vec{r}) = \Sigma_i q_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \qquad \vec{j}(\vec{r}) = \Sigma_i q_i\vec{v}_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \qquad \vec{M}(\vec{r}) = \Sigma_i\vec{\mu}_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

e supponiamo che il moto delle particelle sia *centrale* e le coordinate esprimibili in termini delle autofunzioni del momento angolare. In questo caso i momenti di multipolo sono

$$Q_{lm} = \int r^l\ Y^*_{lm}\ \Sigma_i q_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\ d\vec{r} = Y^*_{lm}\ \Sigma_i r_i^l q_i$$

$$Q'_{lm} = -\frac{1}{l+1}\frac{\omega}{c^2}\int r^l\ Y^*_{lm}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{r}\wedge\Sigma_i\vec{\mu}_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\ d\vec{r} = -\frac{1}{l+1}\frac{\omega}{c^2}\ Y^*_{lm}\ \Sigma_i r_i^l\mu_i$$

$$M_{lm} = -\frac{1}{l+1}\frac{1}{c}\int r^l\ Y^*_{lm}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{r}\wedge\Sigma_i q_i\vec{v}_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\ d\vec{r} = -\frac{1}{l+1}\frac{1}{c}\ Y^*_{lm}\ \Sigma_i r_i^{l-1}\ \frac{q_i L_i}{m_i}$$

$$M'_{lm} = \frac{1}{c}\int r^l\ Y^*_{lm}\ \vec{\nabla}\cdot\Sigma_i\vec{\mu}_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\ d\vec{r} = \frac{1}{c}\ Y^*_{lm}\ \Sigma_i r_i^{l-1}\mu_i$$

- I multipoli elettrici sono generati dalla carica elettrica e dal momento magnetico associato allo spin $\mu = g(\hbar q/2m)$

  $$Q_{lm} + Q'_{lm} = r^l Y^*_{lm}\left(q - \frac{1}{l+1}\frac{\omega}{c^2}\ g\frac{\hbar q}{2m}\right) = qr^l Y^*_{lm}\left(1 - \frac{1}{l+1}\ \frac{g}{2}\ \frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)$$

  il secondo termine è trascurabile poiché nelle transizioni atomiche o nucleari l'energia emessa è $\hbar\omega \ll mc^2$.

- I multipoli magnetici sono generati dal momento magnetico prodotto dal moto orbitale, $\mu(l) = q\hbar l/2m$, e dal momento magnetico intrinseco e i due contributi sono confrontabili

$$M_{lm} + M'_{lm} = \frac{1}{c}\ r^{l-1} Y^*_{lm}\ \frac{\hbar q}{2m}\left(g - \frac{2l}{l+1}\right)$$

La potenza emessa dal sistema di cariche in moto nella zona di radiazione

$$W = \frac{c}{2}\int \left(\epsilon_o |\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2/\mu_o\right) r^2 d\Omega =$$

$$= \frac{c\epsilon_o}{2}\ \Sigma_{l'm'}\Sigma_{lm} a^{E*}_{l'm'} a^E_{lm} \int Y^*_{l'm'} Y_{lm} d\Omega + \frac{c}{2\mu_o}\ \Sigma_{l'm'}\Sigma_{lm} a^{B*}_{l'm'} a^B_{lm} \int Y^*_{l'm'} Y_{lm} d\Omega =$$

$$= \frac{c\epsilon_o}{2}\ \Sigma_{lm} |a^E_{lm}|^2 + \frac{c}{2\mu_o}\ \Sigma_{lm} |a^B_{lm}|^2$$

si ottiene come sovrapposizione dei contributi dei momenti di multipolo del campo di radiazione

$$W^E_{lm} = \frac{c}{2\epsilon_o}\ |a^E_{lm}|^2 = \frac{c}{2\epsilon_o}\ \frac{1}{[(2l+1)!!]^2}\left(\frac{l+1}{l}\right)\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2l+2} |Q_{lm} + Q'_{lm}|^2$$

$$W^B_{lm} = \frac{c\mu_o}{2}\ |a^B_{lm}|^2 = \frac{c\mu_o}{2}\ \frac{1}{[(2l+1)!!]^2}\left(\frac{l+1}{l}\right)\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2l+2} |M_{lm} + M'_{lm}|^2$$

- $(2l+1)!! = (2l+1)\ (2l-1)\ \ldots\ 1$

4.9 Equazione di Schrödinger in una dimensione

4.9.1 Particella libera

L'equazione di Schrödinger per una particella libera di massa m è

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\ \psi(x)$$

$E > 0$ è l'energia cinetica. In funzione dell'impulso $\hbar k = p = (2mE)^{1/2}$ l'equazione è

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\ \psi(x) = 0$$

e la soluzione è la sovrapposizione di due onde piane che si propagano nella direzione $+x$ e $-x$

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

La densità di corrente è

$$j = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\ \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\psi^*}{dx}\ \psi\right) = \frac{\hbar k}{m}\left(|A|^2 - |B|^2\right)$$

Se consideriamo un fascio di N/V particelle per unità di volume che si propaga nella direzione $+x$, le condizioni al contorno sono: $B = 0$, $j = Nv/V = v|A|^2$, cioè $A = (N/V)^{1/2}$. Per una particella

$$\psi(x) = V^{-1/2}\ e^{ikx}$$

4.9.2 Gradino di potenziale

L'equazione in una dimensione è

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right]\psi(x) = E\ \psi(x)$$

Se l'energia potenziale è una funzione a gradino

$$U(x) = 0 \quad per\ x < 0 \qquad\qquad U(x) = U_o > 0 \quad per\ x > 0$$

abbiamo due casi:
$\underline{E > U_o}$ - La soluzione è una sovrapposizione di onde piane nelle due regioni

$$x < 0 \qquad \psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \qquad \hbar k_1 = [2mE]^{1/2}$$

$$x > 0 \qquad \psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \qquad \hbar k_2 = [2m(E - U_o)]^{1/2}$$

$j_1^+ = (\hbar k_1/m)|A_1|^2$ è il flusso incidente, $j_1^- = (\hbar k_1/m)|B_1|^2$ è il flusso riflesso dal gradino di potenziale, $j_2^+ = (\hbar k_2/m)|A_2|^2$ è il flusso trasmesso nella regione $x > 0$ e, poiché non vi sono altri vincoli in questa regione, si deve avere $B_2 = 0$.

Imponendo la condizione di continuità della soluzione in corrispondenza del gradino, cioè che la soluzione e la derivata siano uguali per $x = 0$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \qquad\qquad A_1 + B_1 = A_2$$

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \qquad\qquad k_1(A_1 - B_1) = k_2 A_2$$

si ottengono i valori dei coefficienti B_1 e A_2

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\ A_1 \qquad\qquad A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}\ A_1$$

e possiamo definire il *coefficiente di riflessione* dal gradino e il *coefficiente di trasmissione* con $R + T = 1$

$$R = \frac{j_1^-}{j_1^+} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} \qquad\qquad T = \frac{j_2^+}{j_1^+} = \frac{k_2|A_2|^2}{k_1|A_1|^2} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$\underline{E < U_o}$ - In questo caso la soluzione nella regione $x > 0$ è la sovrapposizione di due funzioni esponenziali reali

$$x < 0 \qquad \psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \qquad \hbar k_1 = [2mE]^{1/2}$$

$$x > 0 \qquad \psi_2(x) = A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x} \qquad \hbar k_2 = [2m(U_o - E)]^{1/2}$$

Perché la soluzione sia finita per ogni valore di x deve essere $A_2 = 0$. La condizione di continuità

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \qquad A_1 + B_1 = B_2$$
$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \qquad ik_1(A_1 - B_1) = -k_2 B_2$$

implica

$$B_1 = \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2}\, A_1 \qquad B_2 = \frac{2k_1}{k_1 + ik_2}\, A_1$$

Da queste relazioni si ottiene $|B_1|^2 = |A_1|^2$, cioè il flusso riflesso è pari al flusso incidente e il flusso trasmesso è nullo. La particella ha una probabilità di *penetrare il gradino di potenziale* che decresce esponenzialmente: $|\psi_2(x)|^2 = |\psi_1(0)|^2 e^{-2k_2 x}$.

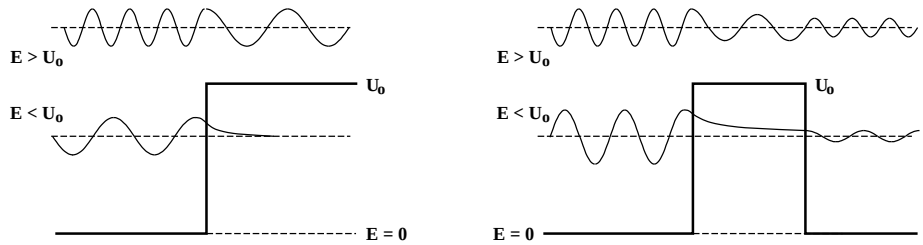


Figure 4.13: Soluzioni per il gradino e la barriera di potenziale

4.9.3 Barriera di potenziale

L'energia potenziale è la sovrapposizione di due funzioni a gradino

$$U(x) = 0 \quad per\ x < 0 \quad x > \ell \qquad U(x) = U_o > 0 \quad per\ 0 \le x \le \ell$$

$\underline{E > U_o}$ - La soluzione è una sovrapposizione di onde piane

$$x < 0 \qquad \psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$$
$$0 \le x \le \ell \qquad \psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}$$
$$x > \ell \qquad \psi_3(x) = A_3 e^{ik_1 x} + B_3 e^{-ik_1 x}$$

Anche in questo caso, poiché non si ha onda riflessa per $x > \ell$, $B_3 = 0$. La condizione di continuità per $x = 0$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \qquad A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$
$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \qquad k_1(A_1 - B_1) = k_2(A_2 - B_2)$$

implica

$$A_1 = \frac{k_1 + k_2}{2k_1}\, A_2 + \frac{k_1 - k_2}{2k_1}\, B_2 \qquad B_1 = \frac{k_1 - k_2}{2k_1}\, A_2 + \frac{k_1 + k_2}{2k_1}\, B_2$$

La condizione di continuità per $x = \ell$

$$\psi_2(\ell) = \psi_3(\ell) \qquad A_2 e^{ik_2\ell} + B_2 e^{-ik_2\ell} = A_3 e^{ik_1\ell}$$

$$\psi_2'(\ell) = \psi_3'(\ell) \qquad k_2(A_2 e^{ik_2\ell} - B_2 e^{-ik_2\ell}) = k_1 A_3 e^{ik_1\ell}$$

implica

$$A_2 = \frac{k_2 + k_1}{2k_2}\ e^{ik_1\ell}\ e^{-ik_2\ell}\ A_3 \qquad B_2 = \frac{k_2 - k_1}{2k_2}\ e^{ik_1\ell}\ e^{ik_2\ell}\ A_3$$

e si ottiene una relazione tra l'ampiezza dell'onda incidente e quella dell'onda trasmessa

$$A_1 = \left[(k_1 + k_2)^2 e^{-ik_2\ell} - (k_1 - k_2)^2 e^{ik_2\ell}\right] \frac{e^{ik_1\ell}}{4k_1k_2}\ A_3$$

$$|A_1|^2 = \left[1 + \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{4k_1^2k_2^2}\ \sin^2 k_2\ell\right]\ |A_3|^2$$

Il coefficiente di trasmissione attraverso la barriera è

$$T = \frac{j_3^+}{j_1^+} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{1}{1 + \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{4k_1^2k_2^2}\ \sin^2 k_2\ell}$$

$\underline{E < U_o}$ - In questo caso la soluzione per $0 \le x \le \ell$ è la sovrapposizione di due funzioni esponenziali reali, $\psi_2(x) = A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x}$, e la condizione di continuità della soluzione per $x = 0$ e $x = \ell$ implica

$$A_1 = \frac{k_1 - ik_2}{2k_1}\ A_2 + \frac{k_1 + ik_2}{2k_1}\ B_2 \qquad B_1 = \frac{k_1 + ik_2}{2k_1}\ A_2 + \frac{k_1 - ik_2}{2k_1}\ B_2$$

$$A_2 = \frac{k_2 + ik_1}{2k_2}\ e^{ik_1\ell}\ e^{-k_2\ell}\ A_3 \qquad B_2 = \frac{k_2 - ik_1}{2k_2}\ e^{ik_1\ell}\ e^{k_2\ell}\ A_3$$

da cui, seguendo l'esempio precedente, si ottiene il coefficiente di trasmissione

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{1}{1 + \frac{(k_1^2 + k_2^2)^2}{4k_1^2k_2^2}\ \sinh^2 k_2\ell}$$

Nel caso in cui $k_2\ell \gg 1$, $\sinh^2 k_2\ell \simeq e^{2k_2\ell}/4$ si ha

$$T = \frac{16k_1^2k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2}\ e^{-2k_2\ell}$$

4.9.4 Buca di potenziale infinita

Se la buca si estende nell'intervallo $a \le x \le a + \ell$ la particella è vincolata a oscillare e la soluzione $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ si annulla agli estremi. Dalle condizioni al contorno

$$\psi(a) = e^{ika}(A + B) = 0 \qquad \psi(a + \ell) = e^{ika}(Ae^{ik\ell} + Be^{-ik\ell}) = 0$$

si ottiene la *quantizzazione degli autovalori*

$$\sin k_n \ell = 0 \qquad k_n = \frac{n\pi}{\ell} \qquad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m\ell^2}\, n^2 \qquad n = 1,\ 2, \ldots$$

La condizione di normalizzazione delle autofunzioni, $\psi_n(x) = C \sin k_n x$, fissa il valore dell'ampiezza

$$\int_a^{a+\ell} \psi_n^*(x)\psi(x)_n \, dx = |C|^2 \int_a^{a+\ell} \sin^2 k_n x \, dx = \frac{|C|^2 \ell}{n\pi} \int_o^{n\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = 1$$

da cui si ottiene

$$\psi_n(x) = \left(\frac{2}{\ell}\right)^{1/2} \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

Ovviamente nessuno dei risultati ottenuti dipende dal valore di a.

4.9.5 Buca di potenziale finita

L'energia potenziale è $U(x) = -U_o$ per $-\ell \leq x \leq +\ell$ e nulla negli altri punti (abbiamo visto che la soluzione *non* dipende dalla posizione dell'intervallo in x). Per $E > 0$ la soluzione è simile a quella della barriera di potenziale. Consideriamo il caso di *stati legati*, $E < 0$. La soluzione è

$$\begin{aligned} x < -\ell \qquad & \psi_1(x) = A_1 e^{k_1 x} + B_1 e^{-k_1 x} \\ -\ell \leq x \leq \ell \qquad & \psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \\ x > \ell \qquad & \psi_3(x) = A_3 e^{k_1 x} + B_3 e^{-k_1 x} \end{aligned}$$

con $\hbar k_1 = [-2mE]^{1/2}$, $\hbar k_2 = [2m(E + U_o)]^{1/2}$. Perché la soluzione sia finita per ogni valore di x si ha $B_1 = A_3 = 0$. La condizione di continuità per $x = -\ell$

$$A_2 e^{-ik_2\ell} + B_2 e^{ik_2\ell} = A_1 e^{-k_1\ell} \qquad ik_2\ (A_2 e^{-ik_2\ell} - B_2 e^{ik_2\ell}) = k_1 A_1 e^{-k_1\ell}$$

e quella analoga per $x = \ell$ comportano $|A_2|^2 = |B_2|^2$, che corrisponde all'annullarsi della densità di corrente all'interno della buca, e, poiché non ci sono termini del tipo A^*B o AB^*, che la soluzione sia *pari*, se $A_2 = B_2$, oppure *dispari*, se $A_2 = -B_2$, rispetto all'inversione dell'asse x. Abbiamo quindi due casi

$$\begin{aligned} \textit{soluzioni pari} \qquad & k_2 \tan k_2\ell = k_1 \\ \textit{soluzioni dispari} \qquad & -k_2 \cot k_2\ell = k_1 \end{aligned}$$

Queste sono due equazioni trascendenti che si risolvono numericamente. Poiché si ha $(\hbar k_1)^2 + (\hbar k_2)^2 = 2mU_o$, le due equazioni si possono esprimere in funzione delle variabili $\alpha = k_2\ell$, $\beta = (2mU_o)^{1/2}\ell/\hbar$

$$\alpha \tan \alpha = (\beta^2 - \alpha^2)^{1/2} \qquad -\alpha \cot \alpha = (\beta^2 - \alpha^2)^{1/2}$$

Le soluzioni sono rappresentate in modo grafico in Fig. 4.14, dove si è scelto $\beta = 2\pi$, e sono date dai punti di intersezione delle curve: l'esempio mostra quattro stati legati. Il caso più interessante è quello delle soluzioni *dispari* che si annullano per $x = 0$, infatti nel caso di buca di potenziale in tre dimesioni la soluzione si deve annullare per $r \to 0$.

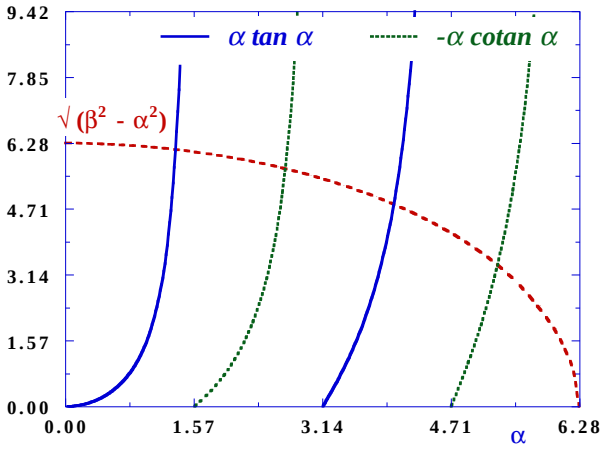


Figure 4.14: Soluzione per gli stati legati in una buca di potenziale

4.9.6 Oscillatore armonico

Per piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio, un generico potenziale può essere approssimato con quello di una forza elastica con costante di richiamo k

$$U(x) = U_o + \left(\frac{dU}{dx}\right)_o x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_o x^2 + \ldots \simeq costante + \frac{1}{2}kx^2$$

In un potenziale armonico una particella di massa m oscilla attorno alla posizione $x = 0$ con frequenza angolare $\omega = (k/m)^{1/2}$. La hamiltoniana dipende dal quadrato delle variabili coniugate x e p

$$H = \frac{1}{2m}\, p^2 + \frac{m\omega^2}{2}\, x^2 = \hbar\omega\ (X^2 + P^2)$$

e si può esprimere in modo simmetrico in termini dei due operatori hermitiani

$$X = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} x \qquad\qquad P = \left(\frac{1}{2m\hbar\omega}\right)^{1/2} p$$

o delle loro combinazioni lineari

$$a = X + iP \qquad\qquad a^+ = X - iP$$

che soddisfano le relazione di commutazione

$$[a, a^+] = -2i[X, P] = -\frac{i}{\hbar}\ [x, p] = 1$$

L'operatore hermitiano

$$N = a^+ a = X^2 + P^2 + i[X, P] = X^2 + P^2 + \frac{i}{2\hbar}\ [x, p] = X^2 + P^2 - \frac{1}{2}$$

commuta con la hamiltoniana e quindi gli autostati di N sono autostati di $H = \hbar\omega(N + 1/2)$

$$N\ |n\rangle = n\ |n\rangle \qquad\qquad H\ |n\rangle = E_n\ |n\rangle$$

Per trovare gli autostati della hamiltoniana studiamo l'azione degli operatori a e a^+ sugli stati $|n\rangle$. Osserviamo che $a|n\rangle$ e $a^+|n\rangle$ sono anch'essi autostati, infatti dalle relazioni di commutazione

$$[N, a] = -[a, a^+]\ a = -a \qquad\qquad [N, a^+] = a^+\ [a, a^+] = a^+$$

otteniamo

$$Na\ |n\rangle = (-a+aN)\ |n\rangle = (n-1)a\ |n\rangle \qquad Na^+\ |n\rangle = (a^+ + a^+N)\ |n\rangle = (n+1)a^+\ |n\rangle$$

Quindi: $a|n\rangle = \alpha|n-1\rangle$, $a^+|n\rangle = \beta|n+1\rangle$ e i valori di α e β si ottengono dalla normalizzazione degli autostati

$$\langle n|a^+a|n\rangle = \langle n|N|n\rangle = n = |\alpha|^2 \qquad\qquad \langle n|aa^+|n\rangle = \langle n|(N+1)|n\rangle = n + 1 = |\beta|^2$$

L'azione degli operatori a e a^+ è quella di far passare da un autostato ad un altro

$$a|n\rangle = n^{1/2}|n-1\rangle \qquad\qquad a^+|n\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1\rangle$$

e applicando più volte l'operatore a ad un autostato di N

$$a^k|n\rangle = [n(n-1)\dots(n-k+1)]^{1/2}\,|n-k\rangle$$

si dimostra che gli autovalori n sono i numeri interi non negativi, $n = 0,\ 1,\ 2, \dots$. Gli autovalori dell'energia sono

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$$

e quindi gli operatori a^+, a fanno aumentare o diminuire l'energia dell'oscillatore di un *quanto* $\hbar\omega$ e sono chiamati *operatori di creazione e distruzione.*

Per studiare il comportamento delle variabili x e p è opportuno esprimerle in funzione degli operatori a e a^+

$$X = \frac{a + a^+}{2} \qquad\qquad P = \frac{a - a^+}{2i}$$

X e P hanno in ogni stato dell'oscillatore valor medio nullo perché $\langle n|a|n\rangle = \langle n|a^+|n\rangle = 0$ e hanno varianza

$$\langle X^2\rangle_n = \langle P^2\rangle_n = \frac{\langle n|aa^+|n\rangle + \langle n|a^+a|n\rangle}{4} = \frac{2n+1}{4}$$

Quindi per le variabili x e p si ha

$$\langle x^2\rangle_n = \frac{\hbar}{m\omega}(n + 1/2) = \sigma^2(n + 1/2) \qquad \langle p^2\rangle_n = m\hbar\omega(n + 1/2) = \frac{\hbar^2}{\sigma^2}\ (n + 1/2)$$

dove $\sigma^2 = \hbar/m\omega$ e $\hbar^2/\sigma^2$ sono le *varianze delle distribuzioni di x e p per modo di vibrazione*. E si ottiene la relazione di indeterminzione per l'oscillatore

$$(\Delta x \Delta p)_n = \sqrt{\langle x^2 \rangle_n}\ \sqrt{\langle p^2 \rangle_n} = \hbar(n + 1/2)$$

e l'equipartizione dell'energia cinetica e potenziale per modo di vibrazione

$$\frac{1}{2m}\langle p^2 \rangle_n + \frac{m\omega^2}{2}\langle x^2 \rangle_n = \frac{\hbar\omega}{2}(n + 1/2) + \frac{\hbar\omega}{2}(n + 1/2)$$

Per trovare le autofunzioni nello spazio della coordinata x, osserviamo che per lo stato di energia più bassa, lo *stato vuoto*, $E_o = \hbar\omega/2$, si ha $a|0\rangle = 0$ e quindi l'autofunzione $\psi_o(x)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$(X + iP)\psi_o(x) = \left[\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} + \frac{i}{\hbar}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(-i\hbar\ \frac{d}{dx}\right)\right]\psi_o(x) = 0$$

$$\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\ \psi_o + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\ \frac{d\psi_o}{dx} = 0$$

la cui soluzione che soddisfa la condizione di normalizzazione $\int \psi_o^*(x)\psi_o(x)\ dx = 1$ è una funzione gaussiana

$$\psi_o(x) = (\pi\sigma^2)^{-1/4}\ e^{-x^2/2\sigma^2}$$

Le altre autofunzioni si ottengono dalla relazione $(a^+)^n|0\rangle = (n!)^{1/2}|n\rangle$, ovvero

$$\psi_n(x) = \frac{1}{(n!)^{1/2}}\left[\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\ \frac{d}{dx}\right]^n \psi_o(x)$$

Le soluzioni sono i polinomi di Hermite, $H_n(z)$, moltiplicati per una gaussiana

$$\psi_n(z) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}}\ \frac{1}{2^{n/2}(n!)^{1/2}}\ H_n(z)\ e^{-z^2/2} \qquad\qquad z = x/\sigma$$

n	E_n	$\psi_n(z)$
0	$\hbar\omega/2$	$(\pi\sigma^2)^{-1/4}\ e^{-z^2/2}$
1	$3\hbar\omega/2$	$(\pi\sigma^2)^{-1/4}2^{-1/2}\ 2z\ e^{-z^2/2}$
2	$5\hbar\omega/2$	$(\pi\sigma^2)^{-1/4}2^{-3/2}\ (4z^2 - 2)\ e^{-z^2/2}$
3	$7\hbar\omega/2$	$(\pi\sigma^2)^{-1/4}6^{-1/2}2^{-3/2}\ (8z^3 - 12z)\ e^{-z^2/2}$
...		

4.10 Il momento angolare

4.10.1 Rotazioni

Una rotazione è una trasformazione continua dallo stato $|\psi\rangle$ allo stato $|\psi'\rangle = R|\psi\rangle$. Perché sia consevata la densità di probabilità, $\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|R^+R|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$, la rotazione è una trasformazione unitaria: $R^{-1} = R^+$. Se lo stato è espresso in funzione delle coordinate spaziali $\vec{r} = (x, y, z)$, si ha $\psi'(\vec{r}) = R\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}_o)$ con $\vec{r}_o = R^{-1}\vec{r}$. Le rotazioni delle coordinate sono rappresentate da matrici 3×3

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rotazioni attorno ad assi diversi *non* commutano e le relazioni di commutazione definiscono le proprietà dei generatori delle rotazioni. Consideriamo le rotazioni infinitesime attorna agli assi x, y, z e definiamo

$$R_x(\epsilon_x) = 1 - i\epsilon_x G_x \qquad R_x(\epsilon_y) = 1 - i\epsilon_y G_y \qquad R_x(\epsilon_z) = 1 - i\epsilon_z G_z$$

con gli angoli infinitesimi ϵ_k reali e gli operatori G_k hermitiani. Applichiamo in successione due rotazioni infinitesime attorno ad assi diversi. Sviluppando al secondo ordine in ϵ

$$R_x(\epsilon_x)R_y(\epsilon_y) = \begin{pmatrix} 1-\epsilon_y^2 & 0 & \epsilon_y \\ \epsilon_x\epsilon_y & 1-\epsilon_x^2 & -\epsilon_x \\ -\epsilon_y & \epsilon_x & 1-\epsilon_x^2/2-\epsilon_y^2/2 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\epsilon_y)R_x(\epsilon_x) = \begin{pmatrix} 1-\epsilon_y^2 & \epsilon_x\epsilon_y & \epsilon_y \\ 0 & 1-\epsilon_x^2 & -\epsilon_x \\ -\epsilon_y & \epsilon_x & 1-\epsilon_x^2/2-\epsilon_y^2/2 \end{pmatrix}$$

$$[R_x(\epsilon_x), R_y(\epsilon_y)] = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_x\epsilon_y & 0 \\ \epsilon_x\epsilon_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_z(\epsilon_x\epsilon_y) - 1$$

$$[1 - i\epsilon_x G_x, 1 - i\epsilon_y G_y] = -\epsilon_x\epsilon_y[G_x, G_y] = -i\epsilon_x\epsilon_y G_z$$

e lo stesso permutando i generatori G_k. Troviamo quindi le relazioni di commutazione

$$[G_j, G_k] = i\varepsilon_{jkl}G_l$$

dove ε_{jkl} è il tensore antisimmetrico di Levi-Civita. Queste sono le relazioni di commutazione delle componenti del momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$. Per ottenere

la relazione tra i generatori delle rotazioni e le componenti del momento angolare consideriamo una rotazione di uno stato

$$\psi'(x,y,z) = R_z(\phi)\ \psi(x,y,z) = \psi(x\cos\phi + y\sin\phi, -x\sin\phi + y\cos\phi, z)$$

Per una rotazione infinitesima

$$R_z(\delta\phi)\ \psi(x,y,z) = \psi(x + y\delta\phi, -x\delta\phi + y, z) = \left[1 - \delta\phi\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\psi(x,y,z)$$

$$R_z(\delta\phi) = 1 - (i/\hbar)\delta\phi\ L_z$$

dove L_z è la terza componente del momento angolare, $L_z = -i\hbar(x\ \partial/\partial y - y\ \partial/\partial x)$. Quindi l'operatore momento angolare è il generatore delle rotazioni e per una rotazione finita di un angolo α attorno all'asse $\hat{n}$ si ha

$$R_n(\alpha) = e^{-(i/\hbar)\alpha\hat{n}}\cdot\vec{L}$$

4.10.2 Autovalori del momento angolare

L'operatore momento angolare ha dimensione $\hbar$ $[eV \times s]$ ed è proporzionale al generatore delle rotazioni $\vec{J} = \hbar\vec{G}$. Con le componenti G_k possiamo costruire il modulo quadro, $G^2 = G_x^2 + G_y^2 + G_z^2$, che commuta con le tre componenti, $[G^2, G_k] = 0$. Poiché queste non commutano tra loro possiamo trovare un sistema di autostati comune a G^2 e ad una solo delle componenti che fissiamo per convenzione G_z. Chiamiamo $|\lambda,\mu\rangle$ un autostato di G^2 e G_z e λ,μ i rispettivi autovalori

$$G^2|\lambda,\mu\rangle = \lambda|\lambda,\mu\rangle \qquad\qquad G_z|\lambda,\mu\rangle = \mu|\lambda,\mu\rangle$$

Consideriamo gli operatori non hermitiani $G_\pm = G_x \pm iG_y$ che hanno le seguenti relazioni di commutazione

$$[G_+, G_-] = 2G_z \qquad [G_\pm, G^2] = 0 \qquad [G_\pm, G_z] = \pm G_\pm$$

Gli stati $G_\pm|\lambda,\mu\rangle$ sono autostati di G^2 e G_z, infatti abbiamo

$$G^2 G_\pm|\lambda,\mu\rangle = G_\pm G^2|\lambda,\mu\rangle = \lambda\ G_\pm|\lambda,\mu\rangle$$

$$G_z G_\pm|\lambda,\mu\rangle = (G_\pm G_z + [G_z, G_\pm])|\lambda,\mu\rangle = (\mu \pm 1)G_\pm|\lambda,\mu\rangle$$

L'azione degli operatori $G_\pm$ è quindi di far passare da un autostato ad un altro

$$G_-|\lambda,\mu\rangle = \nu_-|\lambda,\mu-1\rangle \qquad\qquad G_+|\lambda,\mu\rangle = \nu_+|\lambda,\mu+1\rangle$$

Per verificare che la successione sia limitata, cioè che μ sia finito, consideriamo gli operatori G_+G_- e G_-G_+

$$G_+G_- = G_x^2 + G_y^2 - i[G_x, G_y] = G^2 - G_z^2 + G_z$$

$$G_- G_+ = G_x^2 + G_y^2 + i[G_x, G_y] = G^2 - G_z^2 - G_z$$

e osserviamo che gli elementi di matrice dell'operatore $G^2 - G_z^2$ sono definiti positivi poiché

$$G^2 - G_z^2 = \frac{G_+ G_- + G_- G_+}{2} \qquad con \quad G_+ G_- = G_-^+ G_- \quad e \quad G_- G_+ = G_+^+ G_+$$

$$\langle \lambda, \mu |\ G^2 - G_z^2\ | \lambda, \mu \rangle = \lambda - \mu^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \mu^2 \leq \lambda$$

Quindi esiste un valore minimo e un valore massimo di μ per cui

$$G_- |\lambda, \mu_{min}\rangle = 0 \qquad\qquad G_+ |\lambda, \mu_{max}\rangle = 0$$

Per questi autostati deve anche essere

$$G_+ G_- |\lambda, \mu_{min}\rangle = (G^2 - G_z^2 + G_z)|\lambda, \mu_{min}\rangle = (\lambda - \mu_{min}^2 + \mu_{min})|\lambda, \mu_{min}\rangle = 0$$

$$G_- G_+ |\lambda, \mu_{max}\rangle = (G^2 - G_z^2 - G_z)|\lambda, \mu_{max}\rangle = (\lambda - \mu_{max}^2 - \mu_{max})|\lambda, \mu_{max}\rangle = 0$$

cioè $\mu_{min}^2 - \mu_{min} = \mu_{max}^2 + \mu_{max}$. Quindi μ è limitato nell'intervallo

$$\mu_{min} \leq \mu \leq \mu_{max} \qquad con \qquad \mu_{min} = -\mu_{max}$$

Poiché si va da μ_{min} a μ_{max} con un numero finito di passi, risulta $\mu_{max} = \mu_{min} + n$ con n intero positivo, cioè

$$\mu_{min} = -n/2 \qquad \mu_{max} = n/2 \qquad \mu = -n/2,\ -n/2+1, \ldots,\ n/2$$

$$\lambda = \mu_{max}(\mu_{max} + 1) = (n/2)(n/2 + 1)$$

Passando al momento angolare $\vec{J} = \hbar \vec{G}$ e definendo $|j, m\rangle$ gli autostati

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle \qquad\qquad J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$$

abbiamo che

- esistono $2j + 1$ proiezioni del vettore $\vec{J}$ con autovalori $m\hbar$

$$m = -j,\ -j+1, \ldots,\ j-1,\ j$$

- il modulo di $\vec{J}$ ha autovalore $\hbar\sqrt{j(j+1)}$
- i possibili valori di j sono i *numeri interi e semi-interi positivi*
- gli elementi di matrice tra autostati (che supponiamo normalizzati) sono

$$\langle j', m' | J^2 | j, m \rangle = \hbar^2 j(j+1)\ \delta_{j'j}\ \delta_{m'm}$$

$$\langle j', m' | J_z | j, m \rangle = \hbar m\ \delta_{j'j}\ \delta_{m'm}$$

Gli elementi di matrice degli operatori J_+ e J_- si ottengono dalle relazioni

$$J_-|j,m\rangle = \hbar\nu_-|j,m-1\rangle \qquad J_+|j,m\rangle = \hbar\nu_+|j,m+1\rangle$$

$$\langle j',m'|J_+J_-|j,m\rangle = \hbar^2[j(j+1)-m^2+m]\ \delta_{j'j}\ \delta_{m'm} = \hbar^2|\nu_-|^2$$
$$\langle j',m'|J_-J_+|j,m\rangle = \hbar^2[j(j+1)-m^2-m]\ \delta_{j'j}\ \delta_{m'm} = \hbar^2|\nu_+|^2$$

e quindi, a meno di un fattore di modulo 1, si ha

$$\nu_- = \sqrt{j(j+1)-m^2+m} \qquad \nu_+ = \sqrt{j(j+1)-m^2-m}$$

$$\langle j',m'|J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m^2\mp m}\ \delta_{j'j}\ \delta_{m'm\pm1}$$

4.10.3 Rappresentazione dei generatori

Dall'ultima relazione troviamo gli elementi di matrice degli operatori $G_\pm$ e da questi la rappresentazione dei generatori G_k usando le relazioni

$$G_x = \frac{G_+ + G_-}{2} \qquad G_y = \frac{G_+ - G_-}{2i} \qquad iG_z = [G_x, G_y]$$

Facciamo due semplici esempi

- **Spin 1/2**: $\quad j = 1/2 \quad m = \pm 1/2$

Gli elementi di matrice non nulli sono

$$\langle 1/2,+1/2|\ G_+\ |1/2,-1/2\rangle = 1 \qquad \langle 1/2,-1/2|\ G_-\ |1/2,+1/2\rangle = 1$$

quindi le matrici $G_\pm$ sono

$$G_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e i generatori G_k sono, a meno dell'autovalore $1/2$, le *matrici di Pauli* nella rappresentazione in cui G_z è diagonale

$$G_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad G_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Anche le matrici G_k^2 sono diagonali, $G_k^2 = 1/4$, e quindi

$$G^2 = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad j(j+1) = \frac{3}{4}$$

- **Spin 1**: $\quad j = 1 \quad m = -1,\ 0,\ +1$

Gli elementi di matrice non nulli sono

$$\langle 1,0|\ G_+\ |1,-1\rangle = \sqrt{2} \qquad \langle 1,-1|\ G_-\ |1,0\rangle = \sqrt{2}$$

$$\langle 1,1|\ G_+\ |1,0\rangle = \sqrt{2} \qquad \langle 1,0|\ G_-\ |1,+1\rangle = \sqrt{2}$$

quindi le matrici $G_\pm$ sono

$$G_+ = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_- = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e i generatori G_k sono

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad G_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e abbiamo

$$G_x^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_y^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G^2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad j(j+1) = 2$$

4.10.4 Somma dei momenti angolari

Consideriamo due autostati del momento angolare $|j_1, m_1\rangle$ e $|j_2, m_2\rangle$. Vogliamo sapere quali sono gli autovalori dell'operatore somma, $\vec{J} = \vec{j_1} + \vec{j_2}$, tali che la proiezione lungo l'asse z sia $J_z = j_{1z} + j_{2z}$. Definiamo $|j_1\ m_1, j_2\ m_2\rangle$ l'autostato somma nella base dei vettori di partenza (in cui $j_1^2,\ j_{1z},\ j_2^2,\ j_{2z}$ sono diagonali)

$$j_1^2|j_1\ m_1, j_2\ m_2\rangle = \hbar^2 j_1(j_1{+}1)|j_1\ m_1, j_2\ m_2\rangle \qquad j_{1z}|j_1\ m_1, j_2\ m_2\rangle = \hbar m_1|j_1\ m_1, j_2\ m_2\rangle$$

$$j_2^2|j_1\ m_1, j_2\ m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2{+}1)|j_1\ m_1, j_2\ m_2\rangle \qquad j_{2z}|j_1\ m_1, j_2\ m_2\rangle = \hbar m_2|j_1\ m_1, j_2\ m_2\rangle$$

Nota: nel seguito poniamo $\hbar = 1$. Definiamo $|J, M\rangle$ l'autostato somma nella nuova base in cui J^2 e J_z sono diagonali

$$J^2|J, M\rangle = J(J+1)|J, M\rangle \qquad J_z|J, M\rangle = M|J, M\rangle$$

Gli autostati somma possono esprimersi come combinazione lineare degli autostati di partenza

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1}\sum_{m_2} |j_1\ m_1, j_2\ m_2\rangle\langle j_1\ m_1, j_2\ m_2|J, M\rangle$$

dove i prodotti scalari $\langle j_1\ m_1, j_2\ m_2|J, M\rangle$ sono chiamati *coefficienti di Clebsch-Gordan*. Per trovare l'autovalore M osserviamo che l'elemento di matrice dell'operatore $J_z - j_{1z} - j_{2z}$ è nullo:

$$\langle J, M|J_z - j_{1z} - j_{2z}|j_1\ m_1, j_2\ m_2\rangle = (M - m_1 - m_2)\langle J, M|j_1\ m_1, j_2\ m_2\rangle = 0$$

Per trovare i possibili autovalori di J osserviamo che la molteplicità della somma è pari al numero di stati $N = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Se J_{min} e J_{max} sono i limiti in cui varia J abbiamo

$$N = \sum_{J_{min}}^{J_{max}} (2J + 1) = (J_{max} + 1)^2 - ((J_{min} - 1) + 1)^2 = J_{max}^2 + 2J_{max} + 1 - J_{min}^2 =$$

$$= (J_{max} + J_{min} + 1)(J_{max} - J_{min} + 1)$$

da cui otteniamo $2j_1 = J_{max} + J_{min}$, $2j_2 = J_{max} - J_{min}$ (o viceversa) cioè: $J_{min} = |j_i - j_2|$, $J_{max} = j_i + j_2$. Quindi gli autovalori della somma soddisfano le relazioni

$$|j_i - j_2| \leq J \leq j_i + j_2 \qquad\qquad M = m_1 + m_2$$

4.10.5 I coefficienti di Clebsch-Gordan

Troviamo le relazioni cui soddisfano i coefficienti di Clebsch-Gordan. Usando l'operatore J_+ si ha

$$J_+|J, M\rangle = \sqrt{J(J + 1) - M^2 - M}\ |J, M + 1\rangle =$$

$$(J_{1+} + J_{2+})\ \sum_{n_1}\sum_{n_2} |j_1\ n_1, j_2\ n_2\rangle\langle j_1\ n_1, j_2\ n_2|J, M\rangle =$$

$$\sum_{n_1}\sum_{n_2} \sqrt{j_1(j_1 + 1) - n_1^2 - n_1}\ |j_1\ n_1 + 1, j_2\ n_2\rangle\langle j_1\ n_1, j_2\ n_2|J, M\rangle +$$

$$\sum_{n_1}\sum_{n_2} \sqrt{j_2(j_2 + 1) - n_2^2 - n_2}\ |j_1\ n_1, j_2\ n_2 + 1\rangle\langle j_1\ n_1, j_2\ n_2|J, M\rangle$$

Moltiplicando per $\langle j_1\ m_1, j_2\ m_2|$ e sfruttando le relazioni di ortonormalità degli autostati, $\langle j_1\ m_1, j_2\ m_2|j_1\ n_1, j_2\ n_2\rangle = \delta_{m_1 n_1}\delta_{m_2 n_2}$, si ottiene

$$\sqrt{J(J + 1) - M^2 - M}\ |J, M+1\rangle = \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1^2 + m_1}\ \langle j_1\ m_1-1, j_2\ m_2|J, M\rangle +$$

$$\sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2^2 + m_2}\ \langle j_1\ m_1, j_2\ m_2 - 1|J, M\rangle$$

e analogamente, usando l'operatore J_-,

$$\sqrt{J(J + 1) - M^2 + M}\ |J, M-1\rangle = \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1^2 + m_1}\ \langle j_1\ m_1+1, j_2\ m_2|J, M\rangle +$$

$$\sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2^2 + m_2}\ \langle j_1\ m_1, j_2\ m_2 + 1|J, M\rangle$$

Da queste *relazioni di ricorrenza* si possono ottenere i valori dei coefficienti di Clebsch-Gordan a meno di un fattore di modulo 1 che viene fissato in modo convenzionale. Facciamo alcuni semplici esempi:

- **spin 1/2 + spin 1/2**

Con $j_1 = 1/2$, $j_2 = 1/2$ si hanno quattro possibili combinazioni, per la somma queste sono: $J = 1, M = +1, 0, -1$ e $J = 0, M = 0$. Nel caso $m_1 = m_2 = +1/2$ vi è una sola combinazione e lo stesso nel caso $m_1 = m_2 = -1/2$

$$|1, +1\rangle = |1/2\ +1/2, 1/2\ +1/2\rangle \qquad |1, -1\rangle = |1/2\ -1/2, 1/2\ -1/2\rangle$$

Applicando J_- al primo (oppure J_+ al secondo) si ha

$$J_-|1, +1\rangle = \sqrt{2}|1, 0\rangle = |1/2\ +1/2, 1/2\ -1/2\rangle + |1/2\ -1/2, 1/2\ +1/2\rangle$$

Anche lo stato $|J, M\rangle = |0, 0\rangle$ è una sovrapposizione degli stessi due autostati con $m_1 + m_2 = 0$

$$|0, 0\rangle = a|1/2\ -1/2, 1/2\ +1/2\rangle + b|1/2\ +1/2, 1/2\ -1/2\rangle$$

con $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Applicando J_+ (oppure J_-) si ha

$$J_+|0, 0\rangle = a|1/2\ +1/2, 1/2\ +1/2\rangle + b|1/2\ +1/2, 1/2\ +1/2\rangle = 0$$

da cui $a = -b$. Quindi otteniamo tre stati con $J = 1$ *simmetrici* rispetto allo scambio dello spin e uno stato con $J = 0$ *antisimmetrico*. I coefficienti di Clebsch-Gordan sono riassunti nella tabella seguente

$j_1 = 1/2$	$j_2 = 1/2$	J	1	1	0	1
m_1	m_2	M	+1	0	0	-1
+1/2	+1/2		1			
+1/2	-1/2			$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$	
-1/2	+1/2			$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$	
-1/2	-1/2					1

- **spin 1 + spin 1/2**

Con $j_1 = 1$, $j_2 = 1/2$ si hanno sei possibili combinazioni, per la somma queste sono: $J = 3/2, M = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2$ e $J = 1/2, M = +1/2, -1/2$. Nel caso $m_1 = +1$, $m_2 = +1/2$ vi è una sola combinazione e lo stesso nel caso $m_1 = -1$, $m_2 = -1/2$

$$|3/2, +3/2\rangle = |1\ +1, 1/2\ +1/2\rangle \qquad |3/2, -3/2\rangle = |1\ -1/2, 1/2\ -1/2\rangle$$

Operando come nel caso precedente

$$J_-|3/2, +3/2\rangle = \sqrt{3}|3/2, +1/2\rangle = |1\ +1, 1/2\ -1/2\rangle + \sqrt{2}|1\ 0, 1/2\ +1/2\rangle$$

$$J_+|3/2, -3/2\rangle = \sqrt{3}|3/2, -1/2\rangle = |1\ -1, 1/2\ +1/2\rangle + \sqrt{2}|1\ 0, 1/2\ -1/2\rangle$$

Ponendo $|1/2, +1/2\rangle = a|1\ +1, 1/2\ -1/2\rangle + b|1\ 0, 1/2\ +1/2\rangle$ otteniamo

$$J_+|1/2, +1/2\rangle = a|1\ +1, 1/2\ +1/2\rangle + \sqrt{2}b|1\ +1, 1/2\ +1/2\rangle = 0$$

cioè $a + \sqrt{2}b = 0$ e, utilizzando la relazione di ortonormalità degli autostati, $a = \sqrt{2/3}$, $b = -\sqrt{1/3}$

$$J_-|1/2, +1/2\rangle = |1/2, -1/2\rangle = (\sqrt{2}a + b)|1\ 0, 1/2\ -1/2\rangle + \sqrt{2}b|1\ -1, 1/2\ +1/2\rangle$$

Quindi abbiamo

$j_1=1$	$j_2=1/2$	J	3/2	3/2	1/2	1/2	3/2	3/2
m_1	m_2	M	+3/2	+1/2	+1/2	-1/2	-1/2	-3/2
+1	+1/2		1					
+1	-1/2			$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$			
0	+1/2			$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{1/3}$			
0	+1/2					$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$	
-1	+1/2					$-\sqrt{2/3}$	$\sqrt{1/3}$	
-1	-1/2							1

- **spin 1 + spin 1**

Gli autostati $|J,M\rangle$ sono

J = 2 M = +2 +1 0 -1 -2
J = 1 M = +1 0 -1
J = 0 M = 0

$j_1=1$	$j_2=1$	J	2	2	1	2	1	0	1	2	2
m_1	m_2	M	+2	+1	+1	0	0	0	-1	-1	-2
+1	+1		1								
+1	0			$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$						
+1	-1					$\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/3}$			
0	+1			$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$						
0	0					$-\sqrt{2/3}$	0	$-\sqrt{1/3}$			
0	-1								$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$	
-1	+1					$\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/3}$			
-1	0								$-\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$	
-1	-1										1

4.10.6 Matrici di rotazione

Una generica rotazione nello spazio può essere ottenuta come successione di rotazioni attorno a tre assi. Consideriamo in successione (Fig.4.15)

1 - rotazione di α attorno all'asse z: $x \to x'$, $y \to y'$

2 - rotazione di β attorno all'asse y': $x' \to x''$, $z \to z'$

3 - rotazione di γ attorno all'asse z': $x'' \to x'''$, $y' \to y''$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sono gli *angoli di Eulero* e la rotazione è espressa

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_{z'}(\gamma)\ R_{y'}(\beta)\ R_z(\alpha)$$

Un operatore generico si trasforma per rotazione nel modo $O' = ROR^{-1}$. Quindi la seconda rotazione può essere espressa come $R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha)\ R_y(\beta)\ R_z^{-1}(\alpha)$. Analogamente per la terza rotazione: $R_{z'}(\gamma) = R_{y'}(\beta)\ R_z(\gamma)\ R_{y'}^{-1}(\beta)$, e otteniamo

$$R_{z'}(\gamma)\ R_{y'}(\beta)\ R_z(\alpha) = R_{y'}(\beta)\ R_z(\gamma)\ R_{y'}^{-1}(\beta)\ R_{y'}(\beta)\ R_z(\alpha) = R_{y'}(\beta)\ R_z(\gamma)\ R_z(\alpha) =$$

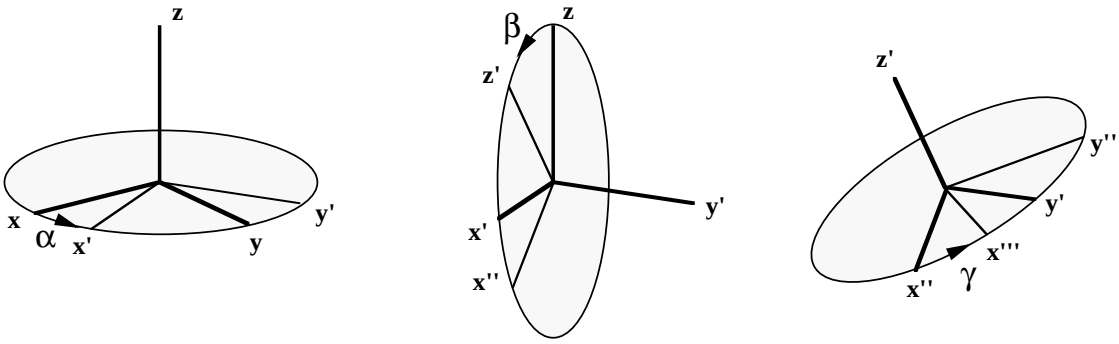


Figure 4.15: Rotazioni e angoli di Eulero

$$= R_z(\alpha)\ R_y(\beta)\ R_z^{-1}(\alpha)\ R_z(\gamma)\ R_z(\alpha) = R_z(\alpha)\ R_y(\beta)\ R_z^{-1}(\alpha)\ R_z(\alpha)\ R_z(\gamma) =$$
$$= R_z(\alpha)\ R_y(\beta)\ R_z(\gamma)$$

e, passando alla rappresentazione con i generatori,

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\alpha J_z}\ e^{-i\beta J_y}\ e^{-i\gamma J_z}$$

In una rotazione si conserva il modulo del momento angolare poiché J^2 commuta con le sue componenti. La rotazione fa passare da un autostato $|j,m\rangle$ ad un autostato $|j,m'\rangle$. Consideriamo gli elementi di matrice di una generica rotazione

$$D^j_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle j,m'|e^{-i\alpha J_z}\ e^{-i\beta J_y}\ e^{-i\gamma J_z}|j,m\rangle =$$
$$= e^{i\alpha m'}\langle j,m'|e^{-i\beta J_y}|j,m\rangle e^{-i\gamma m} = e^{i(\alpha m' - \gamma m)}\ d^j_{mm'}(\beta)$$

Possiamo quindi esprimere gli elementi di matrice in funzione dell'angolo di rotazione β attorno ad un asse normale all'asse di quantizzazione z, a parte un fattore di modulo 1. Gli elementi di matrice $d^j_{mm'}(\beta)$ sono chiamati *funzioni di Wigner*.

- **Rotazione di spin 1/2**

I generatori delle rotazioni di spin 1/2 sono le matrici di Pauli, $\vec{J} = \vec{\sigma}/2$, e l'operatore di rotazione si esprime

$$e^{-i\beta\sigma_y/2} = 1 - i\ \frac{\beta}{2}\ \sigma_y - \frac{i^2}{2}\ \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \sigma_y^2 + \ldots = \cos\beta/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i\ \sin\beta/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^{1/2}_{mm'}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta/2 & -\sin\beta/2 \\ \sin\beta/2 & \cos\beta/2 \end{pmatrix}$$

- **Rotazione di spin 1**

Il generatore della rotazione di spin 1 attorno all'asse y è

$$J_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha la proprietà $J_y^{2n} = J_y^2$, $J_y^{2n+1} = J_y$, con $n = 1,\ 2,\ \ldots$

$$e^{-i\beta J_y} = 1 - i\ \beta J_y - i^2\ \frac{\beta^2}{2}\ J_y^2 + \ldots = 1 - i\ \sin\beta\ J_y - (1 - \cos\beta)\ J_y^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1 - \cos\beta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d^1_{mm'}(\beta) = \begin{pmatrix} (1+\cos\beta)/2 & -\sin\beta/\sqrt{2} & (1-\cos\beta)/2 \\ \sin\beta/\sqrt{2} & \cos\beta & -\sin\beta/\sqrt{2} \\ (1-\cos\beta)/2 & \sin\beta/\sqrt{2} & (1+\cos\beta)/2 \end{pmatrix}$$

4.10.7 Le armoniche sferiche

Le funzioni armoniche sferiche sono le autofunzione del momento angolare orbitale, $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$, nella rappresentazione degli operatori in funzione delle coordinate spaziali ($\hbar = 1$)

$$L_x = -i\left(y\ \frac{\partial}{\partial z} - z\ \frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad L_y = -i\left(z\ \frac{\partial}{\partial x} - x\ \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad L_z = -i\left(x\ \frac{\partial}{\partial y} - y\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$L_+ = z\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\ \frac{\partial}{\partial y}\right) - (x + iy)\frac{\partial}{\partial z} \qquad L_- = -z\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\ \frac{\partial}{\partial y}\right) + (x - iy)\frac{\partial}{\partial z}$$

Conviene usare coordinate polari

$$x = r\ \sin\theta\ \cos\phi \qquad y = r\ \sin\theta\ \sin\phi \qquad z = r\ \cos\theta$$

La matrice di tasformazione jacobiana

$$\frac{\partial(xyz)}{\partial(r\theta\phi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\ \cos\phi & r\ \cos\theta\ \cos\phi & -r\ \sin\theta\ \sin\phi \\ \sin\theta\ \sin\phi & r\ \cos\theta\ \sin\phi & r\ \sin\theta\ \cos\phi \\ \cos\theta & -r\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante $\Delta = r^2\ \sin\theta$, e la matrice inversa è

$$\frac{\partial(r\theta\phi)}{\partial(xyz)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\ \cos\phi & \cos\theta\ \cos\phi/r & -\sin\phi/r\ \sin\theta \\ \sin\theta\ \sin\phi & \cos\theta\ \sin\phi/r & \cos\phi/r\ \sin\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta/r & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\ \cos\phi\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\ \cos\phi}{r}\ \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\ \sin\phi\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\ \sin\phi}{r}\ \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\ \frac{\partial}{\partial\theta}$$

In coordinate polari gli operatori del momento angolare orbitale sono

$$L_z = -i\ \frac{\partial}{\partial\phi} \qquad\qquad L_\pm = e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\ \cot\theta\ \frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

Esprimendo gli autostati in funzione degli angoli, $|l,m\rangle = Y_{lm}(\theta,\phi)$, le equazioni agli autovalori sono

$$L_z Y_{lm}(\theta,\phi) = m\ Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad\qquad L^2 Y_{lm}(\theta,\phi) = l(l+1)\ Y_{lm}(\theta,\phi)$$

Nella prima L_z determina solo la dipendenza da ϕ quindi le autofunzioni si possono fattorizzare: $Y_{lm}(\theta,\phi) = \Theta_{lm}(\theta)\ \Phi_m(\phi)$

$$-i\ \frac{\partial}{\partial\phi}\ \Phi_m(\phi) = m\ \Phi_m(\phi) \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_m(\phi) = N_m\ e^{im\phi}$$

con $N_m = 1/\sqrt{2\pi}$. Poiché il sistema non varia per una rotazione di 2π attorno all'asse z

$$\Phi_m(\phi + 2\pi) = \Phi_m(\phi) \qquad \Rightarrow \qquad e^{i2\pi m} = 1$$

i valori di m, e quindi anche di l, sono interi.

Per trovare $\Theta_{lm}(\theta)$ osserviamo che si ha $L_+ Y_{l\ l}(\theta,\phi) = 0$, $L_- Y_{l\ -l}(\theta,\phi) = 0$. La prima equazione

$$L_+ = e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\ \cot\theta\ \frac{\partial}{\partial\phi}\right)\Theta_{ll}(\theta)\ e^{il\phi} = e^{i(l+1)\phi}\left(\frac{\partial\Theta_{ll}}{\partial\theta} - l\ \cot\theta\ \Theta_{ll}\right) = 0$$

ha come soluzione $\Theta_{ll}(\theta) = N_l\ \sin^l\theta$. Le altre soluzioni si ottengono ricordando che $L_- Y_{lm}$ sono autofunzioni che soddisfano le relazioni $L_- Y_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m^2 + m}\, Y_{l\ m-1}$

$$L_- Y_{ll}(\theta,\phi) = e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\ \cot\theta\ \frac{\partial}{\partial\phi}\right)\sin^l\theta\ e^{il\phi} = -e^{i(l-1)\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + l\ \cot\theta\right)\sin^l\theta$$

Osserviamo che per una generica funzione $f(\theta)$ si ha

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + l\ \cot\theta\right) f(\theta) = \frac{1}{\sin^l\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ \sin^l\theta\ f(\theta)$$

e quindi, per $f(\theta) = \sin^l\theta$, si ha

$$L_- Y_{ll}(\theta,\phi) = \frac{e^{i(l-1)\phi}}{\sin^{l-1}\theta}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\sin^{2l}\theta$$

$$L_- L_- Y_{ll}(\theta,\phi) = \frac{e^{i(l-2)\phi}}{\sin^{l-2}\theta}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\sin^{2l}\theta$$

e cosi di seguito. Ponendo $-\sin\theta d\theta = d\cos\theta$, $\sin^{2l}\theta = (1-\cos^2\theta)^l$, si ha

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = N_{lm}\ \frac{e^{im\phi}}{\sin^m\theta}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l-m}(1-\cos^2\theta)^l$$

Le costanti N_{lm} si determinano dalla condizione di normalizzazione
$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} Y^*_{lm}(\theta,\phi)\ Y_{lm}(\theta,\phi)\ d\cos\theta\ d\phi = 1$

$$N_{lm} = \frac{(-1)^l}{2^l\ l!}\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\right)^{1/2}$$

Le prime armoniche sferiche sono

$l=0\quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$l=1\quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\ \cos\theta \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\ \sin\theta\ e^{i\phi}$

$l=2\quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1) \qquad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\ \sin\theta\ \cos\theta\ e^{i\phi} \qquad Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\ \sin^2\theta\ e^{2i\phi}$

Dalle relazioni precedenti osserviamo che

- gli autovalori del momento angolare orbitale sono *multipli interi di* $\hbar$
- le autofunzioni Y_{l0} sono i *polinomi di Legendre* $P_l(\cos\theta)$
- per coniugazione complessa si ha: $Y^*_{lm}(\theta,\phi) = Y_{l\ -m}(\theta,\phi)$
- per trasformazioni di parità, $\theta \to \pi - \theta$, $\phi \to \phi + \pi$,

  $$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta \qquad \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \qquad e^{im(\phi+\pi)} = (-1)^m\ e^{im\phi}$$

  le armoniche sferiche si moltiplicano per $(-1)^{l-m}(-1)^m$

  $$P\cdot Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^l\ Y_{lm}(\theta,\phi)$$

4.11 Equazione di Schrödinger in tre dimensioni

Consideriamo una particella di massa m soggetta al potenziale $U(\vec{r})$. L'equazione agli autovalori è

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\ \vec{\nabla}^2 + U(\vec{r})\right)\psi(\vec{r}) = E\ \psi(\vec{r})$$

Se la sorgente del potenziale è una particella di massa M, la massa che compare nell'equazione è la *massa ridotta* $m' = mM/(m+M)$ e $\vec{r}$ è la coordinata di m' nel centro di massa.

4.11.1 Potenziale centrale

Se il potenziale descrive un campo di forze a simmetria sferica, $U(\vec{r}) = U(|\vec{r}|)$, si conserva il momento angolare e gli autostati della hamiltoniana sono anche autostati dell'operatore momento angolare che in coordinate polari ha componenti

$$L_x = i\hbar \left(\sin\phi \ \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \ \cos\phi \ \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \qquad L_y = i\hbar \left(-\cos\phi \ \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \ \sin\phi \ \frac{\partial}{\partial\phi} \right)$$

$$L_z = -i\hbar \ \frac{\partial}{\partial\phi} \qquad \vec{L}^2 = \hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \ \frac{\partial}{\partial\theta} \ \sin\theta \ \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \ \frac{\partial}{\partial\phi} \right)$$

Esprimendo l'operatore $\vec{\nabla}^2$ in coordinate polari

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{r^2} \ \frac{\partial}{\partial r} \ r^2 \ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin\theta} \ \frac{\partial}{\partial\theta} \ \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \ \frac{\partial}{\partial\phi} \right)$$

l'equazione agli autovalori diventa

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \ \frac{1}{r^2} \ \frac{\partial}{\partial r} \ r^2 \ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + U(r) \right) \psi(r,\theta,\phi) = E \ \psi(r,\theta,\phi)$$

La soluzione si può fattorizzare nel prodotto di una funzione di r e delle autofunzioni degli operatori $\vec{L}^2$, L_z, con autovalori l, m: $\vec{L}^2 \ Y_{lm}(\theta,\phi) = \hbar^2 l(l+1) \ Y_{lm}(\theta,\phi)$, $L_z \ Y_{lm}(\theta,\phi) = \hbar m \ Y_{lm}(\theta,\phi)$.

$$\psi_{Elm}(r,\theta,\phi) = R_{El}(r) \ Y_{lm}(\theta,\phi)$$

La funzione radiale dipende dall'energia e da l e soddisfa l'equazione agli autovalori

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \ \frac{1}{r^2} \ \frac{d}{dr} r^2 \ \frac{d}{dr} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + U(r) \right) R_{El}(r) = E \ R_{El}(r)$$

- Nota: $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} rR = \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \ \frac{1}{r} \ \frac{d^2}{dr^2} \ r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + U(r) \right) R_{El}(r) = E \ R_{El}(r)$$

La funzione $u_{El}(r) = rR_{El}(r)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger in una dimensione

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + U(r) \right) u_{El}(r) = E \ u_{El}(r)$$

dove, oltre al potenziale $U(r)$, compare il potenziale repulsivo $\hbar^2 l(l+1)/2mr^2$ (*potenziale centrifugo*) dovuto all'energia cinetica di rotazione $L^2/2mr^2$ attorno al centro di forza. Ad esempio, l'effetto di una buca di potenziale viene modificato in funzione della distanza dal centro come mostrato in Fig.4.16. L'equazione radiale ha soluzione se $\lim_{r\to\infty} U(r) = 0 \quad \lim_{r\to 0} r^2 U(r) = 0$ e la soluzione deve soddisfare la condizione $\lim_{r\to 0} u(r) = 0$.

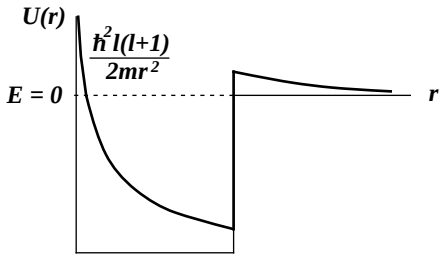


Figure 4.16: Buca di potenziale e potenziale centrifugo

4.11.2 Particella libera

Nel caso $U(r) = 0$ l'equazione radiale diventa

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) u = 0$$

definendo $\hbar k = (2mE)^{1/2}$ e la variabile adimensionale $x = kr$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) u = 0 \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) u = 0$$

Per $l = 0$ la soluzione è del tipo $u_o(x) = A \sin x + B \cos x$. La soluzione $\sin x$ è *dispari* e si annulla per $x = 0$, mentre la soluzione $\cos x$ è pari e non soddisfa la condizione $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$. Quindi la soluzione per $l = 0$ è $R_o(x) = A \sin x/x$. Le soluzioni sono le funzioni di Bessel sferiche, $j_l(x)$, *dispari*, e le funzioni di Neumann sferiche, $n_l(x)$, *pari*. Queste soddisfano le condizioni

$$j_l(x) = (-1)^l \left(-\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\right)^l \frac{\sin x}{x} \qquad n_l(x) = -(-1)^l \left(-\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\right)^l \frac{\cos x}{x}$$

Le prime funzioni di Bessel sono

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} j_0(x) = x^0$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} j_1(x) = \frac{x}{1\cdot 3}$$

$$j_2(x) = \frac{3\sin x}{x^3} - \frac{3\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} j_2(x) = \frac{x^2}{1\cdot 3\cdot 5}$$

$$j_3(x) = \frac{15\sin x}{x^4} - \frac{15\cos x}{x^3} - \frac{6\sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} j_3(x) = \frac{x^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$

I limiti delle funzioni di Bessel sferiche sono

$$\lim_{x\to 0} j_l(x) = \frac{x^l}{(2l+1)!!} \qquad \lim_{x\gg l} j_l(x) = \frac{\sin(x - l\pi/2)}{x}$$

La seconda relazione definisce il limite asintotico della funzione radiale della particella libera

$$\lim_{kr \gg l} j_l(kr) = \frac{1}{2ikr} \left(e^{ikr} e^{-il\pi/2} - e^{-ikr} e^{il\pi/2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2ikr} \left((-i)^l e^{ikr} - (i)^l e^{-ikr} \right) = \frac{i}{2k} \; i^l \left(\frac{e^{-ikr}}{r} - (-1)^l \; \frac{e^{ikr}}{r} \right)$$

come sovrapposisione di un'onda sferica entrante e di un'onda sferica uscente dal centro del potenziale in fase per l dispari e contro fase per l pari.

4.11.3 Sviluppo di un'onda piana in autofunzioni sferiche

L'autofunzione della particella libera, $\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, si può esprimere come sovrapposizione delle autofunzioni radiali $j_l(kr)$ e delle armoniche sferiche

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{lm} N_{lm} \; j_l(kr) \; Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Poiché $\psi(\vec{r})$ non dipende dall'angolo azimutale ϕ, la somma va estesa alle sole autofunzioni con $m = 0$

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} P_l(\cos\theta)$$

Usando le relazioni di ortonormalità $\int P_{l'}(\cos\theta) \; P_l(\cos\theta) \; d\cos\theta = 2 \; \delta_{l'l}/(2l+1)$ abbiamo

$$\int_{-1}^{+1} e^{ikr\cos\theta} \; P_l(\cos\theta) \; d\cos\theta =$$

$$\sum_{l'} N_{l'} \; j_{l'}(kr) \; \int_{-1}^{+1} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} P_{l'}(\cos\theta) \; P_l(\cos\theta) \; d\cos\theta = \frac{N_l \; j_l(kr)}{[2\pi(2l+1)]^{1/2}}$$

Consideriamo il comportamento per piccoli valori di r e sviluppiamo in serie $e^{ikr\cos\theta}$

$$N_l \; j_l(kr) = N_l \; \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} \simeq [2\pi(2l+1)]^{1/2} \int_{-1}^{+1} \sum_n \frac{(ikr)^n}{n!} \; u^n \; P_l(u) \; du$$

I polinomi di Legendre $P_l(u)$ sono definiti (appendice 4.10) dalla relazione

$$P_l(u) = \frac{(-1)^l}{2^l \; l!} \left(\frac{d}{du} \right)^l (1-u^2)^l =$$

$$= \frac{2l(2l-1)\ldots(l+1)}{2^l \; l!} \; u^l + fattore \times u^{l-2}$$

Quindi la potenza u^n si può esprimene come la somma di polinomi di Legendre

$$u^n = \frac{2^n \; n!}{2n(2n-1)\ldots(n+1)} \; P_n(u) + fattore \times P_{n'}(u) \qquad\qquad n' > n$$

Sostituendo questa espressione nella relazione precedente

$$N_l \, \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} = [2\pi(2l+1)]^{1/2} \int_{-1}^{+1} \sum_n \frac{i^n (kr)^n}{n!} \, \frac{2^n \; n!}{2n(2n-1)\ldots(n+1)} \, P_n(u) \, P_l(u) \, du =$$

$$= [2\pi(2l+1)]^{1/2} \; i^l (kr)^l \; \frac{2^l}{2l(2l-1)\ldots(l+1)} \; \frac{2}{2l+1}$$

otteniamo i coefficienti N_l

$$N_l = i^l \; [4\pi(2l+1)]^{1/2} \left[\frac{2^l \; (2l+1)!!}{(2l+1) \; 2l \; (2l-1)\ldots(l+1)} \right] = i^l \; [4\pi(2l+1)]^{1/2}$$

Le autofunzioni $j_l(kr) \; P_l(\cos\theta)$ sono pesate per la molteplicità dell'autovalore di momento angolare, $2l+1$, e sono sfasate di un angolo $l\pi/2$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} \; i^l \; (2l+1) \; j_l(kr) \; P_l(\cos\theta)$$

Il limite asintotico è

$$\lim_{kr \gg l} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left((-1)^l \; \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \right)$$

4.11.4 Buca di potenziale infinita

Consideriamo una particella confinata in una sfera di raggio ρ

$$U(r) = 0 \quad per \; r < \rho \qquad\qquad U(r) = \infty \quad per \; r > \rho$$

Per $r < \rho$ le soluzioni sono le funzioni $j_l(kr)$ che si devono annullare per $r = \rho$. La condizione $j_l(k\rho) = 0$ definisce i possibili valori di k e gli autovalori di energia, $E = \hbar^2 k^2 / 2m$, risultano quantizzati. Gli zeri delle prime funzioni di Bessel sferiche sono

$$l = 0 \qquad j_0(x) = \frac{\sin x}{x} = 0 \qquad k_n\rho = x_n = n\pi = 3.14, \; 6.28, \; 9.42, \; 12.57, \; \ldots$$

$$l = 1 \qquad j_1(x) = 0 \qquad \tan x = x \qquad k_n\rho = x_n = 4.49, \; 7.73, \; 10.90, \; 14.07, \; \ldots$$

$$l = 2 \qquad j_2(x) = 0 \qquad \tan x = \frac{x}{1 - x^2/3} \qquad k_n\rho = x_n = 5.76, \; 9.10, \; 12.32, \; \ldots$$

Gli autostati sono degeneri con molteplicità $2l+1$ e, se consideriamo particelle con spin $1/2$ vincolate nella buca di potenziale, la molteplicità è $2(2l+1)$. La tabella mostra per valori crescenti degli zeri della soluzione radiale, cioè per valori crescenti di energia, gli stati e la loro molteplicità. L'ultima colonna riporta il numero totale di fermioni di spin $1/2$ vincolati nella buca di potenziale.

$k_n\rho$	n	l	*stato*	E/E_o	$2l+1$	$\sum 2(2l+1)$
3.14	1	0	1s	1.00	1	2
4.49	1	1	1p	2.04	3	8
5.76	1	2	1d	3.36	5	18
6.28	2	0	2s	4.00	1	20
6.99	1	3	1f	4.95	7	34
7.73	2	1	2p	6.05	3	40
8.18	1	4	1g	6.78	9	58
9.10	2	2	2d	8.39	5	68
9.36	1	5	1h	8.88	11	90
9.42	3	0	3s	9.00	1	92
...						

4.11.5 Buca di potenziale finita

Per una buca di potenziale finita

$$U(r) = -U_o \quad per\ r < \rho \qquad\qquad U(r) = 0 \quad per\ r > \rho$$

l'equazione radiale è

$$r < \rho \qquad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k_i^2\right) R = 0 \qquad \hbar k_i = [2m(E+U_o)]^{1/2}$$

$$r > \rho \qquad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2\right) R = 0 \qquad \hbar k = (2mE)^{1/2}$$

La soluzione per $r < \rho$ che soddisfa la condizione $\lim_{r\to 0} rR(r) = 0$ è del tipo $R_l(r) = A_i j_l(k_i r)$, e la soluzione per $r > \rho$ è del tipo $R_l(r) = A j_l(kr) + B n_l(kr)$ con i coefficienti A e B reali. La condizione di continuità della soluzione e della derivata per $r = \rho$ definisce i valori dei coefficienti

$$A_i\ j_l(k_i\rho) = A\ j_l(k\rho) + B\ n_l(k\rho)$$

$$k_i\ A_i\ \left(\frac{dj_l}{dx}\right)_{k_i\rho} = k\ A\ \left(\frac{dj_l}{dx}\right)_{k\rho} + k\ B\ \left(\frac{dn_l}{dx}\right)_{k\rho}$$

Si ottengono delle equazioni trascendentali che vanno risolte numericamente.

Nel caso di *stati legati*, $-U_o < E < 0$, la soluzione per $r > \rho$ è di tipo esponenziale: contiene le potenze delle funzioni e^{-kr}, e^{+kr}, e solo le prime soddisfano l'andamento asintotico per $r \to \infty$.

Nel caso $E > 0$, *scattering*, l'andamento asintotico è

$$\lim_{kr\gg l} R_l(r) = A\ \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr} + B\ \frac{\cos(kr - l\pi/2)}{kr} =$$

$$= \frac{iA}{2kr}\left(-\ (-i)^l\ e^{ikr} +\ i^l e^{-ikr}\right) + \frac{B}{2kr}\left((-i)^l\ e^{ikr} + i\ i^l e^{-ikr}\right) =$$

$$= \frac{i(A-iB)}{2kr}\ i^l \left(e^{-ikr} - (-1)^l\ \frac{A+iB}{A-iB}\ e^{ikr} \right)$$

Osserviamo che

- per $B = 0$ ($\rho \to \infty$) la funzione radiale ha solo la componente $j_l(kr)$ e la soluzione asintotica è un'onda piana,
- il rapporto tra l'ampiezza dell'onda sferica uscente dal centro del potenziale e quella dell'onda sferica entrante ha modulo unitario e si può scrivere come un fattore di fase che dipende dal valore di l

$$\left| \frac{A+iB}{A-iB} \right| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{A+iB}{A-iB} = e^{2i\delta_l} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{B}{A} = \tan \delta_l$$

- l'onda sferica uscente risulta sfasata di $2\delta_l$ rispetto a quella entrante,
- l'andamento asintotico della soluzione è

$$\lim_{kr \gg l} R_l(kr) = \frac{\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)}{kr}$$

4.11.6 Potenziale armonico

Per un oscillatore armonico isotropo la costante di richiamo non dipende dalla direzione e possiamo esprimere la hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{k\vec{r}^2}{2} = H_x + H_y + H_z \qquad\qquad H_j = \frac{p_j^2}{2m} + \frac{kr_j^2}{2}$$

Ciascun operatore H_j ha autostati di un oscillatore armonico unidimensionale (appendice 4.9) e questi sono tra loro indipendenti. Definiamo gli operatori di creazione e distruzione dei modi di vibrazione unidimensionali

$$a_j = X_j + iP_j \qquad\qquad a_j^+ = X_j - iP_j \qquad\qquad [a_j^+, a_k] = \delta_{jk}$$

$$N_j = a_j^+ a_j \qquad\qquad N_j|n_j\rangle = n_j|n_j\rangle \qquad\qquad H_j = N_j + \frac{1}{2}$$

Con gli autostati $|n_j\rangle$ dei modi di vibrazione unidimensionali possiamo costruire gli autostati dell'oscillatore nello spazio che hanno autovalori

$$N|n_x\ n_y\ n_z\rangle = n|n_x\ n_y\ n_z\rangle \qquad\qquad n = n_x + n_y + n_z$$

$$H|n_x\ n_y\ n_z\rangle = E_n|n_x\ n_y\ n_z\rangle \qquad\qquad E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

Gli autovalori E_n dipendono solo dal numero quantico n e hanno degenerazione

$$\frac{(n+2)!}{n!\ 2!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

L'operatore momento angolare commuta con la hamiltoniana e ha gli stessi autostati con autovalori

$$L^2|n_x\ n_y\ n_z\rangle = \hbar^2 l(l+1)|n_x\ n_y\ n_z\rangle \qquad L_z|n_x\ n_y\ n_z\rangle = \hbar m|n_x\ n_y\ n_z\rangle$$

Le componenti del momento angolare si possono esprimere in funzione degli operatori a_j, a_j^+

$$L_z = yp_x - xp_y = 2\hbar\left(\frac{a_x + a_x^+}{2}\frac{a_y - a_y^+}{2i} - \frac{a_y + a_y^+}{2}\frac{a_x - a_x^+}{2i}\right) == i\hbar(a_x a_y^+ - a_y a_x^+)$$

$$L_x = i\hbar(a_y a_z^+ - a_z a_y^+) \qquad L_y = i\hbar(a_z a_x^+ - a_x a_z^+)$$

Avendo scelto la componente L_z diagonale conviene usare come coordinate nel piano x-y le combinazioni $x \pm iy$ e definire gli operatori di creazione e distruzione dei modi di rotazione

$$a_+ = \frac{a_x - ia_y}{\sqrt{2}} \qquad a_+^+ = \frac{a_x^+ + ia_y^+}{\sqrt{2}} \qquad N_+ = a_+^+ a_+$$

$$a_- = \frac{a_x + ia_y}{\sqrt{2}} \qquad a_-^+ = \frac{a_x^+ - ia_y^+}{\sqrt{2}} \qquad N_- = a_-^+ a_-$$

Gli operatori N_+ e N_- commutano con la hamiltoniana e hanno gli stessi autostati $N_+|n_x\ n_y\ n_z\rangle = n_+|n_x\ n_y\ n_z\rangle$, $N_-|n_x\ n_y\ n_z\rangle = n_-|n_x\ n_y\ n_z\rangle$

$$N_+ = \frac{(a_x^+ + ia_y^+)(a_x - ia_y)}{2} = \frac{1}{2}\left(a_x^+ a_x + i(a_x a_y^+ - a_y a_x^+) + a_y^+ a_y\right)$$

$$N_- = \frac{(a_x^+ - ia_y^+)(a_x + ia_y)}{2} = \frac{1}{2}\left(a_x^+ a_x - i(a_x a_y^+ - a_y a_x^+) + a_y^+ a_y\right)$$

ovvero

$$N_+ = \frac{1}{2}\left(N_x + N_y + L_z/\hbar\right) \qquad N_- = \frac{1}{2}\left(N_x + N_y - L_z/\hbar\right)$$

$$N_+ + N_- = N_x + N_y = N - N_z \qquad N_+ - N_- = L_z/\hbar$$

e otteniamo le relazioni tra gli autovalori $n_+ + n_- = n - n_z \quad n_+ + n_- = m$ da cui osserviamo che i valori minimo e massimo di m corrispondono a $-n$ e $+n$.

Per stabilire la corrispondenza tra gli autostati $|n_x\ n_y\ n_z\rangle$ e gli autostati $|n\ l\ m\rangle$ osserviamo che gli operatori a_j e a_j^+ si invertono per trasformazione di parità e quindi cambiano la parità degli stati. Per lo *stato vuoto* $|0\ 0\ 0\rangle$ abbiamo $n = l = m = 0$ e parità positiva. Gli stati con $n = 1$, $|n_x\ n_y\ n_z\rangle = |0\ 0\ 1\rangle$, $|0\ 1\ 0\rangle$, $|1\ 0\ 0\rangle$, hanno parità negativa, etc. Poiché la parità di uno stato è $(-1)^l$, gli autovalori di l sono pari per $n = pari$ e dispari per $n = dispari$ e assumono i valori positivi

$$l = \ldots(n-4),\ (n-2),\ n$$

con degenerazione $2l + 1$. Gli autovalori dei primi stati sono elencati nella tabella

n	n_x	n_y	n_z	n_+	n_-	m	l	*stato*	$2l+1$	$\sum 2(2l+1)$	E
0	0	0	0	0	0	0	0	$1s$	1	2	$3\hbar\omega/2$
1	0	0	1	0	0	0	1	$1p$	3	8	$5\hbar\omega/2$
	0	1	0	0	1	-1	1				
	1	0	0	1	0	+1	1				
2	0	0	2	0	0	0	0	$2s$	1	10	$7\hbar\omega/2$
	0	2	0	0	2	-2	2	$1d$	5	20	
	2	0	0	2	0	+2	2				
	1	1	0	1	1	0	2				
	1	0	1	0	1	-1	2				
	0	1	1	1	0	+1	2				
3	0	0	3	0	0	0	1	$2p$	3	26	$9\hbar\omega/2$
	0	3	0	1	2	-1	1				
	3	0	0	2	1	+1	1				
	1	1	1	1	1	0	3	$1f$	7	40	
	0	1	2	0	1	-1	3				
	0	2	1	0	2	-2	3				
	1	0	2	1	0	+1	3				
	2	0	1	2	0	+2	3				
	1	2	0	0	3	-3	3				
	2	1	0	3	0	+3	3				

4.11.7 Potenziale coulombiano

L'energia potenziale di una particella di carica elettrica $-e$ nel campo prodotto da una carica puntiforme di carica Ze è

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o\, r} = -\frac{Z\alpha\hbar c}{r}$$

L'equazione radiale è

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dr} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right] - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{Z\alpha\hbar c}{r}\right) R_{El} = E\; R_{El}$$

Consideriamo gli stati legati, $E < 0$. Nel modello atomico di Bohr, il raggio dell'orbita e l'energia dello stato fondamentale sono

$$r_o = \frac{a_o}{Z} = \frac{1}{Z}\,\frac{\hbar c}{\alpha m c^2} \qquad\qquad E_o = Z^2 E_{Ry} = -Z^2\frac{\alpha^2 m c^2}{2}$$

Con le variabili adimensionali

$$\nu = \left(\frac{E_o}{E}\right)^{1/2} \qquad\qquad x = \frac{(2m|E|)^{1/2}}{\hbar}\; 2r = \frac{Z}{\nu}\frac{2r}{a_o}$$

l'equazione radiale diventa

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx} - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{\nu}{x} - \frac{1}{4}\right) R = 0$$

Consideriamo il comportamento della soluzione per $x \to 0$ e per $x \to \infty$

- Per $x \to \infty$
$$\frac{d^2R}{dx^2} - \frac{R}{4} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} R(x) = e^{-x/2}$$
Ponendo $R(x) = e^{-x/2}\ S(x)$
$$R' = (S' - S/2)\ e^{-x/2} \qquad R'' = (S'' - S' + S/4)\ e^{-x/2}$$
la funzione $S(x)$ soddisfa l'equazione
$$S'' + \left(\frac{2}{x} - 1\right) S' - \left(\frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{\nu - 1}{x}\right) S = 0$$

- Per $x \to 0$ la funzione ha andamento $S(x) = x^l T(x)$ con $\lim_{x\to 0} T(x) =$ *costante*
$$S' = x^l T' + l x^{l-1} T \qquad S'' = x^l T'' + 2l x^{l-1} T' + l(l-1) x^{l-2} T$$
la funzione $T(x)$ soddisfa l'equazione
$$x\ T'' + (2(l+1) - x)\ T' + (\nu - l - 1)\ T = 0$$

L'andamento per $x \to 0$ della funzione è soddisfatto da un polinomio $T(x) = \sum_k a_k x^k$ con
$$T' = \sum_k k a_k x^{k-1} \qquad T'' = \sum_k k(k-1) a_k x^{k-2}$$
e i coefficienti a_k soddisfano l'equazione
$$\sum_k \left[k((k-1) + 2(l+1))\ a_k\ x^{k-2} + (\nu - l - 1 - k)\ a_k\ x^{k-1}\right] = 0$$
ovvero
$$\sum_k \left[(k+1)(k + 2(l+1))\ a_{k+1} + (\nu - l - 1 - k)\ a_k\right] x^{k-1} = 0$$
Perché l'equazione sia soddisfatta i termini si devono annullare a ciascun ordine e otteniamo la relazione
$$a_{k+1} = a_k\ \frac{k + l + 1 - \nu}{(k+1)(k + 2l + 2}$$
Perché la serie sia finita deve esistere un valore di k per cui $a_{k+1} = 0$, cioè $k = \nu - l - 1$. Quindi otteniamo le condizioni sul parametro ν

- ν è un numero intero;
- $\nu \geq l + 1$.

ν è il *numero quantico principale* n: $n = \nu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Gli autovalori di energia dipendono solo dal numero quantico principale

$$E_n = \frac{E_o}{n^2} = -\frac{Z^2}{n^2}\frac{\alpha^2 mc^2}{2}$$

Gli autostati sono degeneri con molteplicità $2l+1$; $2(2l+1)$ se consideriamo particelle con spin 1/2. La tabella mostra gli stati e la loro molteplicità per valori crescenti di energia come sono effetivamente osservati. La degenerazione degli stati è rimossa dall'interazione tra lo spin e il momento angolare orbitale e gli autovalori di energia sono leggermente modificati (struttura fine). L'ultima colonna riporta il simbolo dell'elemento con $Z = \sum 2(2l+1)$.

n	l	*stato*	E/E_o	$2l+1$	$\sum 2(2l+1)$	
1	0	1s	1	1	2	**He**
2	0	2s	1/4	1	4	Be
2	1	2p	1/4	3	10	**Ne**
3	0	3s	1/9	1	12	Mg
3	1	3p	1/9	3	18	**Ar**
4	0	4s	1/16	1	20	Ca
3	2	3d	1/9	5	30	Zn
4	1	4p	1/16	3	36	**Kr**
5	0	5s	1/25	1	38	Sr
4	2	4d	1/16	5	48	Cd
5	1	5p	1/16	3	54	**Xe**
$\ldots$						

I polinomi $T(x)$ che soddisfano le relazioni dei coefficienti a_k sono i *polinomi di Laguerre*, $L_p^q(x)$

$$L_p^0(x) = e^x\ \frac{d^p}{dx^p}\ x^p e^{-x} \qquad\qquad L_p^q(x) = (-1)^q\ \frac{d^q}{dx^q}\ L_{p+q}^0(x)$$

che sono le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\left(x\ \frac{d^2}{dx^2} + (1+q-x)\ \frac{d}{dx} + p\right) L_p^q(x) = 0$$

e che hanno le relazioni di ortonormalità

$$\int_o^\infty e^{-x}\ x^q\ L_{p'}^q(x)\ L_p^q(x)\ dx = \frac{[(p+q)!]^3}{p!}\ \delta_{p'p}$$

$L_0^0 = 1$ $\quad L_1^0 = 1 - x$ $\quad L_2^0 = 2 - 4x + x^2$ $\quad L_3^0 = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$
$L_0^1 = 1$ $\quad L_1^1 = 4 - 2x$ $\quad L_2^1 = 18 - 18x + 3x^2$ $\quad L_3^1 = 96 - 144x + 48x^2 - 4x^3$
$L_0^2 = 2$ $\quad L_1^2 = 18 - 6x$ $\quad L_2^2 = 144 - 96x + 12x^2$ $\quad L_3^2 = 1200 - 1200x + 600x^2 - 20x^3$
$L_0^3 = 6$ $\quad L_1^3 = 96 - 24x$ $\quad L_2^3 = 1200 - 600x + 60x^2$
$L_0^4 = 24$ $\quad L_1^4 = 600 - 120x$

$L_0^5 = 120$
Le autofunzioni radiali contengono i polinomi $L_p^p(x)$ con $q = 2l + 1$, $p = n - l - 1$

$$R_{nl}(x) = N_{nl}\ e^{-x/2}\ x^l\ L_{n-l-1}^{2l+1}(x)$$

e i fattori N_{nl} sono definiti dalla condizione di normalizzazione $\int\ [R_{nl}(r)]^2\ r^2\ dr = 1$

$$N_{nl} = \left(\frac{2Z}{na_o}\right)^{3/2} \left(\frac{(n-l-1)!}{2n\ [(n+l)!]^3}\right)^{1/2}$$

Le prime autofunzioni radiali sono

$$R_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2Z}{a_o}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_o}$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{Z}{a_o}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{Zr}{a_o}\right) e^{-Zr/2a_o}$$

$$R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(\frac{Z}{a_o}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a_o}\ e^{-Zr/2a_o}$$

$$R_{30} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2Z}{3a_o}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{2}{3}\frac{Zr}{a_o} + \frac{2}{27}\left(\frac{Zr}{a_o}\right)^2\right) e^{-Zr/3a_o}$$

$$R_{31} = \frac{2}{9} \left(\frac{2Z}{3a_o}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a_o} \left(1 - \frac{1}{6}\frac{Zr}{a_o}\right) e^{-Zr/3a_o}$$

$$R_{32} = \frac{1}{27\sqrt{5}} \left(\frac{2Z}{3a_o}\right)^{3/2} \left(\frac{Zr}{a_o}\right)^2 e^{-Zr/3a_o}$$

Le autofunzioni del potenziale coulombiano sono

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = N_{nl}\ e^{-Zr/na_o} \left(\frac{2Zr}{na_o}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}(2Zr/na_o)\ Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Solo le autofunzioni con $l = 0$ hanno un valore non nullo nella regione del nucleo $r \simeq 0$.

4.12 Simmetrie unitarie

Le simmetrie unitarie sono una generalizzazione delle rotazioni (appendice 4.10). Consideriamo la spazio vettoriale complesso a n dimensioni, e in questo spazio n vettori linearmente indipendenti $|\psi_n\rangle$ che formano una base. Il generico vettore $|\psi\rangle$ si può esprimere come combinazione dei vettori di base con a_n numeri complessi

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n\ |\psi_n\rangle$$

Consideriamo una trasformazione tra due stati, $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$, che conservi la densità di probabilità. Questa trasformazione è *unitaria*

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^+U|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad U^+U = 1$$

Nello spazio a n dimensioni l'operatore U si può rappresentare come una matrice quadrata unitaria $n \times n$. Il determinante della matrice ha modulo *uno*

$$det[U^+U] = 1 = det[U^+]\ det[U] = (det[U])^*\ det[U] = |\ det[U]\ |^2$$

e quindi si può esprimere $det[U] = e^{i\alpha}$ con α numero reale.

L'insieme delle matrici unitarie $n \times n$ formano un *gruppo*, soddisfano cioè le seguenti condizioni

- il prodotto di due matrici unitarie, U_1U_2, è una matrice unitaria, cioè appartiene al gruppo
$$(U_1U_2)^+\,(U_1U_2) = U_2^+U_1^+U_1U_2 = 1$$
- la matrice identità appartiene al gruppo
- la matrice inversa U^{-1} di una matrice unitaria appartiene al gruppo
- le matrici del gruppo soddisfano la proprietà associativa
$$U_1\,(U_2U_3) = (U_1U_2)\,U_3$$

Il gruppo delle trasformazioni unitarie nello spazio a n dimensioni è il *gruppo unitario U(n)*. Se un sistema è invariante per le trasformazioni del gruppo $U(n)$ la hamiltoniana che descrive il sistema è invariante per le trasformazioni

$$H \to H' \qquad\qquad H' = UHU^+$$

Consideriamo la trasformazione $U = e^{i\phi}U_s$, con ϕ numero reale, tale che U_s sia una *trasformazione unimodulare* cioè con $det[U_s] = +1$. Se la hamiltoniana è invariante per la trasformazione $e^{i\phi}He^{-i\phi}$, che corrisponde alla conservazione di un numero quantico additivo (ad esempio la carica elettrica oppure il numero barionico), allora possiamo considerare invece delle trasformazioni U le corrispondenti trasformazioni unimodulari U_s. Il gruppo delle trasformazioni unitarie unimodulari nello spazio a n dimensioni è il *gruppo speciale unitario SU(n)*.

Le trasformazioni del gruppo $SU(n)$ si possono scrivere

$$U = e^{i\ \sum_k \alpha_k\ G_k}$$

con α_k numeri reali e G_k operatori hermitiani detti *generatori della trasformazione*. Nello spazio a n dimensioni i generatori si possono rappresentare come matrici $n \times n$ che hanno le seguenti proprietà

- il numero di generatori, l'*ordine del gruppo di simmetria*, è $n^2 - 1$

- tra questi ci sono $r = n - 1$ generatori che commutano e che si possono rappresentare con matrici $n \times n$ diagonali, r è chiamato il *rango del gruppo di simmetria*

- i generatori sono rappresentati da matrici $n \times n$ a *traccia nulla*

$$det\left[e^{i\ \sum_k \alpha_k\ G_k}\right] = \prod_k det\left[e^{i\alpha_k G_k}\right] = 1 \qquad \Rightarrow \qquad det\left[e^{i\alpha_k G_k}\right] = e^{i\alpha_k\ Tr[G_k]} = 1$$

- il commutatore di due generatori è anch'esso, a parte un fattore, un generatore della simmetria e le proprietà del gruppo di simmetria sono definite dalle relazioni di commutazione tra generatori

$$[G_j, G_k] = g_{jkl}\ G_l$$

con i parametri g_{jkl} detti *costanti di struttura del gruppo di simmetria* che soddisfano le relazioni

$$g_{kjl} = -g_{jkl}$$

$$\sum_l (g_{jkl}\ g_{lmn} + g_{kml}\ g_{ljn} + g_{mjl}\ g_{lkn}) = 0$$

La seconda relazione è conseguenza della identità di Jacobi che si ottiene ruotando su tre indici

$$[[G_j, G_k], G_m] + [[G_k, G_m], G_j] + [[G_m, G_j], G_k] \equiv 0$$

tenendo conto delle relazioni di commutazione e del fatto che i generatori sono linearmente indipendenti

$$[[G_j, G_k], G_m] = \sum_l g_{jkl}\ [G_l, G_m] = \sum_l g_{jkl}\ g_{lmn}\ G_n$$

$$\sum_l (g_{jkl}\ g_{lmp}\ G_p + g_{kml}\ g_{ljq}\ G_q + g_{mjl}\ g_{lkr}\ G_r) = 0$$

4.12.1 SU(2)

Nello spazio vettoriale a due dimensioni in cui scegliamo come vettori di base $u = |up\rangle$, $d = |down\rangle$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ci sono $2^2 - 1 = 3$ generatori e il rango del gruppo di simmetria è $r = 2 - 1 = 1$, cioè uno dei generatori è diagonale. Nella rappresentazione con G_3 diagonale i generatori sono le *matrici di Pauli*

$$G_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad G_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che soddisfano le relazioni di commutazione $[G_j, G_k] = i\,\epsilon_{jkl}\,G_l$, dove ϵ_{jkl} è il tensore completamente antisimmetrico

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1 \qquad \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$$

I generatori G_1, G_2, G_3, costituiscono la *rappresentazione fondamentale* di $SU(2)$ in due dimensioni cioè del gruppo di rotazioni di isospin 1/2. Esiste un generatore diagonale, G_3, che rappresenta una componente dell'isospin, oltre al modulo quadro dell'isospin che è proporzionale alla matrice identità 2×2, $\sum_k G_k^2 = (3/4)\,\mathbf{I}$.

Analogamente, nella rappresentazione in più dimensioni. Ad esempio, in tre dimensioni $SU(2)$ è il gruppo di rotazioni di isospin 1. Le tre matrici 3×3 che soddisfano le relazioni di commutazione sono (appendice 4.12)

$$G_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esiste un generatore diagonale, G_3, oltre al modulo quadro dell'isospin, $\sum_k G_k^2 = 2\,\mathbf{I}$, proporzionale alla matrice identità 3×3.

Gli autostati si ottengono come combinazione di due stati di isospin 1/2 utilizzando i coefficienti di Clebsch-Gordan (appendice 4.10). Ci sono quattro possibili combinazioni e si ottengono quattro autostati, un tripletto di isospin 1, simmetrico rispetto allo scambio $u \leftrightarrow d$,

$$|1, +1\rangle = uu \qquad |1, 0\rangle = \frac{ud + du}{\sqrt{2}} \qquad |1, -1\rangle = dd$$

e un singoletto, antisimmetrico

$$|0, 0\rangle = \frac{ud - du}{\sqrt{2}}$$

La decomposizione in multipletti costituisce la *rappresentazione non riducibile* di $SU(2)$ che si esprime in modo simbolico $\mathbf{2} \bigotimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \bigoplus \mathbf{1}$ e si rappresenta in modo grafico come illustrato in Fig.4.17 : si sovrappone il primo doppietto $g_3 = \pm 1/2$ al secondo sfalsato rispettivamente di -1 e +1.

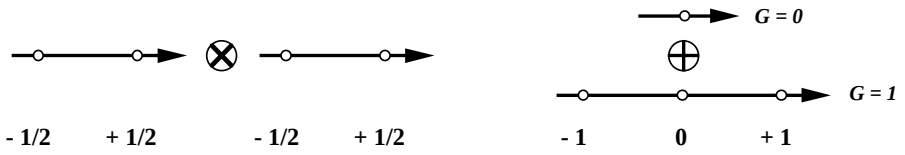


Figure 4.17: Costruzione grafica della combinazione di due isospin 1/2

4.12.2 SU(3)

Nello spazio vettoriale a tre dimensioni in cui scegliamo come vettori di base

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ci sono $3^2 - 1 = 8$ generatori. Il rango del gruppo di simmetria è $r = 3 - 1 = 2$ e quindi ci sono due generatori diagonali. Nella rappresentazione in cui G_3 e G_8 sono diagonali i generatori sono le *matrici di Gell-Mann*

$$G_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_7 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad G_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

I prime sette generatori sono costruiti con le matrici di Pauli e G_8 è definito delle relazioni di commutazione, $[G_j, G_k] = i\ \gamma_{jkl}\ G_l$. Le costanti di struttura di $SU(3)$ sono

$$\gamma_{123} = 1 \qquad \gamma_{147} = \gamma_{165} = \gamma_{246} = \gamma_{257} = \gamma_{345} = \gamma_{376} = 1/2 \qquad \gamma_{458} = \gamma_{678} = \sqrt{3}/2$$

La somma dei quadrati dei generatori è proporzionale alla matrice identità 3×3, $\sum_k G_k^2 = (4/3)\ \mathbf{I}$. Gli autovalori dei generatori diagonali sono

$$g_3 = \left(+\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ 0\right) \qquad g_8 = \left(+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ;\ +\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

4.12.3 Stati coniugati

Supponiamo che la trasformazione di coniugazione C, $C|\psi\rangle = |\psi\rangle^*$, commuti con la hamiltoniana che descrive il sistema di modo che gli stati $|\psi\rangle^*$ siano anch'essi stati del sistema. Se U è una trasformazione unitaria unimodulare con generatori G_k, i generatori della trasformazione U^* sono gli operatori $\bar{G}_k = -G_k^*$

$$|\psi'\rangle^* = U^*|\psi\rangle^* \qquad U^* = e^{-i\ \sum_k \alpha_k^* G_k^*} = e^{i\ \sum_k \alpha_k \left(-G_k^*\right)} = e^{i\ \sum_k \alpha_k \bar{G}_k}$$

Se rappresentiamo i generatori con matrici hermitiane $n \times n$, G_k^* sono le matrici trasposte

$$\bar{G}_k^{\ \mu\nu} = -G_k^{*\ \mu\nu} = -G_k^{\ \nu\mu}$$

e per i generatori diagonali si ha $\bar{G}_k = -G_k$. Quindi gli autovalori degli stati coniugati sono uguali a quelli degli stati di partenza con il segno cambiato.

Nel caso di $SU(2)$ è semplice trovare una trasformazione per passare dalla rappresentazione **2** alla rappresentazione $\bar{\mathbf{2}}$: questa è una rotazione di π nello spazio dell'isospin. Per una rotazione si ha

$$R(\theta) = e^{-i\theta G_2} = \sum_n \frac{(-i\theta)^n}{n!}\, G_2^n = \cos\theta/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \sin\theta/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_\pi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_\pi^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

I generatori della simmetria degli stati coniugati, $\bar{G}_k = R_\pi G_k R_\pi^+$, sono $\bar{G}_1 = -G_1$, $\bar{G}_2 = G_2$, $\bar{G}_3 = -G_3$ e gli autostati sono

$$\bar{u} = R_\pi u = d \qquad \bar{d} = R_\pi d = -u$$

che hanno autovalori di G_3: $g_3(\bar{u}) = -1/2$, $g_3(\bar{d}) = +1/2$.

Combinando un doppietto di **2** con uno di $\bar{\mathbf{2}}$ si ottiene di nuovo un tripletto, ora antisimmetrico, e un singoletto simmetrico, $\mathbf{2} \bigotimes \bar{\mathbf{2}} = \mathbf{3} \bigoplus \mathbf{1}$

$$|1,+1\rangle = -u\bar{d} \qquad |1,0\rangle = \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} \qquad |1,-1\rangle = d\bar{u}$$

$$|0,0\rangle = \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}}$$

Nel caso di $SU(3)$ non esiste una semplice trasformazione $G_k \to \bar{G}_k$. I generatori della simmetria degli stati coniugati sono $\bar{G}_1 = -G_1$, $\bar{G}_2 = G_2$, $\bar{G}_3 = -G_3$, $\bar{G}_4 = -G_4$, $\bar{G}_5 = G_5$, $\bar{G}_6 = -G_6$, $\bar{G}_7 = G_7$, $\bar{G}_8 = -G_8$. Gli autovalori dei generatori diagonali G_3 e G_8 corrispondenti agli autostati ($\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$) sono rispettivamente

$$g_3 = \left(-\frac{1}{2}\ ;\ +\frac{1}{2}\ ;\ 0\right) \qquad g_8 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ;\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ;\ +\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

4.13 L'interazione elettromagnetica

4.13.1 Hamiltoniana di interazione

Per descrivere l'interazione tra particelle e campo elettromagnetico è opportuno usare il formalismo invariante per trasformazioni di Lorentz. L'approssimazione non relativistica è comunque adeguata per descrivere gran parte dei fenomeni in fisica atomica e fisica nucleare.

Il principio di minima azione richiede che le equazioni che descrivono l'evoluzione del sistema nel tempo si ottengono minimizzando l'integrale $\int_{\Delta t} L dt$. Il principio di relatività richiede che questo avvenga in ogni riferimento inerziale. L'intervallo di

tempo proprio, $dt_o = dt/\gamma$, è invariante. Quindi una lagrangiana espressa in termini di invarianti e proporzionale a γ^{-1} assicura che sia rispettato il principio di relatività.

La lagrangiana funzione della massa, velocità, carica della particella e del campo elettromagnetico si può esprimere

$$L(m, x_j, \dot{x}_j) = -\frac{mc^2 + q\ U \cdot A}{\gamma} \qquad U = (\gamma\vec{v}, \gamma c) \qquad A = (\vec{A}, V/c)$$

Le componenti del momento coniugato sono

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{mc^2}{\gamma} - q\vec{v}\cdot\vec{A} + qV\right) = m\gamma v_i + qA_i$$

La hamiltoniana è

$$H = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = mc^2/\gamma + \vec{p}\cdot(\vec{p} - q\vec{A}) + qV$$

La velocità in funzione del momento coniugato è

$$(m\gamma\vec{v})^2 = (\vec{p} - q\vec{A})^2 \qquad (m\gamma c)^2 = (mc)^2 + (\vec{p} - q\vec{A})^2$$

$$\vec{v} = c\ \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{\sqrt{(mc)^2 + (\vec{p} - q\vec{A})^2}} \qquad \gamma = \frac{\sqrt{(mc)^2 + (\vec{p} - q\vec{A})^2}}{mc}$$

Sostituendo i valori di γ e v si ottiene la hamiltoniana

$$H = c\sqrt{(mc)^2 + (\vec{p} - q\vec{A})^2} + qV$$

Se H_ℓ e $\vec{p}_\ell$ sono la hamiltoniana e l'impulso della particella libera, la hamiltoniana della particella in interazione col campo elettromagnetico si ottiene con la trasformazione

$$\vec{p}_\ell \to \vec{p} - q\vec{A} \qquad H_\ell \to H - qV$$

dove $\vec{A}$ e V sono definiti a meno di una trasformazione di gauge. In approssimazione non relativistica $p \ll mc$, $qA \ll mc$, si ha

$$H = mc^2 + \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + qV = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{q}{m}\ \vec{A}\cdot\vec{p} + qV + \frac{q^2\vec{A}^2}{2m}$$

che rappresentano l'energia di riposo, l'energia cinetica e l'energia di interazione tra una particella di massa m e carica elettrica q e il campo elettromagnetico.

4.13.2 Quantizzazione del campo

In meccanica quantistica la hamiltoniana è espressa in termini di operatori. L'operatore impulso è $-i\hbar\vec{\nabla}$. L'operatore campo elettromagnetico viene definito in termini di operatori di creazione e distruzione degli autostati che sono i modi normali di vibrazione del campo.

In assenza di cariche l'equazione del potenziale vettore è l'equazione di d'Alembert. La soluzione si può esprimere come serie di Fourier. La dipendenza dalle coordinate spaziali è definita in un volume V dalle funzioni

$$V^{-1/2}\ \hat{\epsilon}_s(\vec{k})\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

dove $\hat{\epsilon}_s(\vec{k})$ sono versori di polarizzazione ortogonali tra loro e ortogonali al vettore $\vec{k}$, $(s = 1, 2)$. I *modi normali di vibrazione* sono definiti dalle condizione

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x}\ n\ , \ldots \qquad L_xL_yL_z = V \qquad n = 0, 1, 2\ldots$$

La soluzione per il campo, a meno di un fattore di normalizzazione, è

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_s \hat{\epsilon}_s(\vec{k}) \left[a_s(\vec{k}, t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_s^*(\vec{k}, t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right]$$

L'ampiezza $a_s(\vec{k}, t)$ soddisfa l'equazione dell'oscillatore armonico

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ a_s(\vec{k}, t) + \omega_k^2\ a_s(\vec{k}, t) = 0 \qquad\qquad \omega_k = c|\vec{k}|$$

In analogia con l'oscillatore armonico quantistico consideriamo le ampiezze come operatori di creazione e distruzione dei modi normali di vibrazione del campo caratterizzati da impulso $\hbar\vec{k}$ e energia $\hbar\omega_{\vec{k}}$

$$a|n\rangle = n^{1/2}|n-1\rangle \qquad a^+|n\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1\rangle \qquad\qquad [a, a^+] = 1$$

L'*operatore campo elettromagnetico* è l'operatore vettoriale

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \mathcal{A}\ \sum_{\vec{k}} \sum_s \hat{\epsilon}_s(\vec{k}) \left[a_s(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a_s^+(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

dove $\mathcal{A}$ è un fattore di normalizzazione.

Gli autostati $|n, s, \vec{k}\rangle$ sono caratterizzati da n *fotoni* con polarizzazione $\hat{\epsilon}_s$, impulso $\hbar\vec{k}$ e energia $\hbar\omega_k = \hbar ck$. L'operatore $a_s(\vec{k})$ *assorbe* un fotone e l'operatore $a_s^+(\vec{k})$ *emette* un fotone con le regole di commutazione $[a_s(\vec{k}), a_{s'}^+(\vec{k}')] = \delta_{s,s'}\delta_{k,k'}$. Gli operatori vettoriali campo elettrico e campo magnetico sono

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \mathcal{A}\sum_{\vec{k}} \sum_s i\omega_k\ \hat{\epsilon}_s(\vec{k}) \left[a_s(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} -\ a_s^+(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \mathcal{A}\sum_{\vec{k}} \sum_s i\vec{k}\wedge\hat{\epsilon}_s(\vec{k}) \left[a_s(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} -\ a_s^+(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

I moduli quadri dei valori di aspettazione per stati di n fotoni sono

$$|\langle n|\vec{E}|n\rangle|^2 = 2n\omega^2\mathcal{A}^2 \qquad\qquad |\langle n|\vec{B}|n\rangle|^2 = 2n\vec{k}^2\mathcal{A}^2$$

Il fattore di normalizzazione è definito dal valore dell'energia del campo nel volume di normalizzazione V

$$U = \frac{V}{2}(\epsilon_o|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2/\mu_o) = nV\epsilon_o(\omega^2 + c^2\vec{k}^2)\mathcal{A}^2 = n\hbar\omega \qquad \mathcal{A} = \left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_o\omega}\right)^{1/2}$$

4.14 Legge di decadimento

La probabilità di decadimento di un sistema nell'intervallo di tempo infinitesimo dt è definita dalla *costante di decadimento*, λ, che ha le dimensioni dell'inverso di un tempo ed è una grandezza caratteristica del sistema e dell'interazione che produce il decadimento

$$dP = \lambda \; dt$$

Se si hanno N sistemi identici, se il numero N è sufficientemente grande da poterlo considerare come una variabile continua e se i decadimenti sono indipendenti, la variazione del numero N per effetto del decadimento è

$$-dN = \lambda N dt$$

Integrando l'equazione con la condizione $N(t=0) = N_o$ si ha la legge di decadimento

$$N(t) = N_o e^{-\lambda t}$$

Il numero di sistemi sopravvissuti al tempo t è caratterizzato dalla funzione di distribuzione

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad\qquad \int_0^\infty f(t) \; dt = 1$$

Il valor medio della distribuzione è la *vita media* di decadimento

$$\tau = \langle \; t \; \rangle = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} t dt = \frac{1}{\lambda}$$

Il decadimento è un fenomeno statistico casuale che non trova spiegazione nella meccanica classica deterministica. In meccanica quantistica un sistema è descritto dagli autostati definiti ad un certo istante, $t = 0$, e dalla loro evoluzione temporale. Se E_k sono gli autovalori di energia, e il sistema si trova al tempo $t = 0$ nello stato stazionario $|\psi_j\rangle$, con autovalore E_{jo}, l'autostato al tempo t

$$|\psi_j(t)\rangle = |\psi_{jo}\rangle \; e^{-iE_j t/\hbar}$$

conserva la densità di probabilità: $\langle\psi_j(t)|\psi_j(t)\rangle = \langle\psi_{jo}|\psi_{jo}\rangle$, cioè il sistema è stabile. Se il sistema è soggetto ad una interazione dipendente dal tempo descritta dalla hamiltoniana H_I l'autovalore di energia viene modificato dall'interazione

$$E_j \to E_j + \langle j|H_I|j\rangle + \sum_{k\neq j} \frac{|\langle k|H_I|j\rangle|^2}{E_k - E_j} - i\pi \sum_{k\neq j} \; |\langle k|H_I|j\rangle|^2 \; \delta(E_k - E_j) \; + \ldots$$

e lo stato non è più stazionario per effetto del fattore immaginario nell'evoluzione temporale. La grandezza

$$\Gamma_j = 2\pi \sum_{k\neq j} \; |\langle k|H_I|j\rangle|^2 \; \delta(E_k - E_j)$$

è chiamata *larghezza di decadimento*. L'evoluzione temporale dello stato diventa

$$|\psi_j(t)\rangle = |\psi_{jo}\rangle \; e^{-iE_j t/\hbar} \; e^{-\Gamma_j t/2\hbar}$$

e la densità di probabilità decresce in modo esponenziale nel tempo

$$\langle\psi_j(t)|\psi_j(t)\rangle = \langle\psi_{jo}|\psi_{jo}\rangle \; e^{-\Gamma t/\hbar}$$

La larghezza di decadimento rappresenta l'incertezza con cui è nota l'energia dello stato $|\psi_j\rangle$ non stazionario ed è legata alla vita media dello stato dalla relazione di indeterminazione

$$\Gamma \; \tau = \hbar$$

Per ottenere la funzione di distribuzione dell'energia attorno al valor medio E_j consideriamo la trasformata di Fourier dell'evoluzione temporale dello stato $|\psi_j\rangle$

$$\chi(E) = \kappa \int e^{iEt/\hbar}\psi(t)dt = \kappa \int \psi_{jo} \; e^{(i/\hbar)(E-E_j+i\Gamma/2)t} \; dt = \kappa\psi_{jo} \; \frac{\hbar/i}{E - E_j + i\Gamma/2}$$

La probabilità che il sistema abbia energia E è

$$P(E) = |\chi(E)|^2 = \kappa^2|\psi_{jo}|^2 \; \frac{\hbar^2}{(E-E_j)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

dove la costante κ è definita dalla condizione di normalizzazione $\int P(E)dE = 1$

$$P(E) = \frac{1}{\pi} \; \frac{\Gamma/2}{(E-E_j)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

Quindi uno stato instabile che ha vita media τ ha una distribuzione in energia attorno al valore E_j che è una funzione lorentziana con larghezza a metà altezza pari a Γ.

Se il sistema decade nello stato $|\psi_f\rangle$ per effetto della hamiltoniana di interazione H_I, la largezza di decadimento, al primo ordine dello sviluppo perturbativo, si calcola con la regola d'oro di Fermi (appendice 4.15)

$$\Gamma_{j\to f} = 2\pi \; |\langle\psi_f| \; H_I \; |\psi_j\rangle|^2 \; \rho(E_f)$$

Il sistema può decadere in più stati: in questo caso il decadimento $|\psi_j\rangle \to |\psi_k\rangle$ è caratterizzato dalla *larghezza parziale di decadimento* Γ_k. La *larghezza (totale)* è la somma delle larghezze parziali (la probabilità di decadimento è la somma delle probabilità dei diversi canali di decadimento) e la vita media dello stato $|\psi_j\rangle$ è

$$\frac{\hbar}{\tau} = \Gamma = \sum_k \Gamma_k$$

Il rapporto Γ_k/Γ è chiamato *frazione di decadimento* o *branching ratio*

$$BR_k = \frac{\Gamma_k}{\Gamma} \qquad\qquad \sum_k BR_k = 1$$

4.15 Probabilità di transizione

Consideriano un sistema descritto dalla hamiltoniana H_o indipendente dal tempo. L'evoluzione temporale del sistema sistema si esprime

$$|\psi_o(\vec{r},t)\rangle = \sum_n \; a_n \; |u_n(\vec{r})\rangle \; e^{-iE_nt/\hbar}$$

dove $u_n(\vec{r})$ è un insieme completo di autostati stazionari di H_o, $\langle u_m|u_n\rangle = \delta_{mn}$, con autovalori E_n. Se il sistema è soggetto ad una interazione descritta dalla hamiltoniana dipendente dal tempo $H_I(t)$, la soluzione dell'equazione del moto

$$i\hbar \; \frac{\partial}{\partial t} \; |\psi(\vec{r},t)\rangle = [H_o + H_I(t)] \;\; |\psi(\vec{r},t)\rangle$$

si può approssimare con il metodo delle perturbazioni dipendenti dal tempo. Consideriamo una soluzione sovrapposizione degli autostati della hamiltoniana imperturbata con coefficienti dipendenti dal tempo $a_n(t)$ che soddisfano la relazione di normalizzazione $\Sigma_n|a_n(t)|^2 = 1$

$$|\psi(\vec{r},t)\rangle = \sum_n \; a_n(t) \; |u_n(\vec{r})\rangle \; e^{-iE_nt/\hbar}$$

$a_m(t)$ è l'ampiezza dell'autostato $|u_m\rangle$ al tempo t. Introducendo questa soluzione nell'equazione del moto

$$i\hbar \sum_n \dot{a}_n \; |u_n\rangle \; e^{-iE_nt/\hbar} + \sum_n a_n \; |u_n\rangle \; E_n \; e^{-iE_nt/\hbar} =$$

$$= \sum_n a_n \; H_o \; |u_n\rangle \; e^{-iE_nt/\hbar} + \sum_n a_n \; H_I \; |u_n\rangle \; e^{-iE_nt/\hbar}$$

e calcolando il prodotto scalare tra due stati

$$i\hbar \;\; \sum_n \dot{a}_n \; \langle u_m|u_n\rangle e^{-iE_nt/\hbar} = \sum_n a_n \; \langle u_m| \; H_I \; |u_n\rangle \; e^{-iE_nt/\hbar}$$

si ottiene l'equazione che descrive l'evoluzione dei coefficienti $a_m(t)$

$$i\hbar\dot{a}_m(t) = \sum_n a_n(t) \; \langle u_m| \; H_I \; |u_n\rangle \; e^{i(E_m-E_n)t/\hbar}$$

Supponiamo che la hamiltoniana di interazione sia *spenta* per $t < 0$, che all'istante $t = 0$ il sistema si trovi nell'autostato $|u_j\rangle$, $a_n(0) = \delta_{jn}$, e che per $t > 0$ l'azione della hamiltoniana $H_I(t)$ possa considerarsi come una *perturbazione*, cioè che per gli elementi di matrice si possa approssimare

$$H_I^{nm}(t) = \langle u_n|H_I(t)|u_m\rangle \;\; \ll \;\; \langle u_n|H_o|u_m\rangle$$

in un intervallo di tempo Δt sufficiente a permettere al sistema di evolvere nello stato finale considerato. Sviluppando in serie i coefficienti $a_n(t)$ per $n \neq j$

$$a_n(t) = a_n(0) + \dot{a}_n(0) \; t + \ldots = a_n(0) - \frac{i}{\hbar} \sum_k a_k(0) \; H_I^{kn} \; t + \ldots$$

le ampiezze soddisfano l'equazione differenziale

$$i\hbar \dot{a}_m(t) = \sum_n \left[a_n(0) - \frac{i}{\hbar} \sum_k a_k(0)\ H_I^{kn}\ t + \ldots \right]\ H_I^{nm}\ e^{i\omega_{nm}t} =$$

$$= \sum_n a_n(0)\ H_I^{nm}\ e^{i\omega_{nm}t} - \frac{i}{\hbar} \sum_{nk} a_k(0)\ H_I^{kn}\ H_I^{nm}\ e^{i\omega_{nm}t}\ t + \ldots =$$

$$= \sum_n \delta_{jn}\ H_I^{nm}\ e^{i\omega_{nm}t} - \frac{i}{\hbar} \sum_{nk} \delta_{jk}\ H_I^{kn}\ H_I^{nm}\ e^{i\omega_{nm}t}\ t + \ldots =$$

$$= H_I^{jm}\ e^{i\omega_{jm}t} - \frac{i}{\hbar} \sum_n H_I^{jn}\ H_I^{nm}\ e^{i\omega_{nm}t}\ t + \ldots$$

che ha la soluzione approssimata

$$a_m(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_o^t H_I^{jm}\ e^{i\omega_{jm}t'} dt' + \frac{1}{\hbar^2} \int_o^t \sum_n H_I^{jn}\ H_I^{nm}\ e^{i\omega_{nm}t'} t'\ dt' + \ldots$$

Il primo termine dello sviluppo in serie è

$$a_m(t) = -\frac{H_I^{jm}}{\hbar\omega_{jm}}\ (1 - e^{i\omega_{jm}t}) = \frac{H_I^{jm}}{\hbar\omega_{jm}}\ 2i\ e^{i\omega_{jm}t/2} \sin \omega_{jm} t/2$$

dove H_I^{jm} è il valor medio dell'elemento di matrice nell'intervallo di tempo $0 \div t$. La probabilità di trovare il sistema nello stato $|u_m\rangle$ al tempo t è

$$P_{j\to m}(t) = |a_m(t)|^2 = 4\ |H_I^{jm}|^2\ \frac{\sin^2(E_m - E_j)t/2\hbar}{(E_m - E_j)^2}$$

La probabilità di transizione dallo stato iniziale $|u_i\rangle$ ad un qualunque stato finale $|u_f\rangle$ si ottiene sommando sugli stati finali accessibile al sistema

$$P_{i\to f}(t) = 4 \sum_f\ |H_I^{if}|^2\ \frac{\sin^2(E_f - E_i)t/2\hbar}{(E_f - E_i)^2}$$

Se si ha una *distribuzione continua* di stati con *densità di energia* $\rho(E_f) = dn/dE_f$, la somma diventa un integrale sull'energia dello stato finale E_f

$$P_{i\to f}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \int |H_I^{if}|^2\ \frac{\sin^2(E_f - E_i)t/2\hbar}{[(E_f - E_i)/2\hbar]^2}\ \rho(E_f)\ dE_f$$

La funzione $\sin^2 \omega t/\omega^2$ è oscillante con valori rapidamente decrescenti, cioè il contributo all'integrale è limitato ad un intervallo di energia attorno a E_i in cui $\Delta E\ t \approx 2\pi\hbar$. Se facciamo una osservazione del sistema dopo un tempo $t \gg 2\pi\hbar/\Delta E \approx (4\ 10^{-15}\ eV/\Delta E)$ *secondi*, otteniamo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\pi}\ \frac{\sin^2 \omega t}{\omega^2} = t\ \delta(\omega)$$

$$P_{i\to f}(t) \approx \frac{2\pi}{\hbar}\ t \int |H_I^{if}|^2\ \delta(E_f - E_i)\ \rho(E_f)\ dE_f$$

La *probabilità di transizione nell'unità di tempo* dallo stato iniziale $|i\rangle$ allo stato finale $|f\rangle$, calcolalata al primo ordine dello sviluppo perturbativo in meccanica quantistica non relativistica è data dalla relazione

$$\dot{P}_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}\ |\langle f|H_I|i\rangle|^2 \rho(E_f)$$

nota comunemente come *regola d'oro di Fermi*.

4.16 Densità dello spazio delle fasi

Nell'appendice 4.15 abbiamo derivato la probabilità di transizione nell'unità di tempo che dipende dal numero di stati finali per intervallo unitario di energia. Il numero di stati di un sistema è definito nello *spazio delle fasi* delle variabili coniugate $(\vec{r}, \vec{p})$. Il principio di indeterminazione stabilisce la condizione per cui si possano definire simultaneamente due variabili coniugate

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

per cui il numero di stati di un sistema in una dimensione è il rapporto tra il *volume dello spazio delle fasi* accessibile al sistema e la dimensione della *cella elementare*

$$\int \frac{dx dp_x}{\Delta x \Delta p_x}$$

Per definire il fattore $\Delta x \Delta p_x$ consideriamo il moto di una particella in una dimensione e le autofunzioni normalizzate su una distanza L

$$\psi_n(x) = \frac{1}{L^{1/2}}\ e^{ip_n x/\hbar}$$

La condizione al contorno

$$\psi_n(x) = \psi_n(x+L) \qquad \Rightarrow \qquad p_n = (2\pi\hbar/L)n$$

definisce gli autovalori degli stati stazionari e il numero di stati per intervallo unitario nelle variabili coniugate

$$\Delta n = \frac{pL}{2\pi\hbar} \qquad\qquad d^2n = \frac{dx dp_x}{2\pi\hbar}$$

Per un sistema in tre dimensioni si ha

$$d^6n = g\ \frac{dx\ dy\ dz\ dp_x\ dp_y\ dp_z}{(2\pi\hbar)^3} = g\ \frac{d\vec{r}\ d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

dove il fattore g tiene conto della molteplicità di ciascuno stato dovuta a *gradi di libertà* diversi dalle variabili coniugate, ad esempio i possibili stati di spin.

La regola d'oro di Fermi è usata di frequente per calcolare la costante di decadimento oppure la sezione d'urto come funzioni di alcune particolari variabili. In questo caso la densità degli stati si ottiene integrando d^6n su tutte *le altre* variabili e derivando rispetto all'energia totale

$$\rho(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{d}{dE}\int d^6n$$

Esempio 1

Stati di *una particella* di massa m e spin 0 normalizzati in un volume V. Integrando sulle variabili spaziali e esprimendo $d\vec{p}$ in coordinate polari

$$\rho(E)\ dpd\Omega = \left[\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\ p^2\ \frac{dp}{dE}\right]\ dpd\Omega$$

- in meccanica non relativistica, $E = p^2/2m$, $dE = pdp/m$,

$$\rho(E) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\ mp$$

- in meccanica relativistica, $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$, $EdE = c^2pd$

$$\rho(E) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\ \frac{pE}{c^2}$$

  nel limite $p \ll mc$, $E \simeq mc^2$ si ottiene il caso precedente.

Per un fotone ($E = pc = h\nu$) con due stati di polarizzazione

$$\rho(E)\ dpd\Omega = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}\ \frac{p^2}{c}\ dpd\Omega = \frac{2V}{c^3}\ \nu^2 d\nu d\Omega$$

e, integrando sugli angoli, il numero di stati per unità di frequenza è

$$dn = \frac{8\pi}{c^3}\ \nu^2 d\nu$$

Esempio 2

Per un *sistema di due particelle*, ad esempio la diffusione $m_1\ m_2 \to m_1'\ m_2'$ oppure il decadimento $M \to m_1\ m_2$, la conservazione dell'energia e dell'impulso costituisce un vincolo per cui le variabili delle due particelle non sono indipendenti. Nel riferimento del centro di massa $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, $p_1^2 = p_2^2$, $p_1dp_1 = p_2dp_2$

$$dE = dE_1 + dE_2 = \frac{p_1c^2}{E_1}\ dp_1 + \frac{p_2c^2}{E_2}\ dp_2 = \frac{E_1 + E_2}{E_1E_2}\ c^2p_1dp_1$$

la densità degli stati in funzione delle variabile di una delle due particelle è

$$\rho(E)\ dp_1d\Omega_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\ \frac{E_1E_2}{E}\frac{p_1}{c^2}\ dp_1d\Omega_1$$

Nel limite $E_1 \ll E_2$ abbiamo il caso dell'esempio precedente.

Esempio 3

Per un *sistema di tre particelle*, $E_1 + E_2 + E_3 = E$, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$, le variabili di due particelle sono indipendenti e la densità dello spazio delle fasi in funzione delle variabili di due particelle è

$$d^{12}n = \frac{d\vec{r}_1\ d\vec{r}_2\ d\vec{p}_1\ d\vec{p}_2}{(2\pi\hbar)^6} \qquad \rho_3(E) = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6}\ \frac{d}{dE}\int d\vec{p}_1\ d\vec{p}_2$$

Analogemte, per un *sistema di n particelle* la densità dello spazio delle fasi della particella $n-$esima in funzione delle variabili delle particelle $1,\ 2, \ldots,\ n-1$ è

$$\rho_n(E) = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}}\ \frac{d}{dE}\int d\vec{p}_1 \ldots d\vec{p}_{n-1}$$

Introducendo esplicitamente nell'integrale il vincolo di conservazione di energia e impulso

$$\rho_n(E) = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}}\ \frac{d}{dE}\int \delta^3\left(\Sigma_n \vec{p}_n\right)\delta\left(\Sigma_n E_n - E\right)\ d\vec{p}_1 \ldots d\vec{p}_n$$

4.17 Il modello atomico di Thomas-Fermi

Il modello atomico di Thomas-Fermi è un *modello statistico* che descrive il sistema costituito dal nucleo di carica $+Ze$ e di N elettroni ($N \gg 1$) di carica $-e$ confinati in una regione di volume V da un potenziale $U(\vec{r})$. Il potenziale che agisce su un elettrone è il risultato dell'azione attrattiva del nucleo e di quella repulsiva degli altri elettroni. Per atomi neutri $N = Z$. Per ioni positivi di carica ze si ha $N = Z - z$. Il potenziale $U(\vec{r})$ soddisfa le seguenti ipotesi:

- è a simmetria sferica con origine nel nucleo;
- $U(r) \to 0$ per $r \to \infty$.

Il sistema è trattato come un gas degenere di fermioni di spin 1/2. Il numero di stati occupati è

$$\int d^6n = \int 2\ \frac{d\vec{r}d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}\frac{4\pi}{3}\ p_F^3 = N$$

dove p_F è l'impulso di Fermi. La *densità di elettroni* è

$$\rho(r) = \frac{N}{V} = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3}\ p_F^3$$

Poiché il sistema legato è in uno stato di equilibrio, il valore massimo dell'energia totale di un elettrone non può dipendere da r ed è negativo nel volume V

$$E_{max} = \frac{p_F^2}{2m} + U(r) \leq 0$$

La funzione

$$\phi(r) = -\frac{U(r)}{e} + \frac{E_{max}}{e}$$

è legata alla densità dalla relazione

$$\rho(r) = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3}\,[2me\;\phi(r)]^{3/2} \qquad \phi(r) > 0 \qquad\qquad \rho(r) = 0 \qquad \phi(r) \leq 0$$

$\phi(r)$ si annulla sulla superficie che delimita il volume V dove si ha $U(r) = E_{max}$. Per un atomo neutro $E_{max} = 0$, per uno ione positivo $E_{max} < 0$. La funzione $\phi(r)$ è il potenziale elettrostatico a meno di una costante e soddisfa l'equazione di Poisson

$$\nabla^2\phi(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\;r\phi(r) = \frac{e\rho(r)}{\epsilon_o}$$

Dalle due relazioni precedenti si ottiene l'equazione del potenziale

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\;r\phi(r) = \frac{e}{3\pi^2\epsilon_o}\left[\frac{2me}{\hbar^2}\right]^{3/2}[\phi(r)]^{3/2} \qquad\qquad \phi(r) > 0$$

con le condizioni al contorno

- la densità di carica è nulla all'esterno del volume V;
- il potenziale per $r \to 0$ è il potenziale coulombiano prodotto dalla carica del nucleo;

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\;r\phi(r) = 0 \qquad \phi(r) \leq 0 \qquad\qquad \lim_{r\to 0}\;r\phi(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_o}$$

Possiamo esprimere l'equazione del potenziale in termini della variabile adimensionale x e della funzione adimensionale $\Phi(x)$

$$r = ax \qquad\qquad r\phi(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_o}\;\Phi(x)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{4}{3\pi}\;2^{2/3}Z^{1/2}a^{3/2}\left[\frac{me^2}{4\pi\epsilon_o\hbar^2}\right]^{3/2}\frac{\Phi^{3/2}}{x^{1/2}} = f(Z)\;\frac{\Phi^{3/2}}{x^{1/2}}$$

Il parametro a rappresenta la scala di estensione della densità di carica e del potenziale. Ponendo $f(Z) = 1$, a è definito dalla carica del nucleo e del raggio atomico di Bohr ($a_o = 4\pi\epsilon_o\hbar^2/me^2$):

$$a = \left(\frac{9\pi^2}{128}\right)^{1/3} a_o Z^{-1/3} = 0.885\;a_o Z^{-1/3}$$

L'estensione spaziale della densità di elettroni nell'atomo *diminuisce all'aumentare della carica* in modo proporzionale a $Z^{-1/3}$. La densità è

$$\rho(x) = \frac{Z}{4\pi a^3}\frac{\Phi^{3/2}}{x^{3/2}} \qquad \Phi > 0 \qquad\qquad \rho(r) = 0 \qquad \Phi \leq 0$$

Il potenziale soddisfa l'*equazione di Thomas-Fermi*

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{\Phi^{3/2}}{x^{1/2}} \qquad\qquad \Phi > 0$$

con le condizioni al contorno

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0 \qquad \Phi \leq 0 \qquad\qquad \Phi(0) = 1$$

Le condizioni sulla funzione $\Phi(x)$ implicano che questa si annulli in un punto X nell'intervallo $0 < x < \infty$. La distanza $R = aX$ definisce il volume V in cui $\rho(r) \neq 0$. I valori della funzione Φ e della derivata Φ' nel punto $x = X$ sono legati dalla condizione di normalizzazione della densità, $\int \rho(r) d\vec{r} = N$

$$\int_V \rho(r)\ 4\pi r^2 dr = \int_0^X \frac{Z}{4\pi a^3}\ \frac{\Phi^{3/2}}{x^{3/2}}\ 4\pi a^3 x^2 dx = Z \int_0^X \Phi^{3/2} x^{1/2} dx = Z \int_0^X \frac{d^2\Phi}{dx^2}\ x dx =$$

$$= Z\ \left[x\Phi' - \Phi\right]_0^X = Z\ \left[X\Phi'(X) + 1\right] = N \qquad \Rightarrow \qquad X\Phi'(X) = \frac{N - Z}{Z} = -\frac{z}{Z}$$

L'andamento del potenziale $\Phi(x)$ è mostrato nella Fig.4.18 per atomi neutri e ioni positivi

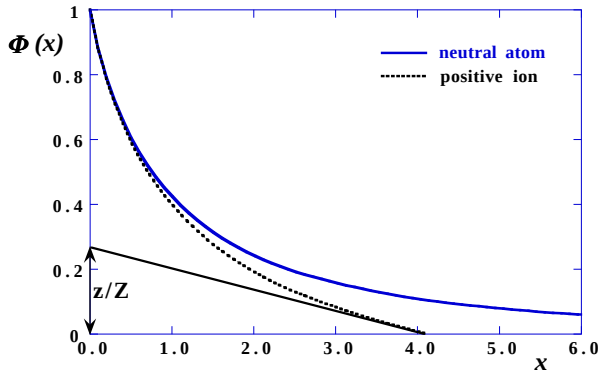


Figure 4.18: Potenziale del modello di Thomas-Fermi

- per un atomo neutro, $N = Z$, la funzione e la derivata sono entrambe nulle nel punto X e quindi risulta $X = \infty$, cioè la densità di carica si annulla all'infinito;
- per uno ione di carica $+ze$ si ha $X\Phi'(X) = -z/Z$, il limite del volume dell'atomo è finito e la tangente $\Phi'(X)$ interseca l'asse $x = 0$ nel punto $+z/Z$;
- L'equazione di Thomas-Fermi non ha soluzioni per ioni negativi.

Il modello statistico non è in grado di riprodurre l'andamento del potenziale del singolo elettrone. Fornisce comunque informazioni sull'energia di ionizzazione *media*. Il valor medio dell'energia cinetica degli elettroni è

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m}\ \frac{8\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\ p^2 dp = \frac{3}{5}\ \frac{p_F^2}{2m} = \frac{3}{5}\ e\phi(r)$$

Il valore medio dell'energia totale è quindi

$$\langle E\rangle = -\frac{1}{N}\frac{2}{5}\int_V e\phi(r)\rho(r)\ d\vec{r} = -\frac{2}{5N}\int_0^X \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o}\frac{Z}{4\pi a^3}\ \Phi\ \frac{\Phi^{3/2}}{x^{3/2}}\ 4\pi a^2 x dx =$$

$$= -\frac{2}{5N}\ \frac{Z^2e^2}{4\pi\epsilon_o a}\int_0^X \Phi\ \Phi''\ dx$$

L'integrale non dipende dalla carica né dalle dimensioni dell'atomo. L'energia di legame mediata su tutti gli elettroni è proporzionale all'energia di legame dell'atomo di idrogeno ($e^2/4\pi\epsilon_o a_o$) e, per $N = Z$, è proporzionale a $Z^{4/3}$.

Queste considerazioni mettono in luce alcune differenze sostanziali tra i sistemi atomici, in cui il potenziale è *a distanza*, e i sistemi nucleari in cui il potenziale è *a contatto*:

- il *raggio medio* di un atomo con Z elettroni è proporzionale a $Z^{-1/3}$;
- l'energia di legame media degli elettroni è proporzionale a $Z^{4/3}$;
- il *raggio medio* di un nucleo con A nucleoni è proporzionale a $A^{1/3}$;
- l'energia di legame media dei nucleoni è costante.

4.18 Equazioni quantistiche relativistiche

Richiamiamo brevemente le proprietà dell'equazione del moto di Schrödinger:

- l'equazione di evoluzione degli stati di un sistema

  $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ \psi = H\ \psi$$

  è definita dall'operatore hamiltoniano che rappresenta l'energia del sistema in funzione delle variabili coniugate $(\vec{r}, \vec{p})$;
- l'energia e l'impulso sono rappresentati dagli operatori

  $$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad\qquad \vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

- gli stati del sistema sono rappresentati dalla funzione d'onda $\psi(\vec{r}, t)$;
- la densità di probabilità e la densità di corrente per una particella di massa m soddisfano l'equazione di continuità

  $$\rho = \psi^*\psi \qquad\qquad \vec{j} = \frac{\hbar}{2im}\ (\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Se $H = (-i\hbar\vec{\nabla})^2/2m$ è la hamiltoniana della particella libera, l'equazione di Schrödinger non è invariante per trasformazioni di Lorentz. Cerchiamo di impostare un'equazione del moto che conservi le proprietà dell'equazione di Schrödinger e che sia relativisticamente invariante.

4.18.1 Equazione di Klein-Gordon

Il 4-vettore energia-impulso, $P \equiv (\vec{p}, E/c) \equiv (-i\hbar\vec{\nabla}, i\hbar\partial/\partial ct)$, definisce un invariante

$$P^2 = -\vec{p}^{\,2} + E^2/c^2 = (mc)^2$$

che possiamo utilizzare per impostare l'equazione del moto della particella libera

equazione di Klein-Gordon $$\left[\hbar^2\vec{\nabla}^2 - \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\phi = (mc)^2\phi$$

dove $\phi(\vec{r}, t)$ è una funzione *scalare*.

Nota: nel seguito usiamo la convenzione $\hbar = 1$, $c = 1$. Introducendo l'operatore d'alembertiano $\Delta^2 \equiv -\vec{\nabla}^2 + \partial^2/\partial t^2$, l'equazione di Klein-Gordon si esprime in modo compatto

$$(\Delta^2 + m^2)\phi = 0$$

Questa equazione ha come soluzione una sovrapposizione di onde piane del tipo

$$\phi(\vec{r}, t) = Ne^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)} = Ne^{-ip\cdot x}$$

dove N è una costante di normalizzazione; $p \cdot x = \Sigma_{\mu\nu} g_{\mu\nu} p_\mu x_\nu$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$; $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico. Sostituendo la soluzione nell'equazione del moto si ottengono autovalori dell'energia sia positivi che negativi: $E = \pm\,[p^2 + m^2]^{1/2}$. Qui incontriamo un serio problema poiché valori negativi dell'energia non corrispondono a stati di una particella libera. Un secondo serio problema si incontra nella definizione della densità di probabilità. Se consideriamo l'equazione di Klein-Gordon e l'equazione coniugata

$$(\Delta^2 + m^2)\phi = 0 \qquad (\Delta^2 + m^2)\phi^* = 0$$

e moltiplichiamo la prima per ϕ^* e la seconda per ϕ, otteniamo la relazione

$$\phi^*\Delta^2\phi = \phi\Delta^2\phi^*$$

e possiamo verificare che esiste una equazione di continuità, $\partial\rho/\partial t = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$, soddisfatta dalle funzioni

$$\rho = i(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}) = |N|^2 2E \qquad \vec{j} = -i(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*) = |N|^2 2\vec{p}$$

La densità di corrente è definita come nel caso non relativistico, ma la densità di probabilità dipende dalla variazione nel tempo della funzione d'onda. Inoltre la densità di probabilità non è definita positiva.

La costante di normalizzazione viene fissata richiedendo che ρdV sia invariante. In una trasformazione di Lorentz il volume si contrae $\sim \gamma^{-1}$ e quindi $|N|^2 2EdV$ è indipendente dal volume di normalizzazione. Nel seguito consideriamo la normalizzazione in un *volume unitario* che corrisponde a normalizzare gli autostati dell'equazione di Klein-Gordon con *due particelle per unità di volume* corrispondenti ai due autostati di energia.

L'equazione di Klein-Gordon ammette soluzioni con energia e densità di probabilità negative e quindi non può rappresentare l'equazione del moto di una particella con massa $m \neq 0$. Nel caso $m = 0$ si ha l'equazione di d'Alembert che descrive il campo elettromagnetico e gli autovalori $E = \pm p$ rappresentano due stati di propagazione del campo simmetrici per inversione della direzione del moto, o simmetrici per inversione del tempo. Vedremo che la simmetria per inversione temporale permette di interpretare le soluzioni a energia negativa dell'equazione di Klein-Gordon come soluzioni a energia positiva che si propagano all'indietro nel tempo.

4.18.2 Equazione di Dirac

Le difficoltà incontrate nell'interpretazione dell'equazione di Klein-Gordon sono originate dal fatto che l'evoluzione degli stati dipende dalla derivata seconda $\partial^2/\partial t^2$. Nel 1927 Dirac propose un'equazione relativisticamente invariante che descrive il moto di fermioni. Dirac parte dall'ipotesi che l'evoluzione degli stati di fermioni deve essere descritta dalla derivata prima $\partial/\partial t$. Perché l'equazione del moto sia relativisticamente invariante, la hamiltoniana deve dipendere linearmente dall'impulso e dalla massa

$$\textit{equazione di Dirac} \qquad i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi = (\sum_j \alpha_j p_j + \beta m)\psi$$

dove (α_j, β) sono quattro operatori hermitiani che non dipendono dalle variabili $\vec{r}$, t. L'equazione del moto deve soddisfare la relazione tra massa, impulso e energia $E^2 = p^2 + m^2$

$$H^2\psi = (\sum_j \alpha_j p_j + \beta m)\ (\sum_k \alpha_k p_k + \beta m)\psi = (p^2 + m^2)\psi$$

$$\left[\frac{1}{2}\sum_{jk}(\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j)p_j p_k + \sum_j(\alpha_j\beta + \beta\alpha_j)p_j m + \beta^2 m^2\right]\psi = (p^2 + m^2)\psi$$

Questa relazione definisce le proprietà degli operatori α_j e β

- $\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk}$
- $\alpha_j\beta + \beta\alpha_j = 0$
- $\alpha_j^2 = 1 \qquad \beta^2 = 1$

Gli operatori α_j e β hanno modulo unitario e le relazioni di anticommutazione sono soddisfatte se sono quattro matrici linearmente indipendenti. La dimensione minima per soddisfare le relazioni di anticommutazione è *quattro*. Quindi gli operatori α_j

e β si possono rappresentare come quattro matrici hermitiane 4×4 e la funzione d'onda ψ è un vettore a 4 componenti

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \qquad \psi^+ = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix}$$

La densità di probabilità e la densità di corrente si definiscono nel modo usuale dall'equazione del moto e dall'equazione hermitiana coniugata

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + \beta m\psi$$

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\psi^+ = i(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi)^+ + (\beta m\psi)^+ = i\vec{\nabla}\psi^+\cdot\vec{\alpha}^+ + m\psi^+\beta^+$$

Moltiplicando la prima per ψ^+ e la seconda per ψ, e tenendo conto che $\alpha_j^+ = \alpha_j$ e $\beta^+ = \beta$, otteniamo le relazioni

$$i\psi^+\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\psi^+\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + m\psi^+\beta\psi \qquad i\frac{\partial\psi^+}{\partial t}\psi = -i\vec{\nabla}\psi^+\cdot\vec{\alpha}\psi - m\psi^+\beta\psi$$

Sommando queste due relazioni e definendo

- *densità di probabilità* $\rho = \psi^+\psi = \Sigma_j|\psi_j|^2 > 0$
- *densità di corrente* $\vec{j} = \psi^+\vec{\alpha}\psi$

si ottiene una densità di probabilità *definita positiva* che soddisfa l'equazione di continuità $\partial\rho/\partial t + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$.

4.18.3 Soluzioni di particella libera

Le matrici di Dirac sono quattro matrici hermitiane 4×4 linearmente indipendenti e si possono rappresentare con le matrici di Pauli che costituiscono una base dello spazio vettoriale a due dimensioni e hanno le proprietà $\sigma_j^2 = 1$, $\sigma_j\sigma_k = i\epsilon_{jkl}\sigma_l$

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

dove I è la matrice identità 2×2. La soluzione dell'equazione di Dirac per la particella libera si può esprimere

$$\psi_n(\vec{r},t) = u_n(\vec{p})\ e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

dove le ampiezze $u_n(\vec{p})$ descrivono un nuovo grado di libertà della particella. Sostituendo la soluzione nell'equazione del moto

$$i\frac{\partial\psi_n}{\partial t} = E\ \psi_n \qquad \Rightarrow \qquad -i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi_n = \vec{\alpha}\cdot\vec{p}\ \psi_n$$

otteniamo un sistema di equazioni agli autovalori

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m)u = \begin{pmatrix} m\ I & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m\ I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

dove $u_A(\vec{p}),\ u_B(\vec{p})$ sono vettori a due componenti che rappresentano i quattro autostati dell'equazione

$$(E-m)\ I\ u_A - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,u_B = 0$$
$$-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,u_A + (E+m)\cdot I\ u_B = 0$$

Gli autovalori si ottengono annullando il determinante del sistema di equazioni

$$\begin{vmatrix} E-m & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & E+m \end{vmatrix} = E^2 - m^2 - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = 0$$

- Nota: se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono due vettori che commutano con le matrici σ_j si ha

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \sum_{jk}\sigma_j a_j \sigma_k b_k = \sum_{jk}\sigma_j\sigma_k a_j b_k =$$

$$= \sum_j \sigma_j^2 a_j b_j + \sum_{j\neq k} i\epsilon_{ikl}\sigma_l a_j b_k = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

quindi $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = p^2$

Si ottengono due soluzioni con energia positiva e due con energia negativa che possiamo associare in modo arbitrario ai due autostati

$$E_+ = +E_o \qquad E_- = -E_o \qquad E_o = \sqrt{p^2+m^2} > 0$$

Associando E_- alla prima equazione e E_+ alla seconda equazione si ottiene

$$\psi_{E<0} = \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_o+m}\ u_B \\ u_B \end{pmatrix} \qquad \psi_{E>0} = \begin{pmatrix} u_A \\ \frac{+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_o+m}\ u_A \end{pmatrix}$$

Esplicitando la matrice

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix}$$

e definendo u_A e u_B come vettori unitari abbiamo:

- dalla prima equazione

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} -(E_o+m)\ u_1 &=& p_3 \\ -(E_o+m)\ u_2 &=& p_1+ip_2 \end{array}$$

$$u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} -(E_o+m)\ u_1 &=& p_1-ip_2 \\ -(E_o+m)\ u_2 &=& -p_3 \end{array}$$

- dalla seconda equazione

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} (E_o + m)\, u_3 &=& p_3 \\ (E_o + m)\, u_4 &=& p_1 + ip_2 \end{array}$$

$$u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} (E_o + m)\, u_3 &=& p_1 - ip_2 \\ (E_o + m)\, u_4 &=& -p_3 \end{array}$$

Quindi le quattro soluzioni dell'equazione agli autovalori, gli *spinori* $u_n(\vec{p})$, sono

$$N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_1+ip_2}{E+m} \end{pmatrix} \quad N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_1-ip_2}{E+m} \\ -\frac{p_3}{E+m} \end{pmatrix} \quad N \begin{pmatrix} -\frac{p_3}{|E|+m} \\ -\frac{p_1+ip_2}{|E|+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad N \begin{pmatrix} -\frac{p_1-ip_2}{|E|+m} \\ \frac{p_3}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove $|E| = +E_o$ nelle soluzioni a energia negativa e N è un fattore di normalizzazione che si determina richiedendo che ρdV sia invariante

$$\rho = \psi^+\psi = \sum_j u_j^* u_j = 4|N|^2 \left(1 + \frac{p^2}{(|E| + m)^2}\right) = 4|N|^2 \frac{2|E|}{(|E| + m}{})^2$$

Fissando un volume di normalizzazione unitario e $|N|^2 = (|E| + m)^2/4$ si ha la stessa normalizzazione degli autostati dell'equazione di Klein-Gordon con due particelle per unità di volume.

Dirac diede una interpretazione degli stati di energia negativa e dell'esistenza di transizioni tra stati di energia positiva, $E > m$, e energia negativa, $E < -m$. Gli elettroni, in base al principio di Pauli, occupano tutti gli stati con energia minore dell'energia di Fermi e quindi, se esistono elettroni liberi, tutti gli stati di energia $E < -m$ devono essere occupati. Se si cede energia $\Delta E > 2m$ ad un elettrone di energia negativa, si produce un elettrone libero e una *locazione vuota* (Fig.4.19). Poiché la transizione può avvenire per interazione con il campo elettromagnetico senza variazione di carica elettrica, la produzione di una locazione vuota con carica $-e$ corrisponde alla comparsa di una particella di carica $+e$ con energia negativa. Questa è l'interpretazione della conversione di fotoni con energia $E_\gamma > 2m$ nel campo elettromagnetico dei nuclei. D'altra parte, se esistono locazioni vuote, un elettrone libero tende a diminuire il suo stato di energia andando ad occupare uno stato di energia $E < -m$: scompare la carica dell'elettrone libero, $-e$ e quella della locazione vuota, $+e$ e l'energia viene emessa sotto forma di fotoni $E_\gamma > 2m$. Con questa interpretazione, Dirac previde l'esistenza di *anti-elettroni* con massa m_e e carica $+e$.

Costanti del moto

Le due coppie di soluzioni dell'equazione di Dirac sono funzioni dell'impulso $\vec{p}$ e corrispondono a due autovalori dell'energia E_-, E_+. Perché le quattro soluzioni

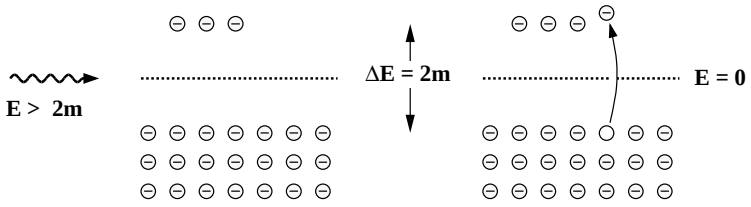


Figure 4.19: Interpretazione di Dirac degli stati a energia negativa

siano indipendenti deve esistere un altro osservabile indipendente da $\vec{p}$ che commuta con la hamiltoniana. L'operatore

$$\textit{elicità} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix}$$

commuta con $\vec{p}$ e con la hamiltoniana, $[\Lambda, \vec{p}] = 0$, [Λ,H] = 0, e quindi rappresenta una costante del moto. Nella rappresentazione delle matrici di Pauli in cui σ_3 è diagonale conviene scegliere il versore impulso $\hat{p} = (0, 0, 1)$ e cioè

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Per le soluzioni si ha

$$E = +\sqrt{p^2 + m^2} \qquad \Lambda u_1 = +u_1 \qquad \Lambda u_2 = -u_2$$

$$E = -\sqrt{p^2 + m^2} \qquad \Lambda u_3 = +u_3 \qquad \Lambda u_4 = -u_4$$

Quindi l'operatore elicità ha due autovalori, $\Lambda = \pm 1$, che distinguono gli autostati con lo stesso autovalore di energia.

L'operatore costruito con le matrici di Pauli

$$\vec{s} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

non commuta con la hamiltoniana. Infatti [$\vec{s}$,H] contiene il commutatore $[\vec{\sigma}, \vec{\sigma}\cdot\vec{p}]$ che ha componenti

$$\sigma_j \ \Sigma_k \sigma_k p_k - \Sigma_k \sigma_k p_k \ \sigma_j = \Sigma_k (\sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j) p_k = \Sigma_k \ 2i \ \epsilon_{jkl}\sigma_l p_k = -2i \ (\vec{\sigma}\wedge\vec{p})_j$$

e quindi

$$[\vec{s}, H] = -i \ \vec{\alpha}\wedge\vec{p}$$

Per interpretare il significato dell'operatore $\vec{s}$ consideriamo la particella in un campo esterno in cui sia definito un centro di simmetria. L'operatore *momento angolare orbitale* $\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p}$ *non commuta* con la hamiltoniana. Infatti per una componente si ha

$$[L_3, H] = [x_1p_2 - x_2p_1, \Sigma_j \alpha_j p_j] = \alpha_1[x_1, p_1]p_2 - \alpha_2[x_2, p_2]p_1 = i(\alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1)$$

e quindi anche in questo caso il commutatore non si annulla

$$[\vec{L}, H] = +i\ \vec{\alpha} \wedge \vec{p}$$

L'operatore $\vec{s}$ è un vettore assiale che soddisfa le regole di commutazione del momento angolare e l'operatore

$$\textit{momento angolare totale} \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{s}$$

commuta con la hamiltoniana, quindi possiamo interpretare $\vec{s} = \vec{\sigma}/2$ come l'operatore legato a un nuovo grado di libertà: il momento angolare intrinseco o *spin del fermione*. Le autofunzioni dell'equazione del moto sono individuate dalle tre componenti dell'impulso, $\vec{p}$, e dalla proiezione dello spin lungo la direzione del moto che ha due autovalori $s = \pm\hbar/2$

$$\psi_n = u_n(\vec{p}, s)\ e^{i(\vec{r}\cdot\vec{p} - Et)}$$

4.18.4 Limite non relativistico dell'equazione di Dirac

Le matrici di Pauli hanno le proprietà dell'operatore momento angolare nello spazio vettoriale a due dimensioni e l'interpretazione dello spin come momento angolare intrinseco comporta che un fermione con carica elettrica q abbia un momento magnetico. L'equazione del moto in campo elettromagnetico si ottiene con la sostituzione $\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$, $E \to E - qV$ (appendice 4.13); l'equazione agli autovalori diventa

$$(E - m - qV) \cdot I\ u_A - \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A})\ u_B = 0$$

$$-\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A})\ u_A + (E + m - qV) \cdot I\ u_B = 0$$

e, sostituendo per una delle due soluzioni, si ha

$$\left[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A})\ \frac{1}{E + m - qV}\ \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A})\right] u = (E - m - qV)\ u$$

Questa equazione ha una semplice interpretazione nel limite non relativistico in cui l'energia cinetica $K = E - m$ e l'energia potenziale qV sono $\ll m$

$$E + m - qV = K + 2m - qV \approx 2m \qquad E - m - qV = K - qV$$

In questa approssimazione l'equazione agli autovalori diventa

$$\left[\frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A})\ \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A})}{2m} + qV\right] u = K\ u$$

Applicando la regola del prodotto ricavata in precedenza all'operatore $-i\vec{\nabla} - q\vec{A}$

$$[\vec{\sigma} \cdot (i\vec{\nabla} + q\vec{A})\ \vec{\sigma} \cdot (i\vec{\nabla} + q\vec{A})]\ u = [(i\vec{\nabla} + q\vec{A})^2 + i\vec{\sigma} \cdot (i\vec{\nabla} + q\vec{A}) \wedge (i\vec{\nabla} + q\vec{A})]\ u$$

notiamo che il secondo termine contiene il prodotto scalare dell'operatore di spin e il vettore campo magnetico $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$. Infatti $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} u \equiv 0$, $\vec{A} \wedge \vec{A} \equiv 0$, e

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{A} \wedge \vec{\nabla})\ u = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})\ u + \vec{\nabla} u \wedge \vec{A} + \vec{A} \wedge \vec{\nabla} u = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})\ u$$

Quindi l'equazione agli autovalori

$$\left[\frac{(i\vec{\nabla} + q\vec{A})^2}{2m} + qV - \frac{q}{2m}\ \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right]\ u = K\ u$$

contiene la hamiltoniana di interazione elettromagnetica (appendice 4.13) e un termine di interazione di dipolo magnetico $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Si deduce che il momento magnetico associato allo spin $s = \hbar/2$ di un fermione con carica elettrica e è $\vec{\mu} = (e\hbar/2m)\vec{\sigma}$ e che il fermione ha fattore giromagnetico $g = 2$

$$\vec{\mu} = g\ \frac{e\hbar}{2m}\ \vec{s} \qquad\qquad g = 2$$

4.18.5 Matrici gamma

L'equazione di Dirac si esprime in forma covariante usando quattro matrici γ_μ che formano un 4-vettore: $\gamma_j = \beta\alpha_j, \quad \gamma_4 = \beta, \quad \gamma \equiv (\beta\vec{\alpha}, \beta)$

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

- le matrici γ hanno le proprietà di anticommutazione

  $$\gamma_j\gamma_k + \gamma_k\gamma_j = \beta\alpha_j\beta\alpha_k + \beta\alpha_k\beta\alpha_j = -\beta^2(\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j) = -2\delta_{jk}$$

  che si riassumono in

  $$\gamma_j\gamma_4 + \gamma_4\gamma_j = \beta\alpha_j\beta + \beta\beta\alpha_j = 0$$

  $$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

  dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico delle trasformazioni di Lorentz;

- le matrici hermitiane coniugate hanno le proprietà

  $$\gamma_j^+ = (\beta\alpha_j)^+ = \alpha_j^+\beta^+ = \alpha_j\beta = \beta\ \beta\alpha_j\ \beta = \gamma_4\gamma_j\gamma_4 \qquad\qquad \gamma_4^+ = \gamma_4\gamma_4\gamma_4$$

  $$\gamma_\mu^+ = \gamma_4\gamma_\mu\gamma_4$$

Moltiplicando per la matrice β l'equazione di Dirac

$$i\beta\ \frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\beta\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\psi + m\beta^2\psi \qquad \Rightarrow \qquad i\gamma_4\partial_4\psi + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}\psi = m\psi$$

otteniamo la *forma covariante* dell'equazione di Dirac

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi$$

L'equazione hermitiana coniugata si esprime in modo covariante definendo $\overline{\psi} = \psi^+\gamma_4$ ($\psi^+ = \overline{\psi}\gamma_4$)

$$-i\partial_\mu \psi^+ \gamma^{\mu +} = -i\partial_\mu \gamma^4\gamma^\mu\gamma^4 = m\psi^+\gamma^4\gamma^4 \qquad \Rightarrow \qquad -i\partial_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu = m\overline{\psi}$$

La densità di probabilità e di corrente

$$\rho = \psi^+\psi = \overline{\psi}\gamma_4\psi \qquad\qquad \vec{j} = \psi^+\vec{\alpha}\psi = \overline{\psi}\vec{\gamma}\psi$$

sono le componenti di un 4-vettore a divergenza nulla, la *corrente fermionica*

$$j_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi \qquad\qquad \partial_\mu j^\mu = 0$$

Oltre alle quattro matrici γ è utile introdurre la matrice antisimmetrica

$$\gamma_5 = -i\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \qquad\qquad \left[\gamma_5 = \frac{1}{i4!}\ \epsilon_{\lambda\kappa\mu\nu}\ \gamma^\lambda\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma^\nu\right]$$

che è hermitiana e anticommuta con le matrici γ_μ

$$\gamma_5^+ = \gamma_5 \qquad\qquad \gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0$$

Nella rappresentazione usata per le matrice γ_μ, la matrice γ_5 è

$$\gamma_5 = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

4.18.6 Trasformazioni degli autostati

Se ψ è una soluzione dell'equazione di Dirac che si trasforma nella funzione ψ' per azione della trasformazione U

$$\psi \ \rightarrow\ \psi' = U\psi$$

la funzione ψ' è una soluzione dell'equazione trasformata, $[i\gamma^\mu\partial'_\mu - m]\psi' = 0$, se

$$U^{-1}[i\gamma^\mu\partial'_\mu - m]U = i\gamma^\mu\partial_\mu - m$$

e $\overline{\psi'}$ è una soluzione dell'equazione hermitiana coniugata se $U^{-1} = \gamma_4 U^+ \gamma_4$; infatti

$$\overline{\psi'} = \psi'^+\gamma_4 = \psi^+U^+\gamma_4 = \psi^+\gamma_4\gamma_4U^+\gamma_4 = \overline{\psi}U^{-1}$$

Trasformazioni di Lorentz

L'equazione di Dirac è invariante per costruzione. Consideriamo la trasformazione delle coordinate e delle derivate

$$x'_\mu = L^{-1}_{\mu\nu} x_\nu \qquad x_\lambda = L_{\lambda\mu} x'_\mu \qquad \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\,\frac{\partial}{\partial x_\nu} = L_{\mu\nu}\partial_\nu$$

L'invarianza dell'equazione per la trasformazione U implica che $U^{-1}\gamma_\mu U$ si trasformi come le coordinate; infatti

$$U^{-1}\gamma_\mu \partial'_\mu U = U^{-1}\gamma_\mu L_{\mu\nu}\partial_\nu U = \gamma_\nu \partial_\nu \qquad U^{-1}\gamma_\mu L_{\mu\nu} U = \gamma_\nu \qquad U^{-1}\gamma_\lambda U = L_{\lambda\nu}\gamma_\nu$$

Possiamo quindi dedurre che

- $\overline{\psi}\psi$ è uno *scalare*, S $\qquad \overline{\psi'}\psi' = \overline{\psi}U^{-1}U\psi = \overline{\psi}\psi$
- $\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$ è un *vettore polare*, V $\qquad \overline{\psi'}\gamma_\mu\psi' = \overline{\psi}U^{-1}\gamma_\mu U\psi = L_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma_\nu\psi$
- $\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$ è un *tensore*, T $\qquad \overline{\psi'}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi' = \overline{\psi}U^{-1}\gamma_\mu U U^{-1}\gamma_\nu U\psi = L_{\mu\kappa}L_{\nu\lambda}\overline{\psi}\gamma_\kappa\gamma_\lambda\psi$
- $\overline{\psi}\gamma_5\psi$ è uno *pseudoscalare*, P
- $\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ è un *vettore assiale*, A

dove le ultime due considerazione derivano dalla proprietà di antisimmetria della matrice γ_5 rispetto all'inversione delle coordinate spaziali (cioè allo scambio di due matrici σ).

Coniugazione di carica

In presenza di un campo elettromagnetico, l'equazione del moto si ottiene con la trasformazione $p_\mu \to p'_\mu = p_\mu - qA_\mu$,

$$\left[\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu) - m\right]\psi = \left[i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + q\vec{\gamma}\cdot\vec{A} + i\gamma_4\partial_4 - q\gamma_4 A_4 - m\right]\psi = 0$$

Consideriamo la trasformazione che cambia il segno della carica elettrica della particella, l'equazione diventa

$$\left[\gamma^\mu(i\partial_\mu + qA_\mu) - m\right]\psi = 0$$

La coniugazione di carica fa passare da stati di energia positiva a stati di energia negativa e, poiché l'energia compare nella fase della funzione d'onda, l'operatore contiene la *coniugazione complessa* $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}e^{iEt/\hbar} = e^{i(-E)t/\hbar}$. Applicando la coniugazione complessa l'equazione trasformata è

$$\left[\gamma^{\mu *}(-i\partial_\mu + qA_\mu) - m\right]\psi = \left[(-\gamma^{\mu *})(i\partial_\mu - qA_\mu) - m\right]\psi = 0$$

Nella rappresentazione usata per le matrici gamma, γ_2 è immaginaria e ha la proprietà $\gamma_2^* = -\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_\mu^*\gamma_2 = \gamma_\mu$. L'operatore $C = \gamma_2\mathcal{C}$ soddisfa le proprietà

$$C^2 = \gamma_2\mathcal{C}\ \gamma_2\mathcal{C} = \gamma_2\gamma_2^*\ \mathcal{C}^2 = -\gamma_2\gamma_2 = I \qquad\qquad C^{-1} = C$$

e non cambia la forma dell'equazione del moto

$$C^{-1}\ (-\gamma^{\mu *})\ C = \gamma_2\mathcal{C}\ (-\gamma^{\mu *})\ \gamma_2\mathcal{C} = \gamma_2\ (-\gamma^\mu)\ (-\gamma_2) = \gamma_2\ \gamma^\mu\ \gamma_2 = \gamma^\mu$$

Quindi possiamo interpretare $C = \gamma_2\mathcal{C}$ come l'operatore *coniugazione di carica che agisce sugli spinori*

$$C\ u_1(\vec{p})e^{-ip\cdot x} = -iu_4(-\vec{p})e^{+ip\cdot x} \qquad\qquad C\ u_2(\vec{p})e^{-ip\cdot x} = +iu_3(-\vec{p})e^{+ip\cdot x}$$

$$C\ u_3(\vec{p})e^{-ip\cdot x} = +iu_2(-\vec{p})e^{+ip\cdot x} \qquad\qquad C\ u_4(\vec{p})e^{-ip\cdot x} = -iu_1(-\vec{p})e^{+ip\cdot x}$$

trasformando stati a energia positiva con carica q in stati di energia negativa con carica $-q$, cioè fermioni in anti-fermioni.

Inversione temporale

La trasformazione di inversione temporale, cambia $\partial_4 \to -\partial_4$, $\vec{A} \to -\vec{A}$ nell'equazione del moto e lascia invariati ∂_j e il potenziale scalare A_4.

La matrice $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ commuta con $\vec{\gamma}$ e anticommuta con γ_4: rappresenta l'inversione dell'asse del tempo ($\partial_4 \to -\partial_4$). Questa agisce sulla fase della funzione d'onda $e^{iEt/\hbar} \to e^{iE(-t)/\hbar} = e^{i(-E)t/\hbar}$ come la trasformazione coniugazione di carica. Consideriamo la trasformazione

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ \gamma_2\mathcal{C} = \gamma_1\gamma_3\mathcal{C}$$

che ha le proprietà

$$(\gamma_1\gamma_3\mathcal{C})^{-1} = \gamma_1\gamma_3\mathcal{C} \qquad\qquad (\gamma_1\gamma_3\mathcal{C})^{+} = -\gamma_1\gamma_3\mathcal{C}$$

Quindi possiamo interpretare $T = \gamma_1\gamma_3\mathcal{C}$, che contiene la trasformazione $t \to -t$ ed è antiunitaria, come l'operatore *inversione temporale che agisce sugli spinori*

$$T\ u_1(\vec{p})e^{-ip\cdot x} = +u_2(-\vec{p})e^{+ip\cdot x} \qquad\qquad T\ u_2(\vec{p})e^{-ip\cdot x} = -u_1(-\vec{p})e^{+ip\cdot x}$$

$$T\ u_3(\vec{p})e^{-ip\cdot x} = +u_4(-\vec{p})e^{+ip\cdot x} \qquad\qquad T\ u_4(\vec{p})e^{-ip\cdot x} = -u_3(-\vec{p})e^{+ip\cdot x}$$

trasformando lo stato di spin e invertendo la direzione del moto.

Parità

La parità dei fermioni è definita in modo convenzionale poiché il numero fermionico si conserva. La trasformazione di *inversione spaziale*, $P\psi(\vec{r},t) = \psi(-\vec{r},t) = \psi_P$, cambia $\partial_j \to -\partial_j$, $\vec{A} \to -\vec{A}$ nell'equazione del moto e lascia invariati ∂_4 e il potenziale scalare A_4

$$\left[i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + q\vec{\gamma}\cdot\vec{A} + i\gamma_4\partial_4 - q\gamma_4 A_4 - m\right]\psi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left[-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - q\vec{\gamma}\cdot\vec{A} + i\gamma_4\partial_4 - q\gamma_4 A_4 - m\right]\psi_P = 0$$

La matrice γ_4 anticommuta con $\vec{\gamma}$ e quindi agisce come inversione delle coordinate spaziali, inoltre ha la proprietà $\gamma_4\gamma_4 = I$. Moltiplicando l'equazione trasformata per γ_4 osserviamo che $\gamma_4\psi(-\vec{r},t)$ è autofunzione dell'equazione di Dirac

$$\gamma_4\left[\ldots\right]\ \psi_P = \left[i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + q\vec{\gamma}\cdot\vec{A} + i\gamma_4\partial_4 - q\gamma_4 A_4 - m\right]\gamma_4\psi_P = 0$$

e possiamo interpretare γ_4 come l'operatore di *parità che agisce suegli spinori*

$$\gamma_4\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A(\vec{p}) \\ u_B(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +u_A(-\vec{p}) \\ -u_B(-\vec{p}) \end{pmatrix}$$

e che ha autovalori $+1$ per le soluzioni a energia positiva e autovalori -1 per le soluzioni a energia negativa. E concludiamo che i *fermioni e i corrispondenti antifermioni hanno parità opposta.*

Stati a energia negativa

L'interpretazione di Dirac dei positroni come elettroni con energia negativa ha come presupposto l'esistenza di un numero infinito di stati di energia negativa che sono tutti occupati: è chiaramente insoddisfacente. Una interpretazione più convincente è quella proposta anni dopo da Stückelberg e Feynman basata sulle simmetrie degli autostati: elettroni di energia negativa con carica $-e$ che si propagano *in avanti* nel tempo sono equivalenti a elettroni con energia positiva e carica elettrica $+e$, che si propagano *indietro* nel tempo

$$-(\vec{p}+e\vec{A})\cdot\vec{r}+(E+eV)t = (\vec{p}+e\vec{A})\cdot\vec{r}+(-E-eV)(-t) = (\vec{p}+e\vec{A})\cdot\vec{r}+(E+eV)t$$

Questa interpretazione degli anti-fermioni soddisfa tutte le propietà di simmetria dell'equazione di Dirac senza presupporre l'esistenza di stati con energia negativa.

4.18.7 Autostati di elicità

Gli operatori costruiti con la matrice antisimmetrica γ_5

$$\Lambda_+ = \frac{1+\gamma_5}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda_- = \frac{1-\gamma_5}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

sono hermitiani e hanno le proprietà di proiezione

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = 1 \qquad \Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = 0 \qquad \Lambda_+\Lambda_+ = \Lambda_+ \qquad \Lambda_-\Lambda_- = \Lambda_-$$

Applicando i proiettori agli autostati otteniamo due ampiezze

$$u(\vec{p}, s) = u_R(\vec{p}, s) + u_L(\vec{p}, s)$$

Per gli stati a energia positiva

$$u_R = \Lambda_+ u = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ \frac{+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\, u_A \end{pmatrix} = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m})\, u_A \\ (1 + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m})\, u_A \end{pmatrix}$$

$$u_L = \Lambda_- u = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ \frac{+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\, u_A \end{pmatrix} = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} (+1 - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m})\, u_A \\ (-1 + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m})\, u_A \end{pmatrix}$$

Nel caso ultra-relativistico, $E \gg m$, $p \approx E$, $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}/(E+m) \approx \vec{\sigma}\cdot\hat{p} = \Lambda$

- $u \approx u_R$ per gli stati a elicità $\Lambda = +1$, *right-handed*;
- $u \approx u_L$ per gli stati a elicità $\Lambda = -1$, *left-handed*;
- la correlazione è invertita per gli stati a energia negativa.

u_R e u_L sono gli autostati di elicità e gli operatori Λ_+ e Λ_- sono chiamati *proiettori di elicità*. Le probabilità degli autostati di elicità sono

$$|u_R|^2 = \frac{N^2}{4}\left|1 + \frac{p}{E+m}\right|^2 \qquad |u_L|^2 = \frac{N^2}{4}\left|1 - \frac{p}{E+m}\right|^2$$

e la *polarizzazione* dello stato è proporzionale alla velocità

$$P = \frac{|u_R|^2 - |u_L|^2}{|u_R|^2 + |u_L|^2} = \frac{p}{E} = \beta$$

Conservazione dell'elicità

A energia $E \gg m$ le soluzioni dell'equazione di Dirac sono autostati dell'elicità. La hamiltoniana di interazione di un fermione con un campo esterno si può esprimere in termini di combinazioni invarianti $\overline{\psi}\mathcal{O}\psi$ con l'operatore $\mathcal{O}$ formato con le matrici γ. Una soluzione di particella libera si può esprimere come sovrapposizione di autostati left-handed e right-handed usando i proiettori di elicità

$$u_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\, u \qquad u_R = \frac{1+\gamma_5}{2} u \qquad \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\,\frac{1 \mp \gamma_5}{2} = 0$$

e, per le proprietà $\gamma_5^+ = \gamma_5$, $\gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0$,

$$\overline{u}_L = u^+ \frac{1-\gamma_5^+}{2}\gamma_4 = u^+\gamma_4\frac{1+\gamma_5}{2} = \overline{u}\frac{1+\gamma_5}{2}$$

$$\overline{u}_R = u^+ \frac{1+\gamma_5^+}{2}\gamma_4 = u^+\gamma_4\frac{1-\gamma_5}{2} = \overline{u}\frac{1-\gamma_5}{2}$$

Il termine di interazione $\overline{u}\mathcal{O}u$ conserva l'elicità se si esprime come sovrapposizione di autostati left-handed e right-handed

$$(\overline{u}_L + \overline{u}_R)\mathcal{O}(u_L + u_R) = \overline{u}_L\mathcal{O}u_L + \overline{u}_R\mathcal{O}u_R$$

Nel caso di interazione scalare, pseudoscalare o tensoriale, gli operatori I, γ_5, $\gamma_\mu\gamma_\nu$ commutano con i proiettori e quindi l'interazione non conserva l'elicità

$$\overline{u}_L\mathcal{O}u_L = \overline{u}\frac{1+\gamma_5}{2}\mathcal{O}\frac{1-\gamma_5}{2}u = 0 \qquad \overline{u}_R\mathcal{O}u_R = \overline{u}\frac{1-\gamma_5}{2}\mathcal{O}\frac{1+\gamma_5}{2}u = 0$$

Nel caso invece di interazione vettoriale o assial-vettoriale, gli operatori γ_μ e $\gamma_\mu\gamma_5$ anticommutano con γ_5 e si annullano i termini misti

$$\overline{u}_L\mathcal{O}u_R = \overline{u}\frac{1+\gamma_5}{2}\mathcal{O}\frac{1+\gamma_5}{2}u = 0 \qquad \overline{u}_R\mathcal{O}u_L = \overline{u}\frac{1-\gamma_5}{2}\mathcal{O}\frac{1-\gamma_5}{2}u = 0$$

Quindi a energia elevata l'elicità dei fermioni *si conserva in interazioni vettoriali o assial-vettoriali.*

4.18.8 Soluzioni per massa nulla

Il limite $m \to 0$ dell'equazione di Dirac descrive gli stati dei fermioni di massa nulla, i *neutrini*. L'equazione diventa $\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$ e le equazioni agli autovalori diventano

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \qquad E = \pm\,|\vec{p}| \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,u_B = p\,u_A \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,u_A = -p\,u_B \end{array}$$

Gli autostati di queste equazioni coincidono con gli autostati di elicità, ma questo è possibile solo per due soluzioni e non per quattro. Infatti le equazioni agli autovalori sono degeneri per $m = 0$ e l'equazione di Dirac si riduce ad una equazione a due sole componenti. Le due equazioni, corrispondenti ai due valori di energia, si ottengono l'una dall'altra con la trasformazione di parità, $P\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} = -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$.

L'equazione a due componenti era stata originariamente introdotta da Weyl nel 1929, ma non aveva avuto molto seguito appunto perché non è invariante per trasformazione di parità. Infatti, se il vettore a due componenti $\psi(\vec{r},t)$ soddisfa l'equazione di Weyl

$$(i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} + i\partial_4)\psi = 0$$

non esiste una matrice 2×2 che trasformi l'equazione in modo che $\psi(-\vec{r},t) = P\psi(\vec{r},t)$ sia una soluzione

$$P^{-1}(-i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} + i\partial_4)P \neq i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} + i\partial_4$$

Molti anni dopo si è osservato che le interazioni dei neutrini non conservano la parità.

Gli stati possibili per i neutrini sono due, $u = u_R$ e $u = u_L$, e non sono possibili transizioni tra i due stati mediante una trasformazione di Lorentz. D'altra parte le coppie di soluzioni dell'equazione di Dirac si ottengono l'una dall'altra con la trasformazione di coniugazione di carica. Quindi, delle quattro combinazioni, solo due sono possibili

	neutrino right-handed	e	*anti-neutrino left-handed*
oppure	*neutrino left-handed*	e	*anti-neutrino right-handed*

La misura dell'elicità del neutrino mostra che la seconda è la combinazione corretta: i possibili stati sono $\mid \nu, L \rangle$ e $|\overline{\nu}, R \rangle$. Con un ragionamento simile al precedente possiamo convincerci che l'equazione di Weyl non è neppure invariante per coniugazione di carica. Quindi

$$P|\nu, L\rangle = 0 \qquad C|\nu, L\rangle = 0 \qquad P|\overline{\nu}, R\rangle = 0 \qquad C|\overline{\nu}, R\rangle = 0$$

La trasformazione *Coniugazione di carica* $\times$ *Parità* non cambia la forma dell'equazione di Weyl che è quindi invariante per trasformazione CP e gli autostati si trasformano l'uno nell'altro

$$CP|\nu, L\rangle = |\overline{\nu}, R\rangle \qquad\qquad CP|\overline{\nu}, R\rangle = |\nu, L\rangle$$

4.19 Teoria delle perturbazioni

L'ampiezza di transizione dallo stato iniziale ψ_i allo stato finale ψ_f per effetto di una hamiltoniana di interazione H dipendente dal tempo si ottiene come sviluppo in serie (appendice ???)

$$A_{i\to f} = \frac{1}{i\hbar} \int_o^t \int \psi_f^*(\vec{r})\ H(\vec{r}, t')\ \psi_i(\vec{r})\ e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar}\ d\vec{r}\ dt'\ + \ldots$$

In teoria quantistica relativistica dei campi si deriva una forma analoga dove ψ_i e ψ_f^* sono *operatori di assorbimento e di emissione*, ripettivamente dello stato $|i\rangle$ e dello stato $|f\rangle$, in analogia con quelli introdotti per rappresentare il campo elettromagnetico (appendice 4.13).

4.19.1 Il propagatore

Per calcolare l'evoluzione degli stati di particelle soggette a mutua interazione per effetto di una hamiltoniana dipendente dal tempo $H(\vec{r}, t)$ facciamo l'ipotesi che la soluzione per $t \to \pm\infty$ sia autofunzione della hamiltoniana della particella libera, cioè $H(r, t) \to 0$ per $t \to \pm\infty$. Se $\psi_o(\vec{r}, t)$ è una soluzione della hamitoniana H_o nel punto $(\vec{r}, t)$, l'equazione del moto

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_o\right] \psi(\vec{r}, t) = H(\vec{r}, t)\ \psi(\vec{r}, t)$$

si può risolvere sotto forma di equazione integrale

$$\psi(\vec{r'},t') = \psi_o(\vec{r'},t') + \frac{1}{i\hbar}\int G_o(\vec{r'},t';\vec{r},t)\ H(\vec{r},t)\ \psi(\vec{r},t)\ d\vec{r}dt$$

dove $G_o(\vec{r'},t';\vec{r},t)$ è la soluzione per una sorgente di interazione puntiforme

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_o\right] G_o(\vec{r'},t';\vec{r},t) = i\hbar\ \delta(\vec{r}-\vec{r'})\ \delta(t-t')$$

La funzione di Green $G_o(\vec{r'},t';\vec{r},t)$ è il *propagatore della particella libera* dal punto $(\vec{r},t)$ al punto $(\vec{r'},t')$. Se l'interazione è invariante per traslazioni nello spazio-tempo il propagatore $G_o(x,x')$ è funzione della differenza $x-x'$, dove x è il 4-vettore $(\vec{r},ct)$.

Si ottiene la soluzione come sviluppo in serie

$$\psi(x') = \int G_o(x'-x)\psi_o(x)d^4x + \frac{1}{i\hbar c}\int\int G_o(x'-x_1)H(x_1)G_o(x_1-x)\psi_o(x)\ d^4x_1d^4x +$$

$$+ \frac{1}{(i\hbar c)^2}\int\int\int G_o(x'-x_2)H(x_2)G_o(x_2-x_1)H(x_1)G_o(x_1-x)\psi_o(x)\ d^4x_2d^4x_1d^4x + \ldots$$

che rappresenta la propagazione della particella libera tra i punti x_k in cui avviene l'interazione e l'integrale va calcolato sul *prodotto tempo-ordinato* $t_k > \ldots > t_2 > t_1$. Nel limite $t \to -\infty$, $t' \to +\infty$, $\psi_o(x)$ e $\psi(x')$ sono soluzioni di particella libera. Questa condizione è ben verificata se l'osservazione dello stato iniziale e dello stato finale avvengono molto prima e molto dopo l'interazione.

L'ampiezza di transizione dallo stato iniziale allo stato finale si ottiene come sviluppo in serie

$$A_{i\to f} = \int \psi_f^*(x')\,[\ldots]\,\psi_i(x)\ d^4xd^4x' = \sum_k A_{fi}^k$$

con

$$A_{fi}^0 = \delta_{fi} \qquad A_{fi}^1 = \frac{1}{i\hbar c}\int \psi_f^*(x_1)\ H(x_1)\ \psi_i(x_1)\ d^4x_1$$

$$A_{fi}^2 = \frac{1}{(i\hbar c)^2}\int_{t_2>t_1} \psi_f^*(x_1)\ H(x_1)G_o(x_1,x_2)H(x_2)\ \psi_i(x_2)\ d^4x_1d^4x_2 \quad \ldots$$

Per derivare la forma esplicita del propagatore di una particella con 4-impulso q, consideriamo la anti-trasformata di Fourier

$$G(x_2-x_1) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathcal{G}(q)\ e^{-iq\cdot(x_2-x_1)}\ d^4q$$

- per l'equazione di Klein-Gordon abbiamo

$$\left[g_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right] G_o(x-x_1) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathcal{G}(q)\left[-q^2+m^2\right] e^{-iq\cdot(x-x_1)}\ d^4q$$

- per l'equazione di Dirac il propagatore è una matrice 4×4

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\, G_o(x - x_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathcal{G}(q)\, [\gamma^\mu q_\mu - m]\, e^{-iq\cdot(x-x_1)}\ d^4q$$

Esprimendo la funzione di Dirac, $\delta^4(x_2 - x_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-iq\cdot(x_2-x_1)}\ d^4q$, otteniamo la forma del *propagatore nello spazio degli impulsi* per un bosone e per un fermione

$$\mathcal{G}_B(q) = \frac{1}{q^2 - m^2}\ \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}\right) \qquad\qquad \mathcal{G}_F(q) = \frac{1}{\gamma^\mu q_\mu - m} = \frac{\gamma^\mu q_\mu + m}{q^2 - m^2}$$

Nota: $q^2 = m^2$ per la particella libera, ma $q^2 \neq m^2$ per il propagatore della particella *virtuale* nel percorso tra l'interazione $H(x_1)$ e l'interazione $H(x_2)$.

4.19.2 I grafici di Feynman

I grafici di Feynman rappresentano in modo grafico il metodo di calcolo dell'ampiezza di transizione dei processi di interazione in teoria dei campi. Diamo alcune definizioni:

- per il processo $1 + 2 \to 3 + \ldots + n$ gli stati iniziali e finali sono autostati di particella libera

$$\psi(x) = u(\vec{p})\ e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}$$

  dove la funzione $u(\vec{p})$ caratterizza il tipo di particella, bosone o fermione;

- l'ampiezza di transizione dallo stato iniziale $\psi_i(x)$ allo stato finale $\psi_f(x')$ per azione della hamiltoniana di interazione H è espressa dallo sviluppo in serie

$$A_{i\to f} = \frac{1}{i\hbar c} \int \psi_f^+(x_1) H(x_1) \psi_i(x_1)\ d^4x_1 +$$

$$-\frac{1}{(\hbar c)^2} \int\int \psi_f^+(x_2) H(x_2) G_o(x_2 - x_1) H(x_1) \psi_i(x_1)\ d^4x_1\ d^4x_2\ + \ldots$$

- i campi dei fermioni e dei bosoni si esprimono in funzione degli operatori di emissione e assorbimento:
  $\psi_p^+(x)$ emette una particella con 4-impulso p nel punto x dello spazio tempo,
  $\psi_{p'}(x')$ assorbe una particella con 4-impulso p' nel punto x';

- lo spazio-tempo è rappresentato nel piano $\vec{r} - t$; per ciascun punto nel piano il cono di luce, $r = \pm ct$, definisce passato, presente e futuro;

- una particella con 4-impulso p è rappresentata da una linea nel piano; linee con $p^2 = m^2$ rappresentano particelle libere, con $p^2 > m^2$ rappresentano propagatori di *tipo tempo*, con $p^2 < -m^2$ propagatori di *tipo spazio*;

- particelle con 4-impulso p che si propagano nel verso $+t$ sono equivalenti a anti-particelle che si propagano nel verso $-t$;

- l'emissione di una particella con 4-impulso p nel punto x dello spazio-tempo è equivalente all'assorbimento nello stesso punto di una anti-particella con lo stesso valore di 4-impulso;
- in una interazione nel punto x, rappresentata dal fattore $H(x)$, si conservano tutte le grandezze che commutano con H.

Consideriamo come esempio l'interazione elettromagnetica dei fermioni. La teoria della elettrodinamica quantistica, QED, è stata sviluppatata da Feynman, Schwinger e Tomonaga [3]. La hamiltoniana di interazione è il prodotto scalare della densità di corrente per il potenziale elettromagnetico

$$H(x) = e\ J(x) \cdot A(x) \qquad J(x) = (\vec{j}, \rho c) \qquad A = (\vec{A}, V/c)$$

Nota: nel seguito usiamo la convenzione $\hbar = 1$, $c = 1$.
Esprimendo le correnti e i campi in funzione degli operatori di emissione e assorbimento, il primo termine dello sviluppo in serie è proporzionale all'integrale di

$$\sum_{\mu}\ e\ \overline{\psi}_1(x)\gamma_\mu\psi_2(x)\ A_\mu(x)$$

con

$$\overline{\psi}_1(x) = (2E_1)^{-1/2}\ u^+(p_1, s_1)\gamma_4\ e^{-ip_1\cdot x} \qquad \psi_2(x) = (2E_2)^{-1/2}\ u(p_2, s_2)\ e^{+ip_2\cdot x}$$

$$A_\mu(x) = (2\omega)^{-1/2}\ \hat{\epsilon}_\mu\ \left[a(k)\ e^{+ik\cdot x} + a^+(k)\ e^{-ik\cdot x}\right]$$

I grafici al *primo ordine* (Fig.4.20) sono rappresentati da un vertice in cui confluiscono tre linee e le ampiezze di transizione sono proporzionali alla carica elettrica e

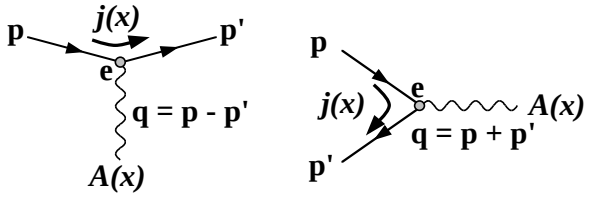


Figure 4.20: Grafici di Feynman al primo ordine

- emissione di un fotone da un elettrone (positrone): $e^- \to e^-\gamma$ ($e^+ \to e^+\gamma$);
- assorbimento di un fotone da un elettrone (positrone): $\gamma e^- \to e^-$ ($\gamma e^+ \to e^+$);
- annichilazione elettrone-positrone in un fotone $e^-e^+ \to \gamma$;
- conversione di un fotone in elettrone-positrone $\gamma \to e^-e^+$.

[3] premi Nobel per la Fsica nel 1965

Nota: l'integrale della funzione $e^{i(p_2-p_1\pm q)\cdot x}$ implica la conservazione del 4-impulso nel vertice; quindi *nessuno di questi processi rappresenta un fenomeno fisico* perché non si conserva il 4-impulso. Nella trattazione nel capitolo ??? dell'emissione e assorbimento di fotoni da elettroni abbiamo fatto l'ipotesi che il nucleo atomico con massa $M \gg m_e$, $M \gg E_\gamma$, bilanciasse l'impulso senza acquistare energia cinetica.

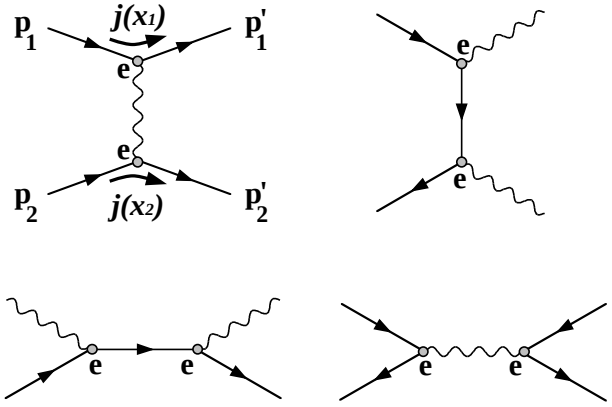


Figure 4.21: Esempi di grafici di Feynman al secondo ordine

Nei grafici al *secondo ordine* (Fig.4.21) una particella emessa (assorbita) nel vertice **1** viene assorbita (emessa) nel vertice **2** e si somma su tutti i possibili percorsi dallo stato iniziale allo stato finale: $|i\rangle \to \mathbf{1} \to \mathbf{2} \to |f\rangle$, $|i\rangle \to \mathbf{2} \to \mathbf{1} \to |f\rangle$. L'interazione in ogni vertice è proporzionale alla carica elettrica. L'ampiezza di transizione è proporzionale a e^2 e al *propagatore* della particella con 4-impulso q scambiata nel percorso $\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{2}$.

I processi al secondo ordine sono:

- scattering $e^-e^- \to e^-e^-$, $e^+e^+ \to e^+e^+$, $e^+e^- \to e^+e^-$: $q = p_1 - p_1'$;
- effetto Compton $\gamma e^- \to \gamma e^-$ ($\gamma e^+ \to \gamma e^+$): $q = p_1 + p_2$;
- annichilazione $e^+e^- \to \gamma\gamma$ ($\gamma\gamma \to e^+e^-$): $q = p_1 - p_1'$;
- annichilazione $e^+e^- \to e^+e^-$: $q = p_1 + p_2$.

Nota: nei processi di scattering e annichilazione $e^+e^- \to e^+e^-$ gli stati iniziali e finali sono uguali e quindi l'ampiezza è la somma delle due ampiezze.

Esempi di processi al *terzo ordine* (Fig.4.22) con ampiezza di transizione proporzionale a e^3:

- irraggiamento $ee \to ee\gamma$;
- produzione di coppie $\gamma e \to e^+e^-e$;
- annichilazione $e^+e^- \to \gamma\gamma\gamma$.

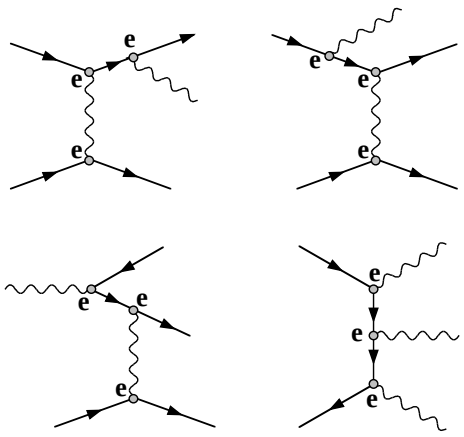


Figure 4.22: Esempi di grafici di Feynman al terzo ordine

Per un processo elettromagnetico con stato iniziale ψ_i e stato finale ψ_f la sezione d'urto è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza di transizione $A_{i\to f}$ che si esprime come serie di potenze della costante di accoppiamento α (Fig.4.23)

$$\sigma \propto |\alpha A_2 + \alpha^2 A_4 + \ldots|^2 = \alpha^2 |A_2|^2 + \alpha^3 (A_2^* A_4 + A_2 A_4^*) + \alpha^4 (|A_4|^2 + \ldots) + \ldots$$

La serie converge rapidamente poiché $\alpha \ll 1$ e di solito il calcolo all'ordine α^2 fornisce una approssimazione molto buona.

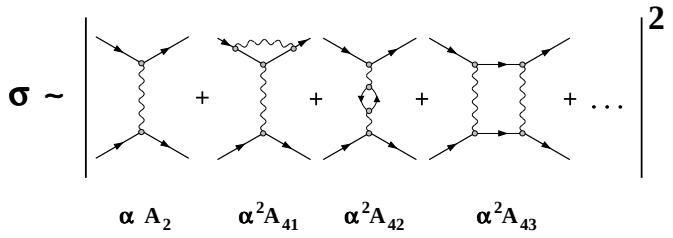


Figure 4.23: Sezione d'urto come somma di grafici di Feynman

4.20 Correzioni radiative

Nei capitoli precedenti abbiamo studiato l'interazione tra cariche elettriche e abbiamo ricavato le sezioni d'urto utilizzando la hamiltoniana di interazione elettromagnetica corrente-campo $H(x) = J(x) \cdot A(x)$ con $J_\mu = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$. L'elemento di matrice è proporzionale al prodotto delle cariche elettriche delle particelle interagenti e al propagatore del campo. Questo, al primo ordine dello sviluppo perturbativo, $\mathcal{O}(e^2)$, è $I_1(q^2) = 1/q^2$. Per avere il valore completo dello sviluppo in serie dobbiamo tener conto dei contributi al secondo, terzo, ... ordine. I grafici al secondo ordine, $\mathcal{O}(e^4)$, che cambiano l'elemento di matrice sono mostrati in Fig.4.24. Il contributo

al propagatore per un fermione di massa m dovuto al grafico di Fig.4.24a è

$$I_2(q^2) = I_1(q^2)\ \left[-q^2\mathcal{J}(q^2)\right]\ I_1(q^2)$$

$$\mathcal{J}(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\int_{m^2}^{\infty}\frac{dp^2}{p^2} - \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 \ln\left[1 - x(1-x)\frac{q^2}{m^2}\right] x(1-x)\ dx$$

con $\alpha = e^2/4\pi$. Il primo integrale va esteso a tutti i possibili valori dell'impulso della coppia fermione-antifermione e diverge. Si introduce quindi un limite superiore di integrazione M che però non deve avere influenza sul risultato finale del calcolo perché il risultato di una misura di sezione d'urto è una quantità finita. q^2 è negativo per 4-impulsi space-like; usiamo $Q^2 = -q^2 > 0$ se vi sono logaritmi. Il risultato dell'integrale è

- per $Q^2 \ll m^2$: $\mathcal{J}(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2} - \frac{\alpha}{15\pi}\frac{Q^2}{m^2}$
- per $Q^2 \gg m^2$: $\mathcal{J}(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2} - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{Q^2}{m^2} = \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{Q^2}$

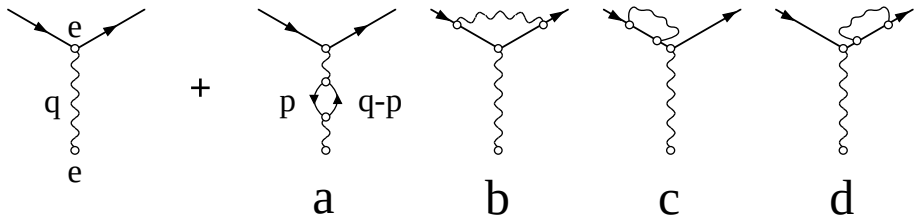


Figure 4.24: Grafici al primo ordine, $\mathcal{O}(e^2)$, e al secondo ordine, $\mathcal{O}(e^4)$, dell'interazione elettromagnetica

Il propagatore viene modificato dai contributi degli ordini superiori dello sviluppo in serie; per $Q^2 \ll m^2$ si ha

$$\frac{1}{q^2} \to \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2}\left(\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2} - \frac{\alpha}{15\pi}\frac{Q^2}{m^2}\right) + \ldots$$

Introducendo la carica elettrica, $\alpha = e_0^2/4\pi$, l'elemento di matrice e' proporzionale a

$$H(q^2) \propto \frac{e_0^2}{q^2}\left(1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2} + \frac{e_0^2}{60\pi^2}\frac{Q^2}{m^2} + \ldots\right)$$

e diverge per $M \to \infty$. Possiamo assorbire il contributo del termine divergente *ridefinendo* la carica elettrica

$$e^2 = e_0^2\left(1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2}\right)$$

dove e_0 è la carica elettrica *nuda*, cioè non *rivestita* dagli effetti dell'interazione con il campo elettromagnetico agli ordini superiori, e e è la carica elettrica *effettiva* che

si misura in un esperimento con 4-impulso trasferito q. Con questa ridefinizione della carica elettrica l'elemento di matrice diventa una quantità finita

$$H(q^2) \propto \frac{e^2}{q^2}\left(1 - \frac{e^2}{60\pi^2}\frac{q^2}{m^2} + \ldots\right)$$

Il contributo del grafico di Fig.4.24b introduce una correzione al *vertice di interazione*

$$\frac{1}{q^2} \to \frac{1}{q^2}\left(1 + \frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left[\ln\frac{m^2}{m_\gamma^2} - \frac{3}{8}\right] + \frac{\alpha}{2\pi}\frac{i\,\vec{\sigma}\cdot\vec{q}}{2m}\right)$$

dove si è introdotta una massa del fotone per evitare la divergenza del secondo termine per $m_\gamma \to 0$, e $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli. Il terzo termine introduce una modifica al momento magnetico del fermione. Questo è definito $\vec{\mu} = \frac{e}{2m}\vec{\sigma}$ e $\vec{s} = \vec{\sigma}/2$ è lo spin. Il fattore giromagnetico del fermione viene modificato rispetto al valore $g = 2$ della teoria di Dirac (appendice 4.18)

$$g = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \ldots\right)$$

I grafici di Fig.4.24c e 4.24d indroducono una correzione di ordine α anche essa proporzionale a $\frac{q^2}{m^2}\ln\frac{m^2}{m_\gamma^2}$ con il risultato che le divergenze per $m_\gamma \to 0$ dei grafici 4.24b, 4.24c e 4.24d si cancellano esattamente. Quindi il risultato delle correzioni radiative al primo ordine è

- la carica elettrica è modificata dal grafico di Fig.4.24a;
- la carica elettrica effettiva è definita dalla carica elettrica nuda e da un fattore infinito nel limite $M \to \infty$ e *non* è costante ma dipende dal valore del 4-impulso trasferito;
- il momento magnetico è modificato per un termine $1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \ldots$ per effetto del grafico di Fig.4.24b;
- per effetto della cancellazione dei contributi dei grafici b, c e d di Fig.4.24 la carica elettrica effettiva di fermioni di massa diversa è la stessa.

La tecnica di assorbire i termini divergenti $\sim \ln M$ nella ridefinizione della carica elettrica è chiamata *rinormalizzazione*. Una teoria è rinormalizzabile se i termini divergenti si cancellano a ogni ordine dello svilluppo in serie in modo che il valore calcolato delle quantità misurabili risulta finito a ogni ordine dello svilluppo in serie.

4.20.1 La polarizzazione del vuoto

Il fenomeno responsabile della dipendenza della carica elettrica dal 4-impulso trasferito è chiamato *polarizzazione del vuoto*. Una carica elettrica q immersa in un materiale polarizza il dielettrico e il valore del campo elettrico a distanza r è $q/4\pi\epsilon r^2$ dove

$\epsilon > 1$ è la costante dielettrica: la carica effettiva q/ϵ risulta più piccola. In meccanica quantistica la carica elettrica può polarizzare il vuoto. Infatti cariche elettriche di segno opposto, ad esempio coppie e^+e^-, si possono materializzare nel vuoto a condizione che l'energia necessaria ΔE soddisfi la relazione $\Delta E \Delta t < \hbar$. Per effetto del campo generato dalla carica i dipoli e^+e^- producono una densità di carica localmente diversa da zero e la carica q viene parzialmente schermata (Fig.4.25); l'effetto di schermo è minore per piccole distanze ovvero per 4-impulsi trasferiti grandi, cioè la carica elettrica effettiva aumenta con q^2.

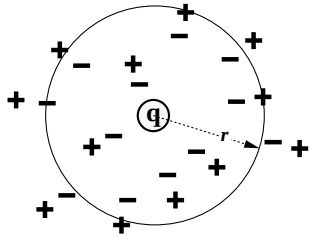


Figure 4.25: Polarizzazione del vuoto

4.20.2 La "costante" di accoppiamento

Per rendere quantitativa questa immagine calcoliamo il valore della carica elettrica effettiva. Nello sviluppo in serie il propagatore viene modificato dai grafici di Fig.4.26

$$I_1 = \frac{1}{q^2} \qquad I_2 = I_1\,[-q^2\mathcal{J}]\,I_1 \qquad I_3 = I_1\,[-q^2\mathcal{J}]\,I_1\,[-q^2\mathcal{J}]\,I_1 \quad \ldots$$

La somma dei contributi ai vari ordini è $I(q^2) = \frac{1}{q^2}\left[1 - \mathcal{J} + \mathcal{J}^2 - \mathcal{J}^3 + \ldots\right]$ e la carica elettrica effettiva risulta

$$e^2(q^2) = e_0^2\left[1 - \mathcal{J} + \mathcal{J}^2 - \mathcal{J}^3 + \ldots\right] = \frac{e_0^2}{1 + \mathcal{J}(q^2)}$$

Per valori di $Q^2 \gg m^2$, $\mathcal{J} \simeq \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{Q^2}$. La *costante* di accoppiamento, α, *non* è quindi costante, ma viene modificata

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{M^2}}$$

In questa espressione la *costante di accoppiamento nuda* α_0 non è una quantità definita e c'è ancora un termine divergente $\sim \ln M$, ma, invertendo la relazione, possiamo definire α_0 ad un valore di riferimento, $Q^2 = \mu^2$, detta *energia di rinormalizzazione*

$$\alpha_0 = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln \frac{\mu^2}{M^2}}$$

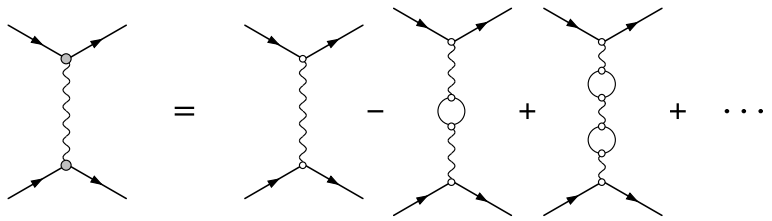


Figure 4.26: Rinormalizzazione della carica elettrica

e quindi esprimere la costante di accoppiamento in funzione del 4-impulso trasferito e del parametro μ^2

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

La costante di struttura fine è usualmente definita alla massa dell'elettrone, $\mu^2 = m_e^2$, ed è misurata con grande precisione, $1/\alpha(m_e^2) = 137.035\ 999\ 1 \pm 0.000\ 000\ 5$

In effetti non solo le coppie e^+e^- contribuiscono ai grafici di polarizzazione del vuoto, ma anche le coppie fermione-antifermione con massa $4m_f^2 < Q^2$. Quindi il fattore $\frac{1}{3\pi}$ va moltiplicato per il numero di fermioni (leptoni e quark) pesati per il valore di molteplicità (1 per i leptoni, 3 per i quark) e per il quadrato del valore della carica elettrica ($e_d = -\frac{1}{3}$, $e_u = \frac{2}{3}$) e $\alpha(Q^2)$ va calcolato al valore appropriato di μ^2

$$\frac{1}{3\pi} \to \frac{1}{3\pi}\left(n_\ell + \frac{1}{3}n_d + \frac{4}{3}n_u\right)$$

La costante di accoppiamento alla massa del bosone Z^0, $\alpha(m_Z^2) = 1/128$, differisce di $\simeq 6\%$ dal valore alla massa dell'elettrone.

4.21 Calcolo di alcuni processi elementari

4.21.1 Spazio delle fasi invariante

Il fattore $d\vec{r}d\vec{p}/(2\pi)^3$ introdotto nella densità degli stati non è invariante per trasformazioni di Lorentz. Introducendo la condizione di normalizzazione della densità di probabilità con $2E$ particelle per unità di volume, il fattore per una particella diventa

$$d^6n = \frac{d\vec{r}d\vec{p}}{(2\pi)^3 2E}$$

e per k particelle nello stato finale con 4-impulso totale P

$$d^{6k}n = (2\pi)^4\ \delta^4\left(\Sigma_j P_j - P\right) \prod_{j=1}^{k} \frac{V d\vec{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j}$$

dove la funzione $\delta^4(\ldots)$ tiene conto della conservazione del 4-impulso e $j = 1 \ldots k$. Se $V^{-1/2}$ è il fattore di normalizzazione delle funzioni d'onda, l'ampiezza di transizione A_{fi} del processo $a\ b \to \alpha\ \beta\ \ldots\ \kappa$ viene moltiplicata per il fattore $V^{-(2+k)/2}$.

La sezione d'urto differenziale si ottiene mediando $|A_{fi}|^2$ sugli stati di spin delle particelle iniziali, a b, sommando sugli stati finali, integrando la densità degli stati finali nell'intervallo delle variabili e dividendo per il flusso dello stato iniziale

$$d\sigma_{i\to f} = \frac{1}{\Phi_i}\ \frac{V^k}{V^{2+k}} \int_f \overline{|A_{fi}|^2}\ (2\pi)^4\ \delta^4\left(\Sigma_j P_j - P\right) \prod_{j=1}^{k} \frac{d\vec{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j}$$

Il flusso iniziale, con la stessa condizione di normalizzazione, è

$$\Phi_i = \frac{|\vec{v}_{ab}|}{V/2E_a\ V/2E_b}$$

Nell'espressione della sezione d'urto

$$d\sigma_{i\to f} = \frac{1}{|\vec{v}_{ab}|}\ \frac{(2\pi)^4}{2E_a\ 2E_b} \int_f \overline{|A_{fi}|^2}\ \delta^4\left(\Sigma_j P_j - P\right) \prod_{j=1}^{k} \frac{d\vec{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j}$$

non compare il volume di normalizzazione che quindi nel seguito assumiamo unitario. I termini $d\vec{p}/E$ sono invarianti. Anche il termine $|\vec{v}_{ab}|E_aE_b$ è invariante. Infatti, $\vec{v}_a \parallel \vec{v}_b$ e si ha:

$$\left|\frac{\vec{p}_a}{E_a} - \frac{\vec{p}_b}{E_b}\right| E_aE_b = |\vec{p}_aE_b - \vec{p}_bE_a| = |\vec{p}_a|E_b + |\vec{p}_b|E_a = \left[(P_a \cdot P_b)^2 - (m_am_b)^2\right]^{1/2}$$

Analogamente, per la larghezza di decadimento del processo $a \to \alpha\ \beta\ \ldots\ \kappa$. Nel riferimento della particella a la probabilità di decadimento è

$$d\Gamma_{i\to f} = \frac{1}{2m_a} \int_f \overline{|A_{fi}|^2}\ \delta^4\left(\Sigma_j P_j - P\right) \prod_{j=1}^{k} \frac{d\vec{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j}$$

Esempio: decadimento $M \to m_1\ m_2$

Il decadimento è descritto da 6 variabili con 4 condizioni, quindi 2 variabili libere che sono i due angoli di decadimento, θ ϕ, nel riferimento della particella M

$$\rho(E)d\Omega = \int \frac{1}{2M}\ \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\ \delta(E_1 + E_2 - M)\ \frac{d\vec{p_1}}{2E_1}\ \frac{d\vec{p_2}}{2E_2} =$$

$$= \int \frac{1}{8ME_1E_2}\ \delta(E_1 + E_2 - M)\ p_1^2 dp_1 d\Omega_1 = \int \frac{1}{8ME_1E_2}\ \delta[f(p_1)]\ p_1^2\ dp_1 d\Omega_1 =$$

- $f(p) = (p^2 + m_1^2)^{1/2} + (p^2 + m_2^2)^{1/2} - M$; $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{p}{E_1} + \frac{p}{E_2} = \frac{E_1+E_2}{E_1E_2}\ p$

$$= \int \frac{1}{8ME_1E_2}\ \frac{E_1E_2}{Mp_1}\ p_1^2\ d\Omega_1 = \frac{p_1}{8M^2}\ d\Omega_1$$

e quindi otteniamo la largezza di decadimento in funzione dell'impulso e dell'angolo delle due particelle nel centro di massa

$$d\Gamma(M \to m_1\ m_2) = \overline{|A_{fi}|^2}\ \frac{p}{8M^2}\ d\Omega$$

Esempio: decadimento $M \to m_1\ m_2\ m_3$

In questo caso ci sono 9 variabili con 4 condizioni, quindi 5 variabili libere

$$\int \frac{1}{2M}\ \delta^3(\vec{p_1}+\vec{p_2}+\vec{p_3})\ \delta(E_1+E_2+E_3-M)\ \frac{d\vec{p_1}}{2E_1}\ \frac{d\vec{p_2}}{2E_2}\ \frac{d\vec{p_2}}{2E_2} =$$

$$= \int \frac{1}{16ME_1E_2E_3}\ \delta(E_1+E_2+E_3-M)\ p_1^2\ dp_1\ d\Omega_1\ p_2^2\ dp_2\ d\Omega_2 =$$

possiamo integrare nella direzione di una particella, $d\Omega_1$, e nell'angolo azimutale della seconda particella rispetto alla direzione della prima, $d\phi_2$, e rimangono 2 variabili libere

$$= \int \frac{8\pi^2}{16ME_1E_2E_3}\ \delta(E_1+E_2+E_3-M)\ p_1^2\ p_2^2\ dp_1\ dp_2\ d\cos\theta =$$

$$= \int \frac{\pi^2}{2ME_1E_2E_3}\ \delta[f(p_i,p_2,\cos\theta)]\ p_1^2\ p_2^2\ dp_1\ dp_2\ d\cos\theta =$$

- $f(p_1,p_2,\cos\theta) = (p_1^2+m_1^2)^{1/2}+(p_2^2+m_2^2)^{1/2}+(p_1^2+2p_1p_2\cos\theta+p_2^2+m_3^2)^{1/2}-M$; $\partial f/\partial\cos\theta = p_1p_2/E_3$

$$= \int \frac{\pi^2}{2ME_1E_2E_3}\ \frac{E_3}{p_1p_2}\ p_1^2\ p_2^2\ dp_1\ dp_2 = \int \frac{\pi^2}{2ME_1E_2E_3}\ E_3\ E_1\ E_2\ dE_1\ dE_2$$

Risulta che *la densità degli stati di tre particelle è uniforme*

$$\rho(E)dE_1dE_2 = \frac{\pi^2}{2M}\ dE_1dE_2$$

e la larghezza di decadimento in funzione delle energie di due particelle è

$$d^2\Gamma(M \to m_1\ m_2\ m_3) = \overline{|A_{fi}|^2}\ \frac{\pi^2}{2M}\ dE_1dE_2$$

4.21.2 Processi $a\ b \to c\ d$

Questi processi sono rappresentati da grafici di Feynman al secondo ordine. I 4-impulsi delle quattro particelle sono legati dalla relazione $P_a + P_b = P_c + P_d$ e possiamo costruire due invarianti relativistici indipendenti. È comodo introdurre gli *invarianti di Mandelstam*

$$s = (P_a+P_b)^2 \qquad t = (P_a-P_c)^2 \qquad u = (P_a-P_d)^2$$

che sono legati dalla relazione

$$s+t+u = P_a^2+2P_a\cdot P_b+P_b^2+P_a^2-2P_a\cdot P_c+P_c^2+P_a^2-2P_a\cdot P_d+P_d^2 =$$

$$= P_a^2 + P_b^2 + P_c^2 + P_d^2 + 2P_a \cdot (P_a + P_b - P_c - P_d) = \sum_{k=1}^{4} m_k^2$$

s è il quadrato dell'energia totale, t e u sono il quadrato del 4-impulso trasferito $a \to c$, $a \to d$. Per la proprietà di simmetria dei grafici di Feynman rispetto all'assorbimento e emissione di particelle e anti-particelle, l'ampiezza dei processi $a\bar{c} \to \bar{b}d$ e $\bar{d}b \to c\bar{a}$ si ottengono dall'ampiezza del processo $ab \to cd$ con opportuno scambio delle variabili di Mandelstam. Questa proprietà è detta *simmetria di incrocio*.

Calcoliamo la sezione d'urto differenziale

$$d\sigma(ab \to cd) = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{|\vec{v}_{ab}| E_a E_b} \int_f \overline{|A_{fi}|^2}\ \delta^4(P_a + P_b - P_c - P_d)\ \frac{d\vec{p}_c}{E_c}\ \frac{d\vec{p}_d}{E_d}$$

nel riferimento del centro di massa

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_c + \vec{p}_d = 0 \qquad p_i = |\vec{p}_a| = |\vec{p}_b| \qquad p_f = |\vec{p}_c| = |\vec{p}_d| \qquad s = (E_a + E_b)^2$$

$$|\vec{v}_{ab}| E_a E_b = |\vec{p}_a| E_b + |\vec{p}_b| E_a = p_i \sqrt{s}$$

le variabili libere sono gli angoli di diffusione θ, ϕ

$$\int \delta^4(P_a + P_b - P_c - P_d)\ \frac{d\vec{p}_c}{E_c}\ \frac{d\vec{p}_d}{E_d} = \int \delta(\sqrt{s} - E_c - E_d)\ \frac{p_c E_c dE_c d\Omega_c}{E_c E_d} = \frac{p_f}{\sqrt{s}}\ d\Omega$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{64\pi^2}\ \frac{1}{s}\ \frac{p_f}{p_i}\ \overline{|A_{fi}|^2}$$

Scattering $e^- \mu^+ \to e^- \mu^+$

Il grafico di Feynman è mostrato in figura 4.27: nel punto x_1 viene assorbito l'elettrone di 4-impulso p_a, emesso l'elettrone di 4-impulso p_c e emesso (assorbito) un fotone virtuale di 4-impulso $q = p_a - p_c$ ($q = -p_a + p_c$); nel punto x_2 viene assorbito il $\overline{\mu}$ di 4-impulso p_b, emesso il $\overline{\mu}$ di 4-impulso p_d e assorbito (emesso) il fotone virtuale di 4-impulso $q = -p_b + p_d$ ($q = p_b - p_d$). L'ampiezza di transizione è l'integrale

$$A = \int j_e^{\lambda}(x_1)\ G(x_1 - x_2)\ j_{\mu\lambda}(x_2)\ d^4x_1 d^4x_2$$

$$j_\lambda = e\overline{\psi}\gamma_\lambda\psi \qquad \overline{\psi} = \overline{u}(p,s)\ e^{-ip\cdot x} \qquad \psi = u(p,s)\ e^{ip\cdot x}$$

e $G(x_1 - x_2)$ è il propagatore del campo elettromagnetico

$$A = \int e\overline{u}_c \gamma^\lambda u_a\ e^{i(p_a - p_c)\cdot x_1}\ \frac{e^{-iq\cdot(x_1 - x_2)}}{(2\pi)^4 q^2}\ e\overline{u}_d \gamma_\lambda u_b\ e^{i(p_b - p_d)\cdot x_2}\ d^4x_1 d^4x_2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \overline{u}_c \gamma^\lambda u_a\ \frac{e^2}{q^2}\ \overline{u}_d \gamma_\lambda u_b\ e^{i(p_a - p_c - q)\cdot x_1}\ e^{i(p_b - p_d + q)\cdot x_2}\ d^4x_1 d^4x_2$$

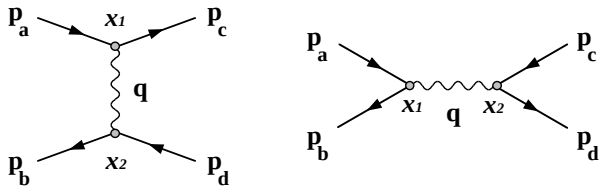


Figure 4.27: Grafici di Feynman $ab \to cd$ al secondo ordine: scattering e annichilazione

$$= \overline{u}_c \gamma^\lambda u_a \; \frac{e^2}{q^2} \; \overline{u}_d \gamma_\lambda u_b \; (2\pi)^4 \; \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d)$$

La media sugli spin dello stato iniziale e la somma sugli spin dello stato finale è un calcolo complesso che non riportiamo; il risultato è

$$\overline{|A_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} \left[(p_a \cdot p_b)(p_c \cdot p_d) + (p_a \cdot p_d)(p_c \cdot p_b) - m_a^2 \; p_b \cdot p_d - m_b^2 \; p_a \cdot p_c + 2 m_a^2 m_b^2 \right]$$

- Consideriamo l'urto nel riferimento in cui la particella b è inizialmente in quiete

  $$p_a = (\vec{p}, E) \qquad p_b = (0, M) \qquad p_c = (\vec{p'}, E') \qquad q = (\vec{q}, \nu) = (\vec{p} - \vec{p'}, E - E')$$

  e supponiamo che $E \gg m_a$, $E' \gg m_c$, cioè $p_a^2 = p_c^2 \approx 0$, $q^2 \approx -2 p_a \cdot p_c$; con queste ipotesi

  $$q^2 = -2EE' + 2\vec{p} \cdot \vec{p'} \approx -2EE'(1 - \cos\theta) = -4EE' \sin^2 \theta/2 = -Q^2$$

  $$p_d^2 = (p_b + q)^2 \qquad\qquad M^2 = M^2 + q^2 + 2 p_b \cdot q \qquad\qquad Q^2 = 2M\nu$$

Sostituendo $p_d = p_a + p_b - p_c$ e trascurando i termini in m_a^2

$$\overline{|A_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{Q^4} \; \left[(p_a \cdot p_c)(p_a \cdot p_b - p_c \cdot p_b) + 2 (p_a \cdot p_b)(p_c \cdot p_b) - M^2 \; p_a \cdot p_c \right]$$

$$= \frac{8e^4}{Q^4} \; \left[\frac{Q^2}{2} \; (EM - E'M) + 2 \; EM \; E'M - \; M^2 \frac{Q^2}{2} \right]$$

$$= \frac{8e^4}{Q^4} \; 2M^2 EE' \left[1 - \frac{Q^2}{4EE'} + \frac{Q^2}{4M^2} \frac{M(E - E')}{EE'} \right]$$

$$= \frac{16e^4}{Q^4} \; M^2 EE' \left[\cos^2 \theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2} \; 2 \sin^2 \theta/2 \right]$$

La sezione d'urto, con $|\vec{v}_{ab}| \approx c = 1$, si ottiene integrando sulle variabili di stato finale

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \; \frac{1}{EM} \int \overline{|A_{fi}|^2} \; \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d) \; \frac{d\vec{p}_c}{E_c} \; \frac{d\vec{p}_d}{E_d}$$

$$= \frac{1}{64\pi^2}\ \frac{1}{EM} \int \overline{|A_{fi}|^2}\ \delta^4(q + p_b - p_d)\ E_c dE_c d\Omega_c\ \frac{d\vec{p}_d}{E_d}$$

$$= \frac{1}{64\pi^2}\ \frac{1}{EM} \int \overline{|A_{fi}|^2}\ \delta^3(\vec{q} - \vec{p}_d)\ \delta(\nu + M - E_d)\ E_c dE_c d\Omega_c\ \frac{d\vec{p}_d}{E_d}$$

$$= \frac{1}{64\pi^2}\ \frac{1}{EM}\ \overline{|A_{fi}|^2}\ \frac{1}{M}\ \delta(\nu - Q^2/2M)\ E' dE' d\Omega'$$

Introducendo l'espressione dell'ampiezza di transizione e $\alpha = e^2/4\pi$

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega'}\right)_{lab} = \frac{1}{64\pi^2}\ \frac{1}{EM}\ \frac{16e^4}{Q^4}\ M^2 E E' \left[\cos^2\theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2}\ 2\sin^2\theta/2\right] \frac{E'}{M}\ \delta(\nu - Q^2/2M)$$

$$= \frac{4\alpha^2}{Q^4}\ E'^2 \left[\cos^2\theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2}\ 2\sin^2\theta/2\right]\ \delta(\nu - Q^2/2M)$$

Se la particella b non ha struttura, come abbiamo supposto, ci sono solo due variabili libere, gli angoli $\Omega' \equiv (\theta', \phi')$. La funzione $\delta(\nu - Q^2/2M)$ esprime la conservazione dell'energia per una particella bersaglio puntiforme

$$\nu - \frac{Q^2}{2M} = E - E' - \frac{4EE'}{2M}\sin^2\theta/2 = 0 \qquad\qquad E' = \frac{E}{1 + (2E/M)\sin^2\theta/2}$$

Integrando sull'energia E'

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \int \sigma(E', Q^2)\ \delta[E - E' - (2EE'/M)\sin^2\theta/2]\ dE' =$$

$$= \frac{\sigma(E', Q^2)}{\left|\frac{\partial}{\partial E'}\ E - E' - \frac{2EE'}{M}\sin^2\theta/2\right|} = \frac{\sigma(E', Q^2)}{1 + \frac{2E}{M}\sin^2\theta/2} = \sigma(E', Q^2)\ \frac{E'}{E}$$

otteniamo la *sezione d'urto di Dirac*

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\theta/2}\ \frac{E'}{E}\ \left[\cos^2\theta/2 + \frac{Q^2}{4M^2}\ 2\sin^2\theta/2\right]$$

Se possiamo trascurare anche la massa della particella b, l'espressione dell'ampiezza di transizione si semplifica ulteriormente

$$\overline{|A_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{q^4}\left[(p_a \cdot p_b)(p_c \cdot p_d) + (p_a \cdot p_d)(p_c \cdot p_b)\right]$$

In questo caso i prodotti scalari dei 4-impulsi si esprimono direttamente in funzione degli invarianti di Mandelstam

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2 = 2p_a \cdot p_b = 2p_c \cdot p_d$$

$$t = (p_a - p_c)^2 = (p_d - p_b)^2 = -2p_a \cdot p_b = -2p_b \cdot p_d = q^2$$

$$s = (p_a - p_d)^2 = (p_c - p_b)^2 = -2p_a \cdot p_d = -2p_c \cdot p_b$$

$$\overline{|A_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{q^4}\frac{s^2 + u^2}{4} = 2e^4\ \frac{s^2 + u^2}{t^2}$$

- Nel riferimento del centro di massa, $\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_c + \vec{p}_d = 0$,

$$s = 4p^2 \qquad t = -2p^2(1-\cos\theta) \qquad u = -2p^2(1-\cos(\pi-\theta)) = -2p^2(1+\cos\theta)$$

e la sezione d'urto differenziale, con $|\vec{v}_{ab}| = c = 1$, $p_i = p_f$, è

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{64\pi^2}\ \frac{2e^4}{s}\ \frac{s^2+u^2}{t^2} = \frac{\alpha^2}{2s}\ \frac{1+\cos^4\theta/2}{\sin^4\theta/2}$$

Annnichilazione $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$

Nel processo di scattering $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$ il fotone virtuale è di *tipo spazio* ($q^2 = t < 0$): è un *processo nel canale t*. Il processo di annichilazione $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ si ottiene dal precedente per simmetria di incrocio

$$e\ \overline{\mu} \to e\ \overline{\mu} \qquad \Leftrightarrow \qquad e\ \overline{e} \to \mu\ \overline{\mu}$$

scambiando i 4-impulsi $p_b \leftrightarrow -p_c$. Questo corrisponde allo scambio $s \leftrightarrow t$. Il fotone virtuale è di *tipo tempo* ($q^2 = s > 0$): è un *processo nel canale s* (Fig.4.27). L'ampiezza di diffusione diventa

$$\overline{|A_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{q^4}\left[(-p_a\cdot p_c)(-p_b\cdot p_d) + (p_a\cdot p_d)(p_c\cdot p_b)\right] = \frac{8e^4}{q^4}\frac{t^2+u^2}{4} = 2e^4\ \frac{t^2+u^2}{s^2}$$

- Nel riferimento del centro di massa

$$\overline{|A_{fi}|^2} = 2e^4\ \frac{(1-\cos\theta)^2 + (1+\cos\theta)^2}{4}$$

  dove θ è l'angolo $e \wedge \mu = \overline{e} \wedge \overline{\mu}$.

Al primo ordine dello sviluppo perturbativo l'annichilazione $e\ \overline{e} \to \mu\ \overline{\mu}$ avviene in uno stato $J^P = 1^-$, fermione e anti-fermione hanno nello stato iniziale e nello stato finale elicità opposta. $\overline{|A_{fi}|^2}$ risulta dalla somma di due ampiezze che non interferiscono e che corrispondono ai quattro casi

$$e_L\ \overline{e}_R \to \mu_L\ \overline{\mu}_R \qquad e_R\ \overline{e}_L \to \mu_R\ \overline{\mu}_L \qquad A \sim (1+\cos\theta)/2$$

$$e_L\ \overline{e}_R \to \mu_R\ \overline{\mu}_L \qquad e_R\ \overline{e}_L \to \mu_L\ \overline{\mu}_R \qquad A \sim (1-\cos\theta)/2$$

Per la conservazione dell'elicità, la prima si annulla per diffusione indietro, $\theta = \pi$, la seconda per diffusione in avanti, $\theta = 0$.

La sezione d'urto differenziale è, con le solite ipotesi,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{64\pi^2}\ \frac{2e^4}{s}\ \frac{1+\cos^2\theta}{2} = \frac{\alpha^2}{4s}\ (1+\cos^2\theta)$$

e, integrando sull'angolo solido

$$\sigma_{cm}(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+) = \int \frac{\alpha^2}{4s}\ (1+\cos^2\theta)\ d\cos\theta\ d\phi = \frac{4\pi}{3}\ \frac{\alpha^2}{s}$$

Scattering $e^-e^+ \to e^-e^+$

Questo processo può avvenire sia come diffusione nel canale t, con $q^2 = (p_a - p_c)^2 < 0$, che come annichilazione nel canale s, con $q^2 = (p_a + p_b)^2 > 0$. L'ampiezza di transizione è la somma dei due contributi e $\overline{|A_{fi}|^2}$ contiene i termini di scattering, di annichilazione e il termine di interferenza

$$\overline{|A_{fi}|^2} = 2e^4 \left[\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{st} + \frac{t^2+u^2}{s^2} \right]$$

La sezione d'urto nel riferimento del centro di massa è la *sezione d'urto di Bhabha*

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{1+\cos^4\theta/2}{\sin^4\theta/2} + 2\frac{\cos^4\theta/2}{\sin^2\theta/2} + \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \right]$$

Scattering $e^-e^- \to e^-e^-$

Questo processo avviene nel canale t, con $q^2 = (p_a - p_c)^2 < 0$. Poiché si tratta di due particelle indentiche, l'ampiezza di transizione è la somma di due contributi

$$e_1 e_2 \to e_1 e_2 \quad + \quad e_1 e_2 \to e_2 e_1$$

Il processo $e\ e \to e\ e$ si ottiene dallo scattering Bhabha per simmetria di incrocio

$$e\ \overline{e} \to e\ \overline{e} \quad \Leftrightarrow \quad e\ e \to e\ e$$

scambiando i 4-impulsi $p_b \leftrightarrow -p_d$. Questo corrisponde allo scambio $s \leftrightarrow u$.

$$\overline{|A_{fi}|^2} = 2e^4 \left[\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{ut} + \frac{t^2+s^2}{u^2} \right]$$

La sezione d'urto nel riferimento del centro di massa è la *sezione d'urto di Møller*

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{1}{\sin^4\theta/2} - \frac{2}{\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2} + \frac{1}{\cos^4\theta/2} \right]$$

Compton scattering $\gamma e^- \to \gamma e^-$

Lo scattering Compton è rappresentato da due grafici di Feynman (Fig.4.28). Nel primo, nel punto x_1 viene assorbito il fotone di 4-impulso k_a, assorbito l'elettrone di 4-impulso p_b e emesso l'elettrone virtuale di 4-impulso $q = k_a + p_b$; nel punto x_2 viene assorbito l'elettrone virtuale di 4-impulso $q = k_c + p_d$, emesso il fotone di 4-impulso k_c e emesso l'elettrone di 4-impulso p_d. Il propagatore ha 4-impulso $q^2 = (k_a + p_b)^2 = m^2 + 2k_a \cdot p_b$. Il secondo grafico ($k_a$ è assorbito in x_2 e k_c è emesso in x_1) si ottiene dal primo per simmetria di incrocio con lo scambio $k_a \leftrightarrow -k_c$, cioè $s \leftrightarrow u$. Il propagatore ha 4-impulso $q^2 = (-k_c + p_b)^2 = m^2 - 2k_c \cdot p_b$.

L'ampiezza di transizione è la somma di due contributi

$$A_{fi} = \int e\overline{u}_d \epsilon^*_{\mu c} \gamma^\mu\ e^{-i(k_c+p_d)x_2}\ \frac{\gamma^\lambda q_\lambda + m}{(2\pi)^4(q^2-m^2)}\ e^{iq(x_1-x_2)}\ e\gamma^\nu \epsilon_{\nu a} u_b\ e^{i(k_a+p_b)x_1}\ d^4x_1 d^4x_2$$

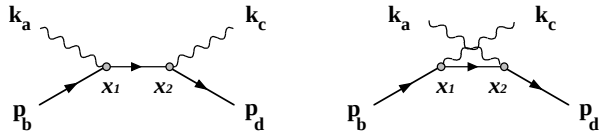


Figure 4.28: Grafici di Feynman dell'effetto Compton

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int e\overline{u}_d\epsilon^*_{\mu c}\gamma^\mu\ \frac{\gamma^\lambda q_\lambda + m}{q^2-m^2}\ e\gamma^\nu\epsilon_{\nu a}u_b\ e^{i(k_a+p_b-q)x_1}\ e^{i(q-k_c-p_d)x_2}\ d^4x_1d^4x_2$$

$$= \frac{e^2}{q^2-m^2}\ [\overline{u}_d\epsilon^*_{\mu c}\gamma^\mu]\ [\gamma^\lambda q_\lambda + m]\ [\gamma^\nu\epsilon_{\nu a}u_b]\ (2\pi)^4\ \delta^4(k_a+p_b-k_c-p_d)$$

con $q = k_a + p_b = k_c + p_d$, $q^2 - m^2 = 2k_a\cdot p_b = 2k_c\cdot p_d$. Il secondo contributo si ottiene in modo analogo

$$A_{fi} = \frac{e^2}{q^2-m^2}\ [\overline{u}_d\epsilon_{\mu a}\gamma^\mu]\ [\gamma^\lambda q_\lambda + m]\ [\gamma^\nu\epsilon^*_{\nu c}u_b]\ (2\pi)^4\ \delta^4(k_a+p_b-k_c-p_d)$$

con $q = -k_c + p_b = -k_a + p_d$, $q^2 - m^2 = -2k_c\cdot p_b = -2k_a\cdot p_d$.

Introducendo le variabili $\tilde{s} = 2k_a\cdot p_b = 2k_c\cdot p_d$, $\tilde{u} = -2k_c\cdot p_b = -2k_a\cdot p_d$, che approssimano gli invarianti di Mandelstam nel limite $m^2 \to 0$, sommando sugli stati di polarizzazione dei fotoni e di spin degli elettroni, si ottiene

$$\overline{|A_{fi}|^2} = 2e^4\left[-\frac{\tilde{s}}{\tilde{u}} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{s}} + 4m^2\left(\frac{1}{\tilde{s}}+\frac{1}{\tilde{u}}\right) + 4m^4\left(\frac{1}{\tilde{s}}+\frac{1}{\tilde{u}}\right)^2\right]$$

Nel riferimento in cui l'elettrone è inizialmente in quiete la cinematica è la stessa del processo $e\mu \to e\mu$ dove abbiamo trascurato m_e

$$k_a = (k,\omega) \qquad p_b = (0,m) \qquad k_c = (k',\omega') \qquad \omega' = \frac{m\omega}{m+\omega(1-\cos\theta)}$$

e con $\tilde{s} = m\omega$, $\tilde{u} = -m\omega'$

$$\cos\theta = 1-\left(\frac{m}{\omega'}-\frac{m}{\omega}\right) = 1+\left(\frac{2m^2}{\tilde{s}}+\frac{2m^2}{\tilde{u}}\right) \qquad \sin^2\theta = -4m^2\left(\frac{1}{\tilde{s}}+\frac{1}{\tilde{u}}\right) - 4m^4\left(\frac{1}{\tilde{s}}+\frac{1}{\tilde{u}}\right)^2$$

$$\overline{|A_{fi}|^2} = 2e^4\ \left[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right]$$

e, integrando come nel processo $e\mu \to e\mu$,

$$\frac{1}{64\pi^2}\ \frac{1}{m\omega}\int \overline{|A_{fi}|^2}\ \delta^4(k_a+p_b-k_c+p_d)\ \frac{d\vec{k_c}}{\omega_c}\ \frac{d\vec{p_d}}{E_d}$$

otteniamo la *sezione d'urto di Klein-Nishina*

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\ \frac{\omega'^2}{\omega^2}\ \left[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right]$$

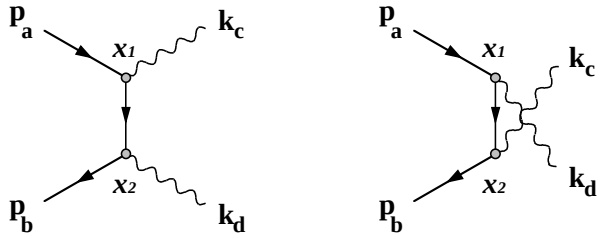


Figure 4.29: Grafici di Feynman dell'annichilazione $e^+e^- \to \gamma\gamma$

Scattering $e^+e^- \to \gamma\gamma$

Anche in questo caso il processo è descritto da due grafici di Feynman poiché i fotoni nello stato finale sono indistinguibili (Fig.4.29).

Il processo si ottiene dallo scattering Compton per simmetria di incrocio

$$\gamma e^- \to \gamma e^- \quad \Leftrightarrow \quad e^+e^- \to \gamma\gamma$$

scambiando i 4-impulsi $p_a \leftrightarrow -p_d$ che corrisponde allo scambio $s \leftrightarrow -t$. Nel limite $|t| \gg m^2$, $|u| \gg m^2$, che è il caso di interesse negli anelli di collisione e^+e^-, l'elemento di matrice è

$$\overline{|A_{fi}|^2} = 2e^4 \left[\frac{t}{u} + \frac{u}{t}\right]$$

Nel riferimento del centro di massa, $s = 4p^2$, $t = -2p^2(1-\cos\theta)$, $u = -2p^2(1+\cos\theta)$, $\overline{|A_{fi}|^2}$ è simmetrica rispetto all'angolo θ tra la direzione e^+e^- e la direzione $\gamma\gamma$

$$\overline{|A_{fi}|^2} = 2e^4 \left[\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right] = 4e^4 \, \frac{1+\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}$$

e la sezione d'urto, con $|\vec{v}_{ee}| = c = 1$, $p_f = p_i = p$, è

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s} \, \overline{|A_{fi}|^2} = \frac{\alpha^2}{s} \, \frac{1+\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}$$

Nota: l'approssimazione $|t| \gg m^2$, $|u| \gg m^2$ non è valida nel limite $\cos\theta \to \pm 1$.

Scattering $\nu_e e^- \to e^- \nu_e$

Il grafico di Feynman nel *canale* t è mostrato in figura 4.30: nel punto x_1 viene assorbito il neutrino di 4-impulso p_a, emesso l'elettrone di 4-impulso p_c e emesso un bosone W^+ virtuale di 4-impulso $q = p_a - p_c$; nel punto x_2 viene assorbito l'elettrone di 4-impulso p_b, emesso il neutrino di 4-impulso p_d e assorbito il bosone virtuale di 4-impulso $q = -p_b + p_d$. L'ampiezza di transizione è l'integrale

$$A = \int j_\lambda(x_1) \; G^{\lambda\mu}(x_1 - x_2) \; [j_\mu(x_2)]^+ \; d^4x_1 d^4x_2$$

dove j_λ, $(j_\lambda)^+$ sono le *correnti deboli cariche* con $\Delta Q = \pm 1$

$$j_\lambda = \frac{g}{\sqrt{2}}\ \overline{\psi}_f \gamma_\lambda\ \frac{1-\gamma_5}{2}\ \psi_i \qquad [j_\lambda]^+ = \frac{g}{\sqrt{2}}\ \left[\overline{\psi}_f \gamma_\lambda\ \frac{1-\gamma_5}{2}\ \psi_i\right]^+ = \frac{g}{\sqrt{2}}\ \overline{\psi}_i \gamma_\lambda\ \frac{1-\gamma_5}{2}\ \psi_f$$

e $G_{\lambda\mu}(x_1 - x_2)$ è il propagatore del campo debole

$$G_{\lambda\mu}(x_1 - x_2) = \frac{e^{-iq\cdot(x_1-x_2)}}{(2\pi)^4} \frac{g_{\lambda\mu} - q_\lambda q_\mu / M^2}{q^2 - M^2}$$

$$A = \frac{g^2}{2} \int \overline{u}_c \gamma^\lambda \frac{1-\gamma_5}{2} u_a\ e^{i(p_a - p_c)\cdot x_1}\ G_{\lambda\mu}(x_1 - x_2)\ \overline{u}_d \gamma^\lambda \frac{1-\gamma_5}{2} u_b e^{i(p_b - p_d)\cdot x_2}\ d^4x_1 d^4x_2$$

Nella maggior parte dei casi di interesse $q^2 \ll M^2$ $(M \simeq 80\ GeV)$ e, introducendo

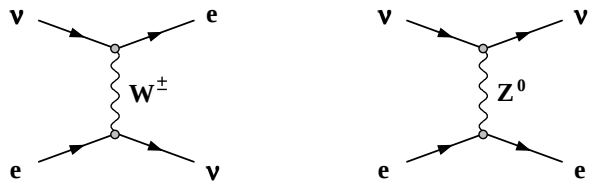


Figure 4.30: Grafici di Feynman dello scattering $\nu_e e^- \to e^- \nu_e$ per corrente carica e neutra

la *costante universale di Fermi*, $G/\sqrt{2} = g^2/8M^2$,

$$A = \frac{G}{\sqrt{2}}\ \left[\overline{u}_c \gamma^\lambda (1-\gamma_5) u_a\right]\ \left[\overline{u}_d \gamma_\lambda (1-\gamma_5) u_b\right]\ (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d)$$

Mediando sugli spin dello stato iniziale e sommando sugli spin dello stato finale

$$\overline{|A_{fi}|^2} = 64 G^2\ (p_a \cdot p_c)\ (p_b \cdot p_d)$$

La cinematica è la stessa di processi già studiati. Nel riferimento del centro di massa abbiamo

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s}\ 16 G^2 s^2 = \frac{G^2}{4\pi^2}\ s$$

cioè la sezione d'urto differenziale del processo $\nu_e e^- \to e^- \nu_e$ non dipende dall'angolo di diffusione, e

$$\sigma(\nu_e e^- \to e^- \nu_e) = \frac{G^2}{\pi}\ s$$

Nota: non è stato considerato lo scattering $\nu_e e^- \to \nu_e e^-$ mediato dal *campo debole neutro*.

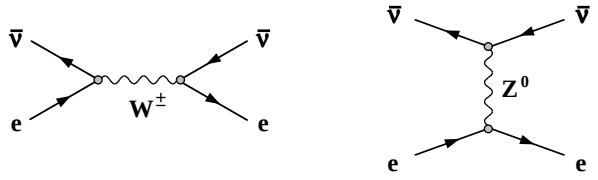


Figure 4.31: Grafici di Feynman dello scattering $\bar{\nu}_e e^- \to e^- \bar{\nu}_e$ per corrente carica e neutra

Scattering $\overline{\nu}_e e^- \to e^- \overline{\nu}_e$

L'ampiezza di questo processo si ottiene dal precedente per simmetria di incrocio scambiando $p_a \leftrightarrow -p_d$, cioè $s \leftrightarrow t$, ed è un processo di annichilazione *nel canale s* (Fig.4.31).

Trattando, come sopra, solo lo scattering per corrente debole carica:

$$\overline{|A_{fi}|^2} = 64G^2\ (-p_d \cdot p_c)\ (-p_b \cdot p_a) = 64G^2\ t^2 = 64G^2\ s^2\ (1-\cos\theta)^2$$

dove θ è l'angolo $\overline{\nu}_{in} \wedge e^-_{out}$ (se θ^* è l'angolo $\overline{\nu}_{in} \wedge \overline{\nu}_{out}$: $\cos\theta^* = -\cos\theta$).

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{G^2}{4\pi^2}\ s\ \frac{(1-\cos\theta)^2}{4}$$

$$\sigma(\overline{\nu}_e e^- \to e^- \overline{\nu}_e) = \frac{G^2}{3\pi}\ s \qquad\qquad \frac{\sigma(\overline{\nu}_e e^- \to e^- \overline{\nu}_e)}{\sigma(\nu_e e^- \to e^- \nu_e)} = \frac{1}{3}$$

La dipendenza delle sezioni d'urto dall'angolo di diffusione si spiega con la conservazione dell'elicità dei fermioni ad alta energia.

- Nella diffusione $\nu_e e^- \to e^- \nu_e$ ($\overline{\nu}_e e^+ \to e^+ \overline{\nu}_e$) fermione e antifermione hanno elicità uguale e il momento angolare è $J = 0$: la distribuzione angolare nel centro di massa è isotropa.

  $$\nu_L e_L \to e_L \nu_L \qquad \overline{\nu}_R \overline{e}_R \to \overline{e}_R \overline{\nu}_R \qquad A \sim \textit{costante}$$

- Nell'annichilazione $\overline{\nu}_e e^- \to e^- \overline{\nu}_e$ ($\nu_e e^+ \to e^+ \nu_e$) fermione e antifermione hanno elicità opposta e il momento angolare è $J = 1$ con $J_z = +1$ ($J_z = -1$): la distribuzione angolare nel centro di massa corrisponde alla rotazione del momento angolare $J = 1$ attorno ad un asse $\perp z$

  $$\overline{\nu}_R e_L \to e_L \overline{\nu}_R \qquad \nu_L \overline{e}_R \to \overline{e}_R \nu_L \qquad A \sim (1-\cos\theta)/2$$

  Nello stato finale, per la conservazione dell'elicità si ha $J_{z'} = -1$ ($J_{z'} = +1$) lungo l'asse z', cioè una sola proiezione su $2J + 1 = 3$.

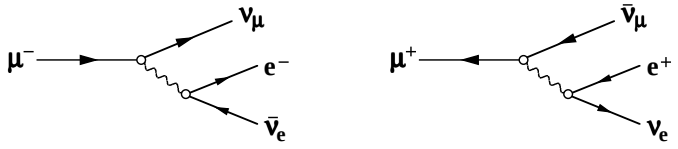


Figure 4.32:

4.21.3 Il decadimento del muone

Il decadimento del muone, $\mu^- \to \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ ($\mu^+ \to \bar{\nu}_\mu e^+ \nu_e$) è rappresentato dal grafico della Fig. 4.32.

L'interazione corrente-campo è

$$\frac{g}{\sqrt{2}}\left[\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha \frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x)W^\alpha(x) + \text{hermitiano coniugato}\right]$$

dove g è la "carica" debole, $\psi(x) = \frac{u(s)}{2E}e^{-ipx}$ è la funzione d'onda dei fermioni e $W(x)$ è il campo di interazione debole. L'elemento di matrice si ottiene integrando

$$\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_1(x)\gamma_\alpha \frac{1-\gamma_5}{2}\psi_\mu(x)W^\alpha(x)\ \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_e(y)\gamma_\beta \frac{1-\gamma_5}{2}\psi_2(y)W^\beta(y)$$

Per valori del 4-impulso trasferito $q^2 = (p_\mu - p_1)^2 = (p_e + p_2)^2 \ll m_W^2$ il propagatore del campo è $g_{\alpha\beta}/m_W^2$ con $g_{\alpha\beta}$ tensore metrico, e l'integrale è $\int e^{-ip_\mu x}e^{ip_e x}e^{ip_1 x}e^{ip_2 x}d^4x = (2\pi)^4\delta^4(p_\mu - p_e - p_1 - p_2)$. Introducendo la costante di Fermi

$$\frac{g}{\sqrt{2}}\frac{1}{m_W^2}\frac{g}{\sqrt{2}} = \frac{4G}{\sqrt{2}}$$

si ha

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}_1\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_\mu\right]\left[\bar{u}_e\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_2\right] \tag{4.2}$$

$$d\Gamma = (2\pi)^4\delta^4(p_\mu - p_e - p_1 - p_2)\ \frac{1}{2E_\mu}\frac{d^3p_e}{2E_e(2\pi)^3}\frac{d^3p_1}{2E_1(2\pi)^3}\frac{d^3p_2}{2E_2(2\pi)^3}\ \overline{|\mathcal{M}|^2} \tag{4.3}$$

dove $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è la media sugli stati di spin.

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G^2}{2}\ \mathbf{tr}[u_1\bar{u}_1\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_\mu\bar{u}_\mu\gamma_\alpha(1-\gamma_5)]\ \mathbf{tr}[u_e\bar{u}_e\gamma_\beta(1-\gamma_5)u_2\bar{u}_2\gamma_\beta(1-\gamma_5)]$$

$$= 32G^2\left[(p_\mu - m_\mu s_\mu)\cdot p_1\right]\left[(p_e - m_e s_e)\cdot p_2\right]$$

s_μ e s_e sono le polarizzazioni (4-versori) di muone e elettrone. Integrando sulle variabili dei neutrini, p_1, p_2

$$d\Gamma = \int \frac{2G^2}{(2\pi)^5}\left[(p_\mu - m_\mu s_\mu)\cdot p_1\right]\left[(p_e - m_e s_e)\cdot p_2\right]\delta^4(q - p_1 - p_2)\frac{1}{E_\mu}\frac{d^3p_e}{E_e}\frac{d^3p_1}{E_1}\frac{d^3p_2}{E_2}$$

$$d\Gamma = \frac{2G^2}{(2\pi)^5}(p_\mu - m_\mu s_\mu)_\alpha (p_e - m_e s_e)_\beta \; \mathcal{I}^{\alpha\beta} \; \frac{d^3p_e}{E_\mu E_e} \tag{4.4}$$

L'integrale sui 4-impulsi dei neutrini è un invariante che si può esprimere in funzione di q

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta} = \int_{p_1,p_2} p_1^\alpha p_2^\beta \; \delta^4(q - p_1 - p_2) \; \frac{d^3p_1}{E_1}\frac{d^3p_2}{E_2} = Aq^2 g^{\alpha\beta} + Bq^\alpha q^\beta$$

e si ottiene ($p_1^2 = p_2^2 = 0$)

$$g_{\alpha\beta}\mathcal{I}^{\alpha\beta} = 4Aq^2 + Bq^2 = \int_{p_1,p_2} (p_1 \cdot p_2) \; \delta^4(q - p_1 - p_2) \; \frac{d^3p_1}{E_1}\frac{d^3p_2}{E_2}$$

$$q_\alpha q_\beta \mathcal{I}^{\alpha\beta} = Aq^4 + Bq^4 = \int_{p_1,p_2} (p_1 \cdot p_2)^2 \; \delta^4(q - p_1 - p_2) \; \frac{d^3p_1}{E_1}\frac{d^3p_2}{E_2}$$

Nel riferimento in cui $\vec{q} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, si ha $E_1 = E_2$, $p_1 \cdot p_2 = 2E_1^2$, $q^2 = q_0^2 = (2E_1)^2$

$$g_{\alpha\beta}\mathcal{I}^{\alpha\beta} = \int 8\pi E_1^2 dE_1 \delta(q_0 - 2E_1) \; \delta^3(\vec{q} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) d^3p_2 = \pi E_1^2 = \pi q^2$$

$$q_\alpha q_\beta \mathcal{I}^{\alpha\beta} = \int 16\pi E_1^4 dE_1 \delta(q_0 - 2E_1) \; \delta^3(\vec{q} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) d^3p_2 = 2\pi E_1^4 = \frac{\pi}{2} q^4$$

quindi: $A = \pi/6$, $B = \pi/3$; sostituendo $\mathcal{I}^{\alpha\beta} = \frac{\pi}{6}(q^2 g^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta)$ nell'equazione (4.4)

$$d^3\Gamma = \frac{\pi G^2}{3(2\pi)^5} \; (p_\mu - m_\mu s_\mu)_\alpha (p_e - m_e s_e)_\beta \; (q^2 g^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta) \; \frac{d^3p_e}{E_\mu E_e} \tag{4.5}$$

Nel riferimento del muone $E_\mu = m_\mu$, $q = (m_\mu - E_e, -\vec{p}_e)$, $s_\mu = (0, \hat{s}_\mu)$, $m_e s_e = (E_e h_e, \vec{p}_e h_e)$ dove $h_e = \frac{\vec{p}_e \cdot \hat{s}_e}{E_e}$ è l'elicità dell'elettrone e $\hat{s}_e$ è la polarizzazione nel riferimento dell'elettrone. Trascurando la massa dell'elettrone ($|\vec{p}_e| = E_e$), il prodotto nell'equazione (4.5) è

$$\begin{aligned}
&(p_\mu - m_\mu s_\mu)_\alpha (p_e - m_e s_e)_\beta \; (q^2 g^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta) = \\
&m_\mu E_e (1 - h_e) \; (3m_\mu^2 - 6m_\mu E_e + 2E_e^2) \\
&+ \; m_\mu (1 - h_e) \vec{p}_e \cdot 2(m_\mu - E_e)\vec{p}_e \\
&- \; m_\mu \hat{s}_\mu \cdot \vec{p}_e \; (1 - h_e) \; 2(m_\mu - E_e) E_e \\
&+ \; m_\mu \hat{s}_\mu \cdot \vec{p}_e \; (1 - h_e) \; (m_\mu^2 - 2m_\mu E_e - 2E_e^2) \; = \\
&(1 - h_e) \; m_\mu^2 E_e \; [(3m_\mu - 4E_e) + (m_\mu - 4E_e)\cos\theta]
\end{aligned}$$

θ è l'angolo tra lo spin del muone e l'impulso dell'elettrone

$$d^3\Gamma = \frac{\pi G^2}{3(2\pi)^5} \; (1 - h_e) m_\mu [(3m_\mu - 4E_e) + (m_\mu - 4E_e)\cos\theta] \; E_e^2 dE_e \; d\phi \; d\cos\theta$$

e, integrando sull'angolo azimutale ϕ, si ha

$$d^2\Gamma(\mu \to \nu_\mu e \bar{\nu}_e) = \frac{G^2}{3(2\pi)^3} \frac{1-h_e}{2}\ m_\mu[(3m_\mu - 4E_e) + (m_\mu - 4E_e)\cos\theta]E_e^2 dE_e\ d\cos\theta$$

Nel caso del decadimento $\mu^+ \to \bar{\nu}_\mu e^+ \nu_e$ cambia l'elemento di matrice (4.2)

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}_\mu \gamma_\alpha (1+\gamma_5) u_1\right]\left[\bar{u}_2 \gamma_\alpha (1+\gamma_5) u_e\right]$$

e quindi i segni nell'equazione (4.5), $p - ms \to p + ms$

$$d^2\Gamma(\bar{\mu} \to \bar{\nu}_\mu \bar{e} \nu_e) = \frac{G^2}{3(2\pi)^3} \frac{1+h_{\bar{e}}}{2}\ m_\mu[(3m_\mu - 4E_e) - (m_\mu - 4E_e)\cos\theta]E_e^2 dE_e\ d\cos\theta$$

Nel decadimento l'elettrone è emesso con elicità negativa ($h_e = -1$) e il positrone con elicità positiva ($h_{\bar{e}} = +1$).

4.22 Il fattore giromagnetico dei leptoni

4.22.1 Il fattore giromagnetico

Consideriamo un corpo rigido di massa m a simmetria cilindrica che è in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno all'asse di simmetria, Fig.4.33. Il momento angolare di rotazione, *spin*, è proporzionale al momento di inerzia

$$\vec{s} = I\vec{\omega} = \vec{\omega}\int r^2 dm$$

dove r è la distanza dall'asse di simmetria dell'elemento $dm = \rho_m r dr dz d\phi$ e ρ_m è la densità di massa. Se il corpo ha carica elettrica q e densità di carica ρ_q, l'elemento di carica dq genera una corrente $di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} dq$ e quindi un momento di dipolo magnetico $d\mu = \pi r^2 di$ parallelo a $\vec{\omega}$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\int r^2 dq$$

Il rapporto tra momento magnetico e spin è

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\frac{\int r^2 dq}{\int r^2 dm}\ \vec{s} = \frac{\langle r^2\rangle_q}{\langle r^2\rangle_m}\ \frac{q}{2m}\ \vec{s} = g\ \frac{q}{2m}\ \vec{s}$$

g è il *fattore giromagnetico*. Per densità di massa e di carica elettrica in rapporto costante si ha $g = 1$, $\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{s}$.

L'ipotesi che l'elettrone avesse un momento angolare intrinseco $s = \hbar/2$ fu introdotta da Goudschmit e Uhlenbeck per spiegare la molteplicità della *struttura fine* degli spettri atomici. Con questa ipotesi i livelli energetici risultano sdoppiati per l'interazione del momento magnetico dell'elettrone (carica elettrica e) $\vec{\mu}_e = g_e \frac{e}{2m_e}\vec{s}$

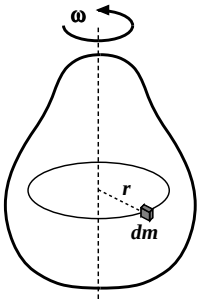


Figure 4.33: Momento magnetico e momento angolare di un corpo rigido in rotazione.

con il campo magnetico atomico $\vec{B}_a$, $\mathcal{E} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_a = \mp g_e \frac{e\hbar}{4m_e} B_a$. Le osservazioni erano in accordo con $\Delta\mathcal{E} = \frac{e\hbar}{2m_e} B_a$, cioè $g_e = 1$. Questo era però in contraddizione con le osservazioni dell'interazione con campi magnetici esterni, l'effetto Zeeman (anomalo). In questo caso si misurava $\Delta\mathcal{E} = \frac{e\hbar}{m_e} B_{ext}$, cioè $g_e = 2$. La contraddizione fu spiegata dall'effetto relativistico della *precessione di Thomas* (appendice 4.5): il riferimento dell'elettrone non è in quiete nel riferimento dell'osservatore, ma è soggetto ad accelerazione.

Consideriamo un elettrone nel campo elettrico atomico a simmetria sferica di un nucleo. Nel riferimento di quiete la variazione dello spin è:

$$\frac{d\vec{s}}{dt_0} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0 = g\frac{e}{2m}\vec{s} \wedge \vec{B}_0$$

t_0 è il tempo proprio e B_0 è il campo nel riferimento dell'elettrone. $\vec{s}$ è un vettore di modulo costante per cui

$$\frac{d\vec{s}}{dt_0} = \vec{s} \wedge \vec{\omega}_s \qquad\qquad \vec{\omega}_s = g\frac{e\vec{B}_0}{2m} \tag{4.6}$$

Se $\vec{\beta}c$ è la velocità dell'elettrone, e $\vec{E}$, $\vec{B}_\parallel$, $\vec{B}_\perp$ sono il campo elettrico e le componenti del campo magnetico nel riferimento del laboratorio, il campo $\vec{B}_0$ è

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_\parallel + \gamma\left(\vec{B}_\perp - \vec{\beta} \wedge \vec{E}/c\right)$$

Il campo elettrico atomico è centripeto, $e\vec{E} = -\vec{\nabla}U = \frac{dU}{dr}\hat{r}$; per $\beta \ll 1$, $\gamma \simeq 1$, si ha

$$\vec{\omega}_B = g\frac{e\vec{B}_\perp}{2m} \qquad\qquad \vec{\omega}_E = -g\frac{1}{2mc}\vec{\beta} \wedge \vec{r}\,\frac{1}{r}\frac{dU}{dr} = g\frac{1}{2m^2c^2}\,\vec{L}\,\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare orbitale e $U(r)$ è l'energia di interazione nel campo coulombiano. La precessione di Thomas è attorno all'asse normale alla direzione del moto $\vec{\beta}$ e dell'accelerazione $d\vec{\beta}/dt$, la velocità angolare è

$$\vec{\omega}_T = \frac{\gamma - 1}{\beta^2}\vec{\beta} \wedge \frac{d\vec{\beta}}{dt} \tag{4.7}$$

Nell'ipotesi $\beta \ll 1$, $\gamma - 1 \simeq \beta^2/2$:

$$\vec{\omega}_T = \frac{1}{2c^2}\vec{v} \wedge \vec{a} = \frac{1}{2c^2}\frac{\vec{p}}{m} \wedge \frac{e\vec{E}}{m} = -\frac{1}{2m^2c^2}\ \vec{L}\ \frac{1}{r}\frac{dU}{dr}$$

Quindi l'energia di interazione del momento magnetico dell'elettrone

$$\mathcal{E} = -g\frac{e}{2m}\ \vec{s}\cdot\vec{B} - \frac{g-1}{2m^2c^2}\ \vec{s}\cdot\vec{L}\ \frac{1}{r}\frac{dU}{dr}$$

riproduce i risultati dell'effetto Zeeman e della struttura fine se $g = 2$.

Per un fermione puntiforme di spin 1/2, l'equazione di Dirac (appendice 4.18) prevede $g = 2$. In effetti le correzioni radiative (appendice 4.20) comportano che g sia leggermente maggiore: $g = 2(1+a)$. a è chiamata *anomalia* e si calcola in teoria delle perturbazioni come una serie di potenze della costante di struttura fine. Il primo termine dello sviluppo in serie è indipendente dalla massa. Le correzioni agli ordini superiori dipendono dall'integrazione su tutti i possibili valori del 4-impulso dei bosoni virtuali $(\gamma, W, Z, \ldots)$ scambiati, e di coppie fermione-antifermione, e quindi dipendono dalla massa del fermione

$$g = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \ldots\right) \qquad\qquad \frac{\alpha}{2\pi} = 1.16\ 10^{-3}$$

L'elettrone e il leptone μ si comportano come fermioni puntiformi. Il fattore giromagnetico di elettrone e muone sono misurati con grande precisione. Protone e neutrone sono fermioni di spin 1/2 dotati di struttura interna e hanno fattori giromagnetici sensibilmente diversi da 2. Anche in questo caso i valori dei momenti magnetici sono misurati con grande precisione (capitolo ???) e, insieme con quelli dei barioni $\frac{1}{2}^+$, forniscono informazioni sul modello a quark degli adroni.

Le misure del fattore giromagnetico sono fatte studiando il moto in campo magnetico. Una particella di carica e, massa m e momento magnetico μ percorre istante per istante una traiettoria circolare con frequenza angolare ω_c, *frequenza di ciclotrone*,

$$\frac{d\vec{p}}{dt_0} = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0 = \vec{p} \wedge \vec{\omega}_c \qquad\qquad \vec{\omega}_c = \frac{e\vec{B}_0}{m} \tag{4.8}$$

e lo spin ha un moto di precessione attorno alla direzione del campo con frequenza angolare ω_s (4.6). Per piccoli valori della velocità della particella nel laboratorio, $\beta \ll 1$, $\gamma \simeq 1$, il tempo proprio e il campo B_0 coincidono con quelli dello sperimentatore. Se $g = 2(1 + a) > 2$, la direzione dello spin precede con velocità angolare maggiore di quella dell'impulso della particella e la velocità angolare *relativa* è proporzionale all'anomalia a

$$\omega_a = \omega_s - \omega_c = g\frac{eB}{2m} - \frac{eB}{m} = \frac{g-2}{2}\frac{eB}{m} = a\frac{eB}{m} \tag{4.9}$$

Questo si verifica nel caso della misura del fattore giromagnetico dell'elettrone che viene effettuata con valori di velocità $\beta_e \ll 1$. Invece, nel caso del muone, la velocità

non è piccola e occorre tener conto dell'accelerazione centripeta nel laboratorio e della trasformazione di Lorentz del campo magnetico. Se $\vec{B}$ e $\vec{E}$ sono i campi nel laboratorio con componenti longitudinale $\parallel$ e trasversa $\perp$ [4]:

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_\parallel + \gamma\left(\vec{B}_\perp - \vec{\beta}\wedge\vec{E}/c\right) = \gamma\vec{B} - (\gamma-1)\vec{B}_\parallel - \gamma\vec{\beta}\wedge\vec{E}/c$$

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_\parallel + \gamma\left(\vec{E}_\perp + \vec{\beta}c\wedge\vec{B}\right) = \gamma\vec{B} - (\gamma-1)\vec{E}_\parallel + \gamma\vec{\beta}c\wedge\vec{B}$$

Nel riferimento *non accelerato* del muone, da (4.6), si ha

$$\frac{d\vec{s}}{dt}_{n.a.} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\vec{s}}{dt_0} = \vec{s}\wedge\vec{\omega}_s \qquad\qquad \vec{\omega}_s = g\frac{e}{2m}\left(\vec{B} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\vec{B}_\parallel - \vec{\beta}\wedge\vec{E}/c\right) \tag{4.10}$$

ma, per effetto della forza di Lorentz, questo riferimento è accelerato nel laboratorio e gli assi di riferimento sono soggetti istante per istante alla precessione di Thomas (4.7). Dalla definizione di $\vec{\beta}$ e dalle equazioni del moto si ha

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}c}{\mathcal{E}} \qquad \frac{d\vec{\beta}}{dt} = \frac{1}{\mathcal{E}}\left(\frac{d\vec{p}c}{dt} - \frac{\vec{p}c}{\mathcal{E}}\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right) = \frac{e}{\gamma m}\left(\vec{E}/c + \vec{\beta}\wedge\vec{B} - \vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E}/c)\right)$$

$$\vec{\beta}\wedge\frac{d\vec{\beta}}{dt} = \frac{e}{m\gamma}\left(\vec{\beta}\wedge\vec{E}/c + \vec{\beta}\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{B}) - (\vec{\beta}\wedge\vec{\beta})(\vec{\beta}\cdot\vec{E}/c)\right)$$

$$\vec{\omega}_T = \frac{e}{m}\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\vec{\beta}\wedge\vec{E}/\beta^2 c - (\vec{B} - \vec{B}_\parallel)\right) \tag{4.11}$$

La frequenza angolare dello spin nel laboratorio risulta

$$\vec{\omega}_s + \vec{\omega}_T = \frac{e}{m}\left(\left[\frac{g-2}{2} + \frac{1}{\gamma}\right]\vec{B} - \left[\frac{g-2}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma}\right]\vec{B}_\parallel - \left[\frac{g-2}{2} + \frac{1}{\gamma+1}\right]\vec{\beta}\wedge\vec{E}/c\right)$$

Negli esperimenti che misurano g_μ, muoni di energia opportuna vengono accumulati in un anello magnetico e si realizzano le condizioni per cui le componenti longitudinali dei campi siano nulle, $\vec{B}_\parallel = \vec{E}_\parallel = 0$; $\vec{B} = \vec{B}_\perp$, $\vec{E} = \vec{E}_\perp$. In questo caso il secondo termine si annulla

$$\vec{\omega}_s + \vec{\omega}_T = \frac{e}{m}\left(\left[a + \frac{1}{\gamma}\right]\vec{B} - \left[a + \frac{1}{\gamma+1}\right]\vec{\beta}\wedge\vec{E}/c\right) \tag{4.12}$$

La frequenza di ciclotrone è

$$\vec{p}\wedge\vec{\omega}_c = \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{\beta}c\wedge\vec{B} = ec\vec{\beta}\wedge\left(\vec{B} - \vec{\beta}\wedge\vec{E}/\beta^2 c\right) = \frac{e\vec{p}}{m\gamma}\wedge\left(\vec{B} - \vec{\beta}\wedge\vec{E}/\beta^2 c\right)$$

$$\vec{\omega}_c = \frac{e}{m\gamma}\left(\vec{B} - \vec{\beta}\wedge\vec{E}/\beta^2 c\right) \tag{4.13}$$

[4] Per un vettore di componenti $\vec{V}_\parallel$, $\vec{V}_\perp$, si ha: $\vec{\beta}\wedge\vec{V} = \vec{\beta}\wedge\vec{V}_\perp$, $\vec{\beta}\wedge\vec{\beta}\wedge\vec{V} = -\beta^2\vec{V}_\perp = -\beta^2(\vec{V} - \vec{V}_\parallel)$

La frequenza angolare relativa tra la direzione dello spin e la direzione del moto è

$$\vec{\omega}_s + \vec{\omega}_T - \vec{\omega}_c = \frac{e}{m}\left(a\vec{B} - \left[a + \frac{1}{1+\gamma} - \frac{1}{\beta^2\gamma}\right]\vec{\beta} \wedge \vec{E}/c\right)$$

Per minimizzare la dipendenza dal valore del campo elettrico lungo la traiettoria, si sceglie l'energia in modo da annullare il secondo termine

$$a + \frac{1}{1+\gamma} - \frac{\gamma^2}{(\gamma^2-1)\gamma} = a - \frac{1}{\gamma^2-1} = 0$$

L'energia del muone per cui $\gamma = \sqrt{1+1/a} = 29.3$, $\mathcal{E}_\mu = 3.1$ GeV, è detta *energia magica*. In queste condizioni si ha

$$\omega_a = \omega_s + \omega_T - \omega_c = a\frac{eB}{m}$$

e il valore dell'anomalia si ottiene direttamente dalla misura della frequenza di precessione.

4.22.2 La misura di $g-2$ dell'elettrone

L'anomalia dell'elettrone $a_e = \frac{g_e-2}{2}$ è stata misurata con grande precisione in una serie di esperimenti in cui elettroni (o positroni) vengono *intrappolati* in una particolare configurazione di campi elettrici e magnetici detta *Penning trap*. Un esempio è mostrato in Fig.4.34; la trappola ha simmetria cilindrica attorno all'asse z e gli elettrodi formano un campo elettrico quadrupolare. In coordinate cilindriche il potenziale ha la forma

$$V(r\cos\phi, r\sin\phi, z) = \frac{V_0}{r_0^2 + 2z_0^2}\,(r_0^2 - r^2 + 2z^2)$$

e il campo elettrico ha componenti

$$E_x = Gx/2 \qquad E_y = Gy/2 \qquad E_z = -Gz \qquad\qquad G = \frac{4V_0}{r_0^2+2z_0^2}$$

Il campo magnetico è prodotto da un solenoide parallelo all'asse z, $\vec{B} = (0,0,B_0)$. Le equazioni del moto di un elettrone sono

$$\begin{array}{ll} m\ddot{x} = eE_x + ev_yB_z & \ddot{x} - \omega_c\dot{y} - \omega_z^2 x/2 = 0 \\ m\ddot{y} = eE_y - ev_xB_z & \ddot{y} + \omega_c\dot{x} - \omega_z^2 x/2 = 0 \\ m\ddot{z} = eE_z & \ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 \end{array} \qquad \omega_c = \tfrac{eB_0}{m} \qquad \omega_z^2 = \tfrac{eG}{m}$$

L'elettrone ha oscillazioni assiali $z(t) = Z\cos\omega_z t$ e percorre una cicloide nel piano x-y formata da un moto circolare *lento* con frequenza ω_- e uno molto più *rapido* con frequenza ω_+

$$x(t) = R^-\cos\omega_- t + R^+\cos\omega_+ t \qquad y(t) = R^-\sin\omega_- t + R^+\sin\omega_+ t \qquad R^+ \ll R^-$$

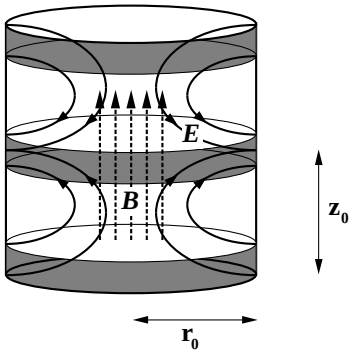


Figure 4.34: Configurazione dei campi elettrico e magnetico in una *Penning trap*.

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}\left[\omega_c \pm (\omega_c^2 - 2\omega_z^2)^{1/2}\right]$$

Poiché con i valori tipici dei campi la frequenza di ciclotrone ω_c è molto maggiore della frequenza assiale ω_z si ha $\omega_- \ll \omega_+$; la *frequenza di ciclotrone perturbata* è $\omega_+ \simeq \omega_c$; la *frequenza di magnetrone* è $\omega_- \simeq \omega_c - \omega_+$. Si arriva a confinare nella trappola anche un singolo elettrone: si costruisce così un *geonium atom*[5] in cui i campi elettrico e magnetico della trappola sostituiscono il nucleo atomico. Questa tecnica della cella mono-atomica è stata introdotta da Hans Dehmelt[6] e collaboratori appunto per la misura del fattore $g-2$ dell'elettrone.

I livelli energetici del sistema dipendono dal numero del modo di oscillazione $n = 0, 1, 2, \ldots$, dal numero magnetico $m_s = \pm\frac{1}{2}$ e da alcune piccole correzioni

$$\mathcal{E}(n, m_s) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_+ + m_s\frac{g\hbar\omega_c}{2} + \ldots$$

La differenza di energia tra i livelli $\mathcal{E}(n, +1/2) - \mathcal{E}(n+1, -1/2)$ è proporzionale all'anomalia dell'elettrone (Fig.4.35)

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\hbar} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_+ + \frac{1}{2}\frac{g}{2}\omega_c - \left(n + \frac{3}{2}\right)\omega_+ + \frac{1}{2}\frac{g}{2}\omega_c = \frac{g}{2}\omega_c - \omega_+ = a\omega_c + \omega_- \simeq a\omega_c$$

Le frequenze sono misurate e calibrate con estrema precisione e le oscillazioni di frequenza $\Delta E/h$ inducono segnali osservabili. I valori tipici di una Penning trap per questa misura sono: temperatura $T \sim 4\ K$, campo magnetico $B_0 \sim 5\ T$, gradiente di campo elettrico $G \sim 10\ V/mm^2$, per cui si ottiene: $\nu_+ \sim 100\ GHz$, $\nu_z \sim 100\ MHz$, $\nu_- \sim 100\ kHz$. La misura del fattore $g-2$ dell'elettrone[7] è oggi la misura assoluta più precisa di una grandezza fisica

$$a_e^{exp} = (1\ 159\ 652\ 180.9 \pm 0.8) \times 10^{-12}$$

[5] Nome fantasioso per "atomo costruito sulla Terra".

[6] Premio Nobel per la Fisica nel 1989

[7] B. Odom, D. Hanneke, B. D'Urso, G. Gabriesle, Physical Review Letters 97, 030801, 2006

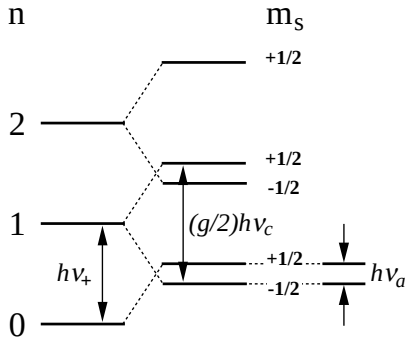


Figure 4.35: Livelli energetici dell'elettrone in una *Penning trap*.

la precisione è di 0.7×10^{-12} ! Il valore di a_e è calcolato in elettrodinamica quantistica come serie di potenze della costante di struttura fine. Se si usa il valore di α determinato in modo indipendente dalla misura di a_e[8,9]

$$1/\alpha = 137.035\ 999\ 31 \pm 0.000\ 000\ 70$$

si ottiene il valore teorico

$$a_e^{th} = (1\ 159\ 652\ 178.1 \pm 6.0) \times 10^{-12}$$

l'accordo è ottimo: $a_e^{exp} - a_e^{th} = (2.8 \pm 6.1) \times 10^{-12}$. Dato che l'errore sperimentale è molto più piccolo dell'incertezza teorica, si può ricavare una determinazione più precisa di α dalla misura di a_e

$$1/\alpha = 137.035\ 999\ 07 \pm 0.000\ 000\ 10$$

4.22.3 La misura di $g-2$ del muone

Anche la misura del fattore $g-2$ del muone è fatta con grande precisione, se pur inferiore a quella dell'elettrone. La misura è particolarmente interessante perchè i grafici di Feymnan agli ordini superiori sono più sensibili allo scambio di bosoni e coppie fermione-antifermione in rapporto $(m_\mu/m_e)^2$.

I muoni sono prodotti polarizzati nel decadimento di mesoni (prevalentemente π) prodotti nell'interazione di protoni di alta energia su un bersaglio: i pioni sono focalizzati in un canale magnetico dove decadono e si selezionano muoni in una stretta banda di impulso intorno al valore *magico* $\gamma = 29.3$, $\beta = 0.9988$, $p_\mu = 3.09\ GeV/c$. Questi vengono immessi in un anello di 7.1 m di raggio, con campo magnetico curvante $B = 1.45\ T$ e decadono con vita media $\gamma\tau_\mu = 64.4\ \mu s$. La velocità angolare è $\omega_c = \frac{eB}{\gamma m} = 4.22\ 10^7\ rad/s$; il periodo di rivoluzione è 0.149 μs e i muoni percorrono in media 430 giri prima di decadere.

[8] V.Germinov *et al.*, Physical Review A73, 032504, 2006
[9] P.Cladé *et al.*, Physical Review Letters 96, 033001, 2006

Durante il moto nell'anello (Fig.4.36), lo spin del muone, inizialmente parallelo a $\vec{p}$, ha un moto di precessione con velocità angolare leggermente maggiore

$$\omega_s + \omega_T = \frac{eB}{m}\left(\frac{g}{2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)$$

e quindi l'angolo tra la direzione dello spin e la direzione dell'impulso cambia in modo periodico con frequenza angolare

$$\omega_a = \omega_s + \omega_T - \omega_c = a_\mu \frac{eB}{m}$$

e periodo $T_a = 4.36\ \mu s$ piccolo rispetto a $\gamma\tau_\mu$, lo spin fa in media 15 giri prima che il muone decada.

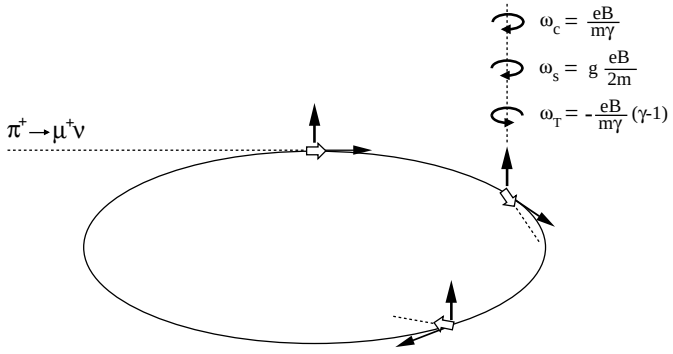


Figure 4.36: Moto di rivoluzione del muone e di precessione dello spin.

Quando il muone decade, l'elettrone conserva memoria della direzione dello spin: e^+ (e^-) di alta energia sono emessi prevalentemente in direzione parallela (antiparallela) allo spin del μ^+ (μ^-). Infatti la distribuzione degli elettroni nel riferimento del muone è (capitolo ???)

$$\frac{d^2n^\pm}{d\epsilon\ d\cos\theta^*} = (3 - 2\epsilon)\epsilon^2\left[1 \mp \frac{1 - 2\epsilon}{3 - 2\epsilon}\cos\theta^*\right] = n(\epsilon)\left[1 \mp \alpha(\epsilon)\cos\theta^*\right]$$

con $\epsilon = 2\mathcal{E}^*/m$. La Fig.4.37 mostra che il numero di elettroni $n(\epsilon)$ e l'asimmetria $\alpha(\epsilon)$ aumentano con ϵ. L'energia dell'elettrone nel laboratorio è

$$\mathcal{E}_e = \beta\gamma p^*\cos\theta^* + \gamma\mathcal{E}^* \simeq \gamma\mathcal{E}^*(1 + \cos\theta^*) = \frac{\mathcal{E}}{m}\frac{m\epsilon}{2}(1 + \cos\theta^*)$$

e il rapporto tra l'energia dell'elettrone e quella del muone è $\mathcal{E}_e/\mathcal{E} = \epsilon(1 + \cos\theta^*)/2$. Se si richiede che l'energia dell'elettrone sia maggiore di un certo valore di soglia, $\epsilon(1 + \cos\theta^*)/2 > S$, si restringe l'intervallo di $\cos\theta^*$ e si selezionano i positroni (elettroni) emessi con $\theta^* \simeq 0$ ($\theta^* \simeq \pi$).

Poiché $e^\pm$ hanno impulso $\vec{p}_e$ leggermente minore di $\vec{p}_\mu$, vengono deflessi dal campo magnetico all'interno dell'anello dove sono disposti i rivelatori. Quindi la frequenza

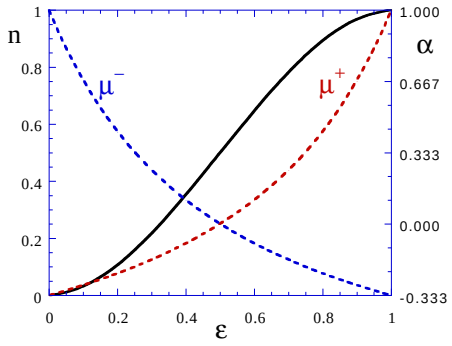


Figure 4.37: Numero di elettroni $n(\epsilon)$ e asimmetria $\alpha(\epsilon)$ nel riferimento del muone.

di conteggio di elettroni con energia maggiore di un valore di soglia diminuisce con legge esponenziale ed è modulata dalla frequenza ω_a

$$N_e = N_0 e^{-t/\gamma\tau} \left[1 + A \sin(\omega_a t + \phi_a)\right]$$

dove i valori delle costanti N_0, A e ϕ_a dipendono dal valore dell'energia di soglia dei rivelatori. La Fig.4.38 mostra i dati relativi a 4 miliardi di decadimenti $\mu^+ \rightarrow \bar{\nu}_\mu e^+ \nu_e$ misurati con un valore di soglia $S \simeq 2/3$ su un intervallo di tempo di 800 μs pari a circa 12 vite medie.

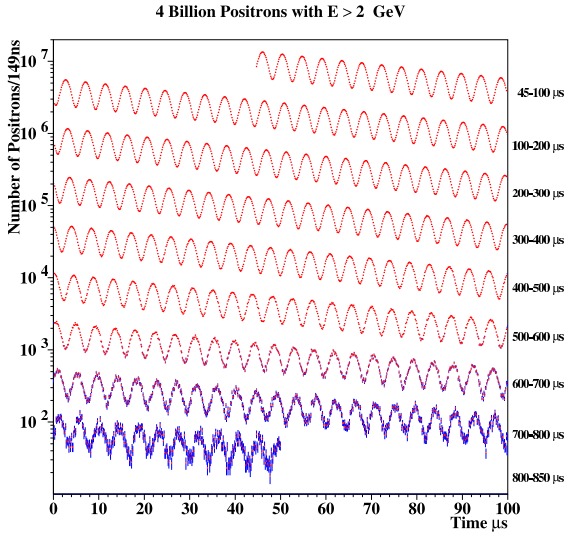


Figure 4.38: Conteggio di e^+ in funzione del tempo per la misura dell'anomalia del μ^+ (G.W.Bennett *et al.*, Physical Review D73, 072003, 2006).

Il risultato[10], mediato sui valori misurati con μ^+ e μ^-, è

$$a_\mu^{exp} = (116\ 592\ 080 \pm 63) \times 10^{-11}$$

[10] G.W.Bennett *et al.*, Physical Review Letters 89, 101804, 2002; G.W.Bennett *et al.*, Physical Review Letters 92, 161802, 2004

Poiché $m_\mu \gg m_e$, in questo caso i contributi dei bosoni W,Z e di coppie quark-antiquark al valore calcolato dalla teoria non sono trascurabili. In particolare il secondo è grande ed è dominato dalla produzione di coppie $q\bar{q}$ di bassa energia dove la cromodinamica quantistica non dà risultati affidabili. Per calcolarlo si usano i dati sperimentali sulla sezione d'urto $e^+e^- \to$ *adroni* (capitolo ???) e questo è il termine con l'errore maggiore. I contributi elettromagnetico, debole e adronico sono

$a_\mu^{e.m.}$	116 584 718			
a_μ^{weak}	154			
a_μ^{had}	6 921	$\pm$	68	
a_μ^{th}	116 591 793	$\pm$	68	$\times 10^{-11}$

Il confronto mostra che non vi è buon accordo tra la misura e il calcolo teorico: $a_\mu^{exp} - a_\mu^{th} = (287 \pm 92) \times 10^{-11}$; o il termine a_μ^{th} non è calcolato correttamente, o esiste qualche effetto *nuovo* di cui la teoria non tiene conto.

4.23 La supersimmetria

Nel Modello Standard le sorgenti dei campi e i campi di interazioni seguono due statistiche diverse: quella di Fermi-Dirac e quella di Bose-Einstein. Il teorema di spin-statistica di Pauli assegna spin semi-intero ai fermioni e spin intero ai bosoni. Nell'intervallo di energia oggi esplorato, la fenomenologia delle interazioni fondamentali, elettromagnetica, adronica e debole, è descritta con successo da campi di fermioni puntiformi di spin 1/2, da campi di interazione di spin 1 e da tre costanti di accoppiamento relative alle trasformazioni di gauge $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$. Le masse sono introdotte tramite l'interazione dei campi di fermioni e dei campi di gauge con il campo scalare di Higgs.

Nonostante i grandi successi nella descrizione dei fenomeni e il notevole potere predittivo, la situazione non è del tutto soddisfacente perché occorre introdurre nel modello un numero di parametri, le costanti di accoppiamento di Yukawa e dei campi di gauge, i cui valori vanno dedotti da misure. Inoltre, sulla base dell'esperienza maturata nello sviluppo della teoria, è naturale attendersi che le leggi di simmetria del modello che sono violate a bassa energia si possano ricondurre ad una simmetria più generale che operi ad energia più elevata. Alcune indicazioni mostrano che l'energia di *grande unificazione* sia intorno al valore $\Lambda_{GU} \sim 10^{15 \div 16}$ GeV. Infine c'è la speranza che questa simmetria sia anche in grado di descrivere l'interazione gravitazionale ad una scala di energia non superiore all'*energia di Planck*, $M_P c^2 \simeq 1.2\ 10^{19}$ GeV [11].

Quindi si ritiene che il Modello Standard fornisca un quadro teorico incompleto delle interazioni. Oltre a questo, fornisce anche un quadro non soddisfacente perché è affetto da alcune patologie, in particolare la definizione stessa della massa del campo di Higgs. Poiché questo si accoppia a tutti i campi, la massa è soggetta a correzioni radiative che sono grandi se l'energia tipica a cui questi campi agiscono è

[11] La *massa di Planck* è definita dalla relazione $G_N M_P^2/\hbar c = 1$, G_N è la costante di Newton

grande ($\sim\Lambda_{GU}$). Per ogni campo di fermioni di massa $m_f = g_f v/\sqrt{2}$, che si accoppia col campo di Higgs secondo la (3.27), la correzione è

$$\delta m_H^2 = -g_f \int^{\Lambda} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{q^2} \simeq -\frac{g_f}{4\pi^2}\Lambda^2 \tag{4.14}$$

dove, per evitare la divergenza, si è introdotto il limite superiore di integrazione Λ. Questo non può che dipendere dalla scala di energia a cui si manifesta la nuova simmetria di unificazione delle interazioni. Ma sappiamo che la massa del campo di Higgs è vincolata nell'intervallo $100 < m_H < 1000$ GeV e, se consideriamo $\Lambda \simeq 10^{16}$ GeV e il quark *top*, con $g_t \simeq 1$, la correzione $\delta m_H \simeq \Lambda/2\pi \simeq 10^{15}$ GeV deve essere *regolata* da qualche meccanismo con la precisione di $1/10^{12}$! Se però esistono dei campi scalari di massa m_s e costante di accoppiamento col campo di Higgs g_s, questi introducono un'altra correzione di segno opposto

$$\delta m_H^2 = \frac{g_s}{4\pi^2}\left(\Lambda^2 - m_s^2 \ln\frac{\Lambda^2}{m_s^2}\right) \tag{4.15}$$

Quindi, se esiste una legge di simmetria per cui ad ogni fermione di spin 1/2 corrisponde un campo scalare complesso (una coppia di bosoni di spin 0) con massa simile, allora i due contributi proporzionali a Λ^2 in (4.14) e (4.15) si cancellano. Questa legge, la *super-simmetria*, è generata da un operatore che trasforma i campi di fermioni e in campi di bosoni e viceversa

$$Q|f\rangle = |b\rangle \qquad\qquad Q|b\rangle = |f\rangle \tag{4.16}$$

Dato che la trasformazione agisce sui due campi cambiando lo spin di 1/2, l'operatore Q si comporta come uno spinore di Dirac e, allo stesso modo, l'operatore $Q^\dagger$. Quindi Q e $Q^\dagger$ soddisfano regole di anti-commutazione e, poiché operano sul momento angolare, generano una simmetria dello spazio-tempo. Questa simmetria deve essere inquadrata con le altre leggi di simmetria del modello: invarianza di Lorentz e invarianza per trasformazioni di gauge $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$. Le regole delle trasformazioni della super-simmetria sono

$$\begin{aligned} \{Q_r, Q^\dagger_{\bar r}\} &= 2\sigma^\mu_{r\bar r} P_\mu \\ \{Q_r, Q_s\} = \{Q^\dagger_{\bar r}, Q^\dagger_{\bar s}\} &= 0 \\ [Q_r, P_\mu] = [Q^\dagger_{\bar r}, P_\mu] &= 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

dove P_μ è l'operatore 4-impulso che si trasforma come un vettore.

nota: nella (4.17) uno spinore di Dirac è rappresentato da due spinori di Weyl

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \xi_r \\ \eta^\dagger_{\bar r} \end{pmatrix} \qquad \bar\psi_D = \psi^\dagger_D \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_r & \xi^\dagger_{\bar r} \end{pmatrix} \qquad r = 1,2$$

σ_k (k = 1,2,3) sono le matrici di Pauli, $\bar\sigma_k = -\sigma_k$, e $\bar\sigma_0 = \sigma_0$ è la matrice identità, σ^μ_{rs} è l'elemento (r,s) della matrice σ^μ (μ = 0,1,2,3); l'operazione di

coniugazione fa passare da fermioni left-handed ad anti-fermioni right-handed (e viceversa). Le matrici γ nella rappresentazione di Weyl sono

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_R = \frac{1+\gamma^5}{2}\,\psi_D = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_r^\dagger \end{pmatrix} \qquad \psi_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\,\psi_D = \begin{pmatrix} \xi_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.23.1 Le particelle supersimmetriche

Dalle ipotesi precedenti e dalle relazioni (4.17) seguono importanti osservazioni

- le particelle e le corrispondenti *super-particelle* generate dalle trasformazioni della supersimmetria appartengono a *super-multipletti*;
- l'operatore P^2 commuta con i generatori della super-simmetria, quindi le particelle e le corrispondenti super-particelle hanno lo stesso autovalore di P^2, cioè hanno la stessa massa;
- i generatori delle simmetrie di gauge commutano con i generatori della supersimmetria, quindi le particelle e le corrispondenti super-particelle hanno le stesse costanti di accoppiamento;
- un super-multipletto contiene un ugual numero di stati di fermioni e di bosoni. Infatti, se s è lo spin, l'operatore $(-1)^{2s}$ ha autovalore $+1$ se agisce su un bosone, e autovalore -1 se agisce su un fermione

  $$(-1)^{2s}|b\rangle = +|b\rangle \qquad (-1)^{2s}|f\rangle = -|f\rangle$$

  e quindi anticommuta con gli operatori Q, $Q^\dagger$. Consideriamo l'insieme di stati $|n\rangle$ di un super-multipletto con autovalore del 4-impulso P_μ. Gli operatori Q, $Q^\dagger$ producono un nuovo stato $|n'\rangle$ con lo stesso valore P_μ e quindi per questo insieme si ha $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$. Dalla (4.17) si ha

  $$\begin{aligned} \textstyle\sum_n \langle n|(-1)^{2s}P_\mu|n\rangle &= \textstyle\sum_n \langle n|(-1)^{2s}QQ^\dagger|n\rangle + \sum_n \langle n|(-1)^{2s}Q^\dagger Q|n\rangle \\ &= \textstyle\sum_n \langle n|(-1)^{2s}QQ^\dagger|n\rangle + \sum_n \sum_m \langle n|(-1)^{2s}Q^\dagger|m\rangle\langle m|Q|n\rangle \\ &= \textstyle\sum_n \langle n|(-1)^{2s}QQ^\dagger|n\rangle + \sum_m \langle m|Q(-1)^{2s}Q^\dagger|m\rangle \\ &= \textstyle\sum_n \langle n|(-1)^{2s}QQ^\dagger|n\rangle - \sum_m \langle m|(-1)^{2s}QQ^\dagger|m\rangle = 0 \end{aligned}$$

  $\sum_n \langle n|(-1)^{2s}P_\mu|n\rangle$ è proporzionale a $n_b - n_f$ nell'insieme considerato se $P_\mu \neq 0$, e quindi

  $$n_b = n_f$$

- ad un fermione con due stati di elicità, $n_f = 2$, corrispondono due campi scalari reali con $n_b = 1$;

- un bosone di spin 1 di massa nulla (prima della rottura spontanea della simmetria di gauge) ha due stati di elicità, $n_b = 2$: a questo corrisponde un fermione con $n_f = 2$.

Vediamo come la super-simmetria può curare la patologia del Modello Standard della definizione della massa del campo di Higgs e, al tempo stesso, preservare le altre caratteristiche del modello, cioè l'invarianza per trasformazioni di gauge.

Ad ogni particella nota si aggiunge un *super-partner* che differisce di 1/2 unità di spin e che ha le stesse interazioni. I super-partner dei leptoni e dei quark sono bosoni di spin 0 e sono identificati dal prefisso *s* (per *scalare*), *sleptoni* e *squark*, e indicati con lo stesso simbolo con una *tilde*: $\tilde{e}$ è il superpartner scalare dell'elettrone. Le componenti left- e right-handed dei fermioni hanno proprietà diverse e quindi hanno partner scalari diversi; ad esempio

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_e \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix} \qquad\qquad e_R \quad \Rightarrow \quad \tilde{e}_R$$

– $\tilde{\nu}_e$ ha carica elettrica nulla, si accoppia con i campi W e Z;
– $\tilde{e}_L$ ha carica negativa, si accoppia con i campi A, W e Z;
– $\tilde{e}_R$ ha carica negativa, si accoppia con i campi A e Z, ma non con W;
– tutti hanno spin zero; quindi il suffisso $_{L,R}$ non indica l'elicità del selettrone, ma quella del super-partner elettrone.

I partner dei bosoni di gauge sono fermioni di spin 1/2 chiamati *gaugini*. I campi vettoriali della simmetria dell'isospin, B_k, e dell'ipercarica, B_Y, si combinano a formare i campi A, W e Z; allo stesso modo i super-partner $\tilde{B}_k$ e $\tilde{B}_Y$ formano i fermioni $\tilde{\gamma}$ (*fotino*), $\tilde{W}^{\pm}$ (*wino*) e $\tilde{Z}^0$ (*zino*). Agli otto campi di colore, i gluoni, corrispondono otto fermioni detti *gluini*, $\tilde{g}$.

Il campo di Higgs, introdotto nel capitolo ???, è costituito da un doppietto di isospin di campi scalari con ipercarica $Y = +1$. Il super-partner sarebbe un fermione di spin 1/2 con lo stesso valore dell'ipercarica ma, per evitare le *anomalie* introdotte da diagrammi di Feynman chiusi, occorre che esistano due fermioni con ipercarica opposta, $Y = \pm 1$. Quindi, nel modello super-simmetrico, esistono *due doppietti di Higgs* scalari (otto campi reali)

$$Y = +1 \qquad H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix} \qquad\qquad Y = -1 \qquad H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}$$

Questi campi hanno valori di aspettazione nel vuoto diversi da zero

$$H_u^{min} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} \qquad\qquad H_d^{min} = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

e, con un meccanismo simile a quello descritto nel capitolo ???, danno origine rispettivamente alle masse dei fermioni di tipo u e di tipo d. I partner supersimmetrici sono quattro fermioni di spin 1/2 chiamati *higgsini* e indicati con $\tilde{H}_u^+$, $\tilde{H}_u^0$, $\tilde{H}_d^0$, $\tilde{H}_d^-$.

La tabella 4.1 mostra il quadro dei super-multipletti previsti dalla super-simmetria. Sono indicati gli autovalori dell'ipercarica e la molteplicità di isospin e di colore. Va

notato che l'algebra usata per gli spinori implica che il partner del s-leptone (s-quark) left-handed è l'anti-leptone (anti-quark) right-handed in modo che in ogni super-multipletto risulti $\Sigma_k Y_k = 0$. Il numero di stati di fermioni in un super-multipletto è uguale al numero di stati di bosoni.

super-partner	spin 0	spin 1/2	spin 1	$U(1)_Y$	$SU(2)_L$	$SU(3)_C$
sleptoni	$(\tilde{\nu}_L\ \tilde{e}_L)$	$(\nu_L\ e_L)$		-1	2	1
$\times 3$	$\tilde{e}_R$	$\bar{e}_R$		2	1	1
squark	$(\tilde{u}_L\ \tilde{d}_L)$	$(u_L\ d_L)$		1/3	2	3
$\times 3$	$\tilde{u}_R$	$\bar{u}_R$		-4/3	1	$\bar{3}$
	$\tilde{d}_R$	$\bar{d}_R$		2/3	1	$\bar{3}$
bini		$\tilde{B}_1\ \tilde{B}_2\ \tilde{B}_3$	$B_1\ B_2\ B_3$	0	3	1
		$\tilde{B}_Y$	B_Y	0	1	1
gluini		$\tilde{g}$	g	0	1	8
higgsini	$(H_u^+\ H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^+\ \tilde{H}_u^0)$		+1	2	1
	$(H_d^0\ H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0\ \tilde{H}_d^-)$		-1	2	1

Table 4.1: Particelle super-simmetriche e molteplicità degli stati. I super-partner delle particelle note sono indicati con ˜.

4.23.2 Il modello supersimmetrico minimale

Le particelle e le corrispondenti super-particelle della tabella costituiscono il Modello Standard Supersimmetrico Minimale, MSSM, cui va aggiunta l'interazione con il campo gravitazionale che non è trattata qui. Le super-particelle della terza colonna, bini e higgsini, si mescolano a formare fermioni carichi e neutri chiamati *chargini*, $\tilde{\chi}_1^{\pm}$ e $\tilde{\chi}_2^{\pm}$, e *neutralini*, $\tilde{\chi}_1^0$, $\tilde{\chi}_2^0$, $\tilde{\chi}_3^0$ e $\tilde{\chi}_4^0$. Il campo di Higgs è costituito da otto campi reali che, per effetto della rottura spontanea della simmetria elettrodebole, danno origine alla massa di tre bosoni di gauge $W^{\pm}$ e Z^0 e a cinque bosoni di Higgs: due carichi $H^{\pm}$ e due neutri h^0 e A^0 con autovalori opposti di CP, oltre al bosone H^0 del Modello Standard. La Fig. 4.39 mostra come gli accoppiamenti di particelle e campi sono rappresentati con l'introduzione dei super-partner.

Se la super-simmetria fosse una simmetria esatta, le particelle e le corrispondenti super-particelle avrebbero lo stesso valore di massa. Ma non è stata osservata alcuna super-particella (con valore di massa minore di circa 100 GeV) e quindi la super-simmetria è *rotta* a bassa energia. Diversi meccanismi sono stati introdotti per descrivere questo fenomeno: rottura *spontanea* oppure *mediata* da qualche legge. Il meccanismo di rottura della super-simmetria determina la gerarchia dei valori di massa delle particelle super-simmetriche e quindi guida lo studio di processi che possano produrle in interazioni di alta energia su cui torneremo brevemente nel seguito.

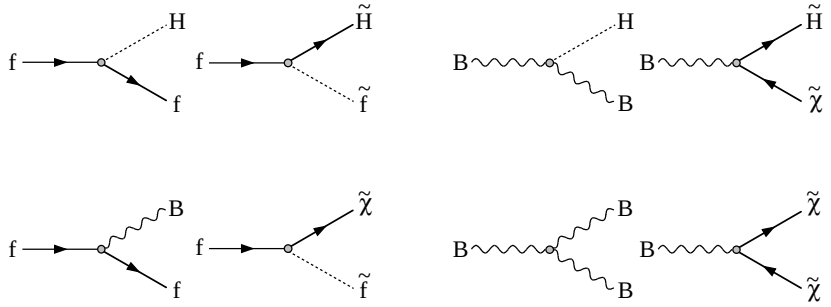


Figure 4.39: Accoppiamenti di particelle e campi e dei corrispondenti super-partner. Fermione: linea continua, bosone scalare: linea tratteggiata, bosone di gauge: linea ondulata.

La R-parità – Il Modello Standard non prescrive la conservazione separata dei numeri barionico A e leptonico L, questa viene aggiunta *had hoc* sulla base delle osservazioni quali, ad esempio, il limite superiore alla vita media del protone. I possibili contributi al decadimento del protone sono comunque molto piccoli. Nel MSSM invece il processo $p \to e^+\pi^0$ (o analoghi con muoni o neutrini o mesoni K) può essere mediato dallo scambio di uno squark, $uud \to u\tilde{q}^* \to u\bar{u}e^+$, con cambio di una unità di A e L. Per evitare questo tipo di processi non è necessario ipotizzare la conservazione separata del numero barionico e leptonico, ma è sufficiente ipotizzare l'invarianza della super-simmetria rispetto ad una trasformazione discreta di *parità della materia*, $P_M = (-1)^{3A-L}$. Infatti, nel decadimento del protone o in casi analoghi, ad esempio transizioni $n \to \bar{n}$, P_M cambia segno.

D'altra parte l'operatore $(-1)^{2s}$ ha autovalori opposti se applicato a fermioni o bosoni, quindi la parità si puo estendere alla super-simmetria introducendo l'operatore di *R-parità*

$$R = (-1)^{3A-L+2s} \tag{4.19}$$

che ha autovalore $R = +1$ per le particelle e $R = -1$ per le super-particelle. Nel MSSM si ipotizza la *conservazione della R-parità*. Questo ha alcune importanti conseguenze

- in interazioni di particelle ordinarie, le super-particelle vengono prodotte in coppia;
- una super-particella instabile decade in almeno una super-particella.

Da questo segue che la super-particella più leggera, LSP, deve essere stabile e, poiché non è stata ancora osservata, è plausibile che abbia massa elevata e che interagisca debolmente. Quindi la LSP è un buon candidato per interpretare la *materia oscura fredda* presente nell'Universo (capitolo ???). Nella maggior parte dei modelli di rottura della super-simmetria, la LSP è il neutralino $\tilde{\chi}_1^0$, un fermione neutro soggetto solo a interazione debole.

4.23.3 Fenomenologia del MSSM

La teoria super-simmetrica, oltre all'elegante unificazione della statistica di fermioni e bosoni, e alla consolidazione del modello di rottura spontanea della simmetria elettrodebole con il campo di Higgs, ha altri notevoli punti interessanti.

Il primo è che non introduce nuove interazioni, quindi gli elementi di matrice per la produzione di particelle super-simmetriche e per calcolare le probabilità di decadimento sono calcolabili. Purtroppo non è noto il valore delle masse, né la gerarchia dei valori di massa, quindi i fattori cinematici nel calcolo delle probabilità di interazione o decadimento non sono noti. Comunque, se le super-particelle esistono, devono influenzare le interazioni delle particelle note attraverso le correzioni radiative. Sulla base dei risultati di molte misure di precisione dei parametri del Modello Standard, si conclude che i valori di massa sono maggiori di $\sim 100\ GeV$. Inoltre, sulla base di argomenti generali sulla consistenza della teoria, si deduce che la scala di energia delle particelle super-simmetriche non è molto maggiore di $\sim 1\ TeV$.

I parametri di partenza per stimare i valori di massa sono diversi per i diversi modelli proposti per la rottura della super-simmetria. In generale sono tre parametri relativi alle simmetrie di gauge, m_1, m_2 e m_3, per $U(1)$, $SU(2)$ e $SU(3)$, e i valori di aspettazione del vuoto del campo di Higgs, v_u e v_d della (4.18), con $v_u^2 + v_d^2 = v^2 = (246\ GeV)^2$, e il rapporto $\tan\beta = v_u/v_d$.

Ricerche dirette di produzione di particelle super-simmetriche sono state effettuate nelle interazioni e^+e^- al *LEP* fino a ∼200 GeV di energia nel centro di massa, e nelle interazioni protone-antiprotone al *TeVatron* Collider a ∼2 TeV di energia nel centro di massa. Nell'ipotesi di conservazione della R-parità le particelle supersimmetriche sono prodotte in coppia, ad esempio,

$$\text{LEP:} \qquad e^+e^- \to \tilde{\chi}_j^+\tilde{\chi}_j^- \qquad \to \tilde{\chi}_j^0\tilde{\chi}_k^0 \qquad \to \tilde{\ell}^+\tilde{\ell}^- \qquad \to \tilde{q}\tilde{q}^* \qquad \ldots$$

$$\text{TeVatron:} \qquad q\bar{q} \to \tilde{g}\tilde{g} \qquad qg \to \tilde{g}\tilde{q} \qquad gg \to \tilde{g}\tilde{g} \qquad gg \to \tilde{q}\tilde{q}^* \qquad \ldots$$

e le super-particelle prodotte decadono rapidamente in LSP che prendono una frazione considerevole dell'energia a disposizione nel centro di massa e non vengono rivelate (perché debolmente interagenti). Quindi la produzione di questi stati finali è caratterizzata da una grande *energia mancante*. Queste ricerche non hanno dato risultati positivi, ma hanno permesso di porre limiti inferiori al valore delle masse

$$m(\tilde{\chi}_1^0) > 50 \qquad m(\tilde{\chi}_1^\pm) > 100 \qquad m(\tilde{g}) > 200 \qquad m(\tilde{q}) > 300 \quad GeV$$

Il secondo punto che rende attraente la super-simmetria va nella direzione dell'unificazione delle costanti di accoppiamento dei gruppi di gauge. Nell'appendice 4.20 abbiamo mostrato che la *costante* di accoppiamento dell'elettromagnetismo, α, cresce con il 4-impulso trasferito Q per effetto delle correzioni radiative

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - (b/4\pi)\ \alpha(\mu^2)\ln Q^2/\mu^2} \tag{4.20}$$

dove μ è un valore di riferimento del 4-impulso trasferito e il parametro b tiene conto dell'effetto di *tutte* le particelle che si accoppiano con il campo: b è positivo per il campo elettromagnetico. Lo stesso avviene per la costante di accoppiamento relativa al gruppo *abeliano* $U(1)_Y$. Invece le costanti di accoppiamento dei gruppi *non abeliani* $SU(2)_L$ e $SU(3)_C$ hanno andamento opposto per effetto dell'autointerazione dei campi: b è negativo. Per i gruppi di gauge abbiamo

$$\alpha_1 = \frac{5}{3}\frac{\alpha}{\cos^2\theta_W} \qquad \alpha_2 = \frac{\alpha}{\sin^2\theta_W} \qquad \alpha_3 = \alpha_s$$

e i valori misurati a $Q^2 = m_Z^2$ sono: $\alpha_1 = 0.0168, \alpha_2 = 0.0335, \alpha_3 = 0.118$. Nel Modello Standard i valori del parametro b sono

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -22/3 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \times n_f + \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} \times n_{higgs} = \begin{pmatrix} 41/10 \\ -19/6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$n_f = 3$ è il numero di generazioni di fermioni e $n_{higgs} = 1$ il numero di doppietti del campo di Higgs. Quindi, se non esistono altre particelle di massa elevata, l'andamento (4.20) di α_i non prevede che ci sia un valore di energia di grande unificazione per cui i valori delle tre costanti di accoppiamento siano confrontabili, come si osserva in Fig. 4.40 che mostra l'andamento dell'inverso delle costanti di accoppiamento

$$\frac{1}{\alpha_i(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_i(m_Z^2)} - \frac{b_i}{4\pi}\ln\frac{Q^2}{m_Z^2}$$

in funzione del 4-impulso trasferito.

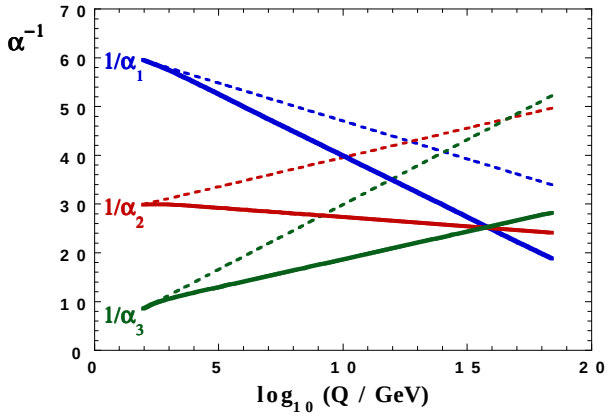


Figure 4.40: Costanti di accoppiamento dei campi di gauge, $1/\alpha_i$, in funzione della scala di energia di interazione. Modello Standard: linee tratteggiate, MSSM: linee continue.

Nel MSSM anche le particelle super-simmetriche contribuiscono al valore di b quando $Q > m_{SUSY}$. In questo caso si ha

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times 3 + \begin{pmatrix} 3/10 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 66/10 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Con ipotesi sul valore di m_{SUSY} basate sui limiti di massa stabiliti dagli esperimenti e sulla consistenza del MSSM che prevede m_{SUSY} dell'ordine di 1 TeV si ottiene invece un andamento diverso e le tre costanti di accoppiamento hanno un valore comune, $\alpha \simeq 0.04$, per $Q \sim 10^{16}\ GeV$. Questo potrebbe essere il valore dell'energia di grande unificazione e risulta minore dell'energia di Planck.

4.24 Premi Nobel citati nel testo

1901	Wilhelm Röngten	scoperta dei raggi X
1902	Hendrik Lorentz	influenza del magnetismo sull'emissione di radiazione
	Pieter Zeeman	
1903	Henri Becquerel	scoperta della radioattività
	Pierre Curie, Marie Curie	studio dell'emissione di sostanze radioattive
1904	Lord Rayleigh	studio della densità dei gas
1905	Philipp Lenard	ricerche sui raggi catodici
1906	Joseph Thomson	studio della conducibilità nei gas
1907	Albert Michelson	realizzazione dello spettrometro di Michelson
1908	Ernest Rutherford *	studio delle proprietà di sostanze radioattive
1911	Wilhelm Wien	leggi della radiazione termica
1911	Marie Curie *	scoperta del radio e del polonio
1914	Max von Laue	scoperta della diffrazione dei raggi X dai cristalli
1915	William Bragg	studio della struttura cristallina con raggi X
	Lawrence Bragg	
1917	Charles Barkla	scoperta dell'emissione di raggi X atomici
1918	Max Planck	scoperta dei quanti di energia
1921	Albert Einstein	leggi dell'effetto fotoelettrico
1921	Frederick Soddy *	ricerche sulla natura degli isotopi
1922	Niels Bohr	teoria della struttura atomica
1922	Francis Aston *	sviluppo dello spettrometro di massa
1923	Robert Millikan	carica elettrica elementare e studio dell'effetto fotoelettrico
1924	Manne Siegbahn	ricerche sulla spettroscopia a raggi X
1925	James Franck	studio della diffusione di elettroni dagli atomi
	Gustav Hertz	
1927	Arthur Compton	scoperta dell'effetto Compton
	Charles Wilson	invenzione della camera di Wilson
1929	Louis de Broglie	teoria ondulatoria dell'elettrone
1930	Venkata Raman	scattering della luce e effetto Raman
1932	Werner Heisenberg	teoria della meccanica quantistica
1933	Erwin Schrödinger	teoria quantistica dell'atomo
	Paul Dirac	
1934	Harold Urey *	scoperta del deuterio
1935	James Chadwick	scoperta del neutrone
1935	Frédéric Joliot *	scoperta di nuovi elementi radioattivi
	Irène Curie *	
1936	Victor Hess	scoperta della radiazione cosmica
	Carl Anderson	scoperta del positrone

* premio Nobel per la Chimica

1937	Clinton Davisson	scoperta della diffrazione di elettroni da cristalli
	George Thomson	
1938	Enrico Fermi	studio di reazioni indotte da neutroni
1939	Ernest Lawrence	invenzione del ciclotrone e produzione di elementi radioattivi
1943	Otto Stern	metodo dei raggi molecolari e momento magnetico del protone
1944	Isidor Rabi	metodo della risonanza magnetica nucleare
1944	Otto Hahn *	scoperta della fissione dei nuclei pesanti
1945	Wolfgang Pauli	scoperta del principio di esclusione
1948	Patrick Blackett	metodi di osservazione della radiazione cosmica
1949	Hideki Yukawa	studio delle forze nucleari e previsione dell'esistenza dei mesoni
1950	Cecil Powell	sviluppo delle emulsioni nucleari e scoperta dei mesoni
1951	John Cockcroft	metodi di accelerazione di particelle e studio di reazioni nucleari
	Ernest Walton	
1951	Edwin McMillan *	studio di elementi transuranici
	Glenn Seaborg *	
1952	Felix Bloch, Edward Purcell	sviluppo della risonanza magnetica nucleare
1954	Max Born	interpretazione statistica della funzione d'onda
	Walter Bothe	metodo della coincidenza temporale
1955	Willis Lamb	struttura fine dello spettro dell'idrogeno
	Polykarp Kusch	misura del momento magnetico dell'elettrone
1957	Chen Yang, Tsung-Dao Lee	studio dell'invarianza per trasformazione di parità
1958	Pavel Cherenkov	scoperta e interpretazione dell'effetto Cherenkov
	Il'ja Frank, Igor Tamm	
1959	Emilio Segrè	scoperta dell'antiprotone
	Owen Chamberlaim	
1960	Donald Glaser	invenzione della camera a bolle
1960	Willard Libby *	metodo di datazione con il Carbonio-14
1961	Robert Hofstadter	ricerche sullo scattering di elettroni da nuclei
	Rudolf Mössbauer	ricerche sull'assorbimento di risonanza di fotoni
1963	Eugene Wigner	studi sulle leggi di simmetria delle particelle
	Maria Mayer, Hans Jensen	studi sulle leggi di simmetria dei nuclei
1965	Julian Schwinger	sviluppo dell'elettrodinamica quantistica
	Richard Feynman	
	Sin-Itiro Tomonaga	
1967	Hans Bethe	teoria delle reazioni nucleari
1968	Luis Alvarez	scoperta di stati risonanti delle particelle
1969	Murray Gell-Mann	scoperta delle leggi di simmetria delle interazioni adroniche
1975	Aage Bohr, Ben Mottelson	modelli collettivi dei nuclei
	Leo Rainwater	
1976	Burton Richter	scoperta della risonanza J/ψ
	Samuel Ting	

* premio Nobel per la Chimica

1978	Arno Penzias	scoperta della radiazione cosmica di fondo
	Robert Wilson	
1979	Sheldon Glashow, Abdus Salam	teoria elettro-debole delle interazioni fondamentali
	Steven Weinberg	
1980	James Cronin, Val Fitch	scoperta della violazione della simmetria CP
1983	William Fowler	studio delle reazioni nucleari e formazione degli element
1984	Carlo Rubbia	scoperta dei bosoni vettori W e Z
	Simon van der Meer	
1988	Leon Lederman, Melvin Schwartz	scoperta del neutrino μ
	Jack Steinberger	
1989	Hans Dehmelt, Wolfgang Paul	metodo della trappola di ioni
1990	Jerome Friedman	studio della struttura a quark del nucleone
	Henry Kendall, Richard Taylor	
1992	Georges Charpak	sviluppo dei rivelatori di particelle ionizzanti
1994	Bertran Brockhouse	sviluppo della spettroscopia neutronica
	Clifford Shull	sviluppo della diffrazione di neutroni
1995	Frederick Reines	scoperta del neutrino
	Martin Perl	scoperta del leptone τ
1999	Gerardus 't Hooft	consistenza quantistica della teoria elettro-debole
	Martinus Veltman	
2002	Raymond Davis	osservazione dei neutrini solari
	Masatoshi Koshiba	osservazione dei neutrini di origine cosmica
2004	David Gros, David Politzer	teoria della cromodinamica quantistica
	Frank Wilczek	
2005	Roy Glauber	diffusione da potenziale
2008	Yoichiro Nambu	rottura spontanea di simmetria
	Makoto Kobayashi, Toshihide Maskawa	simmetrie dei quark "pesanti"

4.25 Esercizi

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 27 aprile 1995

1. Nell'anello di collisione protone-antiprotone del CERN si fanno circolare protoni di impulso p = 300 GeV/c. L'anello ha raggio R = 1 km. La camera a vuoto contiene aria (azoto, Z = 7, A = 14, densità NTP $\rho = 1.25\ 10^{-3}\ g\ cm^{-3}$) a pressione $P = 10^{-11}$ atmosfere. Calcolare:
   - il campo magnetico nell'anello;
   - il periodo di rivoluzione dei protoni;
   - il coefficiente di assorbimento dei protoni se la sezione d'urto di interazione con i nuclei del gas è $\sigma = 300\ mb$ ($mb = 10^{-27}\ cm^2$);
   - la vita media del fascio, cioè l'intervallo di tempo in cui l'intensità del fascio si riduce al valore e^{-1} di quella iniziale.

2. Nell'articolo *Possible Existence of a Neutron* J.Chadwick sostiene che, per spiegare l'emissione di protoni con velocità $v_p \approx 3\ 10^9\ cm/s$ mediante effetto Compton, è necessario che nel processo vengano emessi fotoni con energia di almeno 50 MeV. Giustificare questa affermazione: calcolare l'impulso massimo ceduto da un fotone di energia $E_\gamma = 50\ MeV$ ad un protone per effetto Compton, l'energia cinetica del protone e la sua velocità.

3. Un canale magnetico seleziona particelle di impulso $p = 0.5\ GeV/c$. Le particelle hanno massa $m_\pi = 0.14\ GeV/c^2$ e $m_K = 0.50\ GeV/c^2$. Per selezionare le particelle si usa il tempo di volo tra due rivelatori a scintillatore plastico (densità $\rho = 1\ g\ cm^{-3}$, $dE/dx = 2\ MeV/g\ cm^{-2}$, $X_o = 40\ cm$) che hanno spessore di 2 cm e sono ad una distanza di 3 m uno dall'altro. Calcolare:
   - la velocità dei due tipi di particelle;
   - il tempo di volo tra i due rivelatori per i due tipi di particelle;
   - la risoluzione temporale di ciascun rivelatore (si assuma uguale) necessaria per selezionare le particelle entro almeno 4 deviazioni standard;
   - l'energia perduta nel primo rivelatore;
   - l'angolo medio di deflessione coulombiana multipla, per i due tipi di particelle, dopo aver attraversato il primo rivelatore.

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 16 maggio 1995

1. Usando la formula di Bethe-Weizsäcker calcolare l'energia di legame dei nuclei isobari con A = 27: ${}^{27}_{12}Mg$, ${}^{27}_{13}Al$, ${}^{27}_{14}Si$. Determinare quale è il nucleo più stabile e indicare quali sono i contributi all'energia di legame che rendono gli altri meno stabili.

   [Coefficienti: termine di volume = 15.7, di superficie = 17.2, coulombiano = 0.71, di pairing = 23.3, di simmetria = ± 12 MeV].

2. Il nucleo di ${}^{6}_{3}Li$ ha momento magnetico $\mu = 0.82\ \mu_N$. I momenti magnetici del protone e del neutrone sono rispettivamente $\mu_p = +2.79\ \mu_N$ e $\mu_n = -1.91\ \mu_N$.

Quale informazione si ricava sullo spin del nucleo ${}^6_3Li$? Sulla base di quali argomenti spiegate che il nucleo ${}^6_2He$ ha spin 0 ? Scrivere la reazione del decadimento β del nucleo ${}^6_2He$. Stimare, sulla base dei contributi all'energia di legame, se sia energeticamente possibile e indicare che tipo di transizione si ha nel decadimento.

3. Il nucleo di deuterio, ${}^2_1H$, ha energia di legame 2.23 MeV. Il nucleo di trizio, ${}^3_1H$, ha energia di legame 8.48 MeV. Calcolare l'energia che occorre per portare due nuclei ${}^2_1H$ alla distanza di 1.4 10^{-13} cm e la temperatura corrispondente. Se in queste condizioni avviene la reazione di fusione

$$ {}^2_1H + {}^2_1H \rightarrow {}^3_1H + X $$

indicare quale particella viene prodotta nello stato finale e calcolare l'energia prodotta nella reazione di fusione.

[$k = 8.6\ 10^{-11}\ MeV/K$]

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 19 giugno 1995

1. Nell'annichilazione di antiprotoni di impulso $p = 2.2\ GeV/c$ con protoni a riposo vengono prodotte coppie $\Lambda\overline{\Lambda}$. Considerare il caso di produzione simmetrica in cui le particelle Λ e $\overline{\Lambda}$ sono prodotte, nel riferimento del centro di massa, a 90° rispetto alla direzione dell'antiprotone. Calcolare, nel riferimento del laboratorio, l'impulso delle particelle Λ, l'angolo di produzione rispetto alla direzione dell'antiprotone e il cammino medio di decadimento.

[$m_p = 0.938, \quad m_\Lambda = 1.116\ GeV/c^2; \quad \tau_\Lambda = 2.6\ 10^{-10}\ s$].

2. Le frazioni di decadimento dei mesoni K^o in coppie di pioni sono:

$$ BR(K^o_S \rightarrow \pi^+\pi^-) = 0.686 \qquad BR(K^o_L \rightarrow \pi^+\pi^-) = 2.03\ 10^{-3} $$

$$ BR(K^o_S \rightarrow \pi^o\pi^o) = 0.314 \qquad BR(K^o_L \rightarrow \pi^o\pi^o) = 0.91\ 10^{-3} $$

Spiegare in base a quale legge di simmetria il decadimento $K^o_L \rightarrow \pi\pi$ è soppresso rispetto al decadimento $K^o_S \rightarrow \pi\pi$. Spiegare in base a quale regola di selezione si giustifica il rapporto

$$ \frac{BR(K^o \rightarrow \pi^o\pi^o)}{BR(K^o \rightarrow \pi^+\pi^-)} \approx \frac{1}{2} $$

3. Il valore della vita media del leptone μ è legato alla costante di Fermi dalla relazione

$$ \frac{1}{\tau_\mu} = \frac{\Gamma_\mu}{\hbar} \qquad \Gamma_\mu = \Gamma(\mu \rightarrow \nu_\mu\ e\ \overline{\nu}_e) = \frac{G^2\ (m_\mu\ c^2)^5}{192\ \pi^3} $$

Il leptone τ decade in elettrone o muone con frazioni di decadimento:

$$ BR(\tau \rightarrow \nu_\tau\ e\ \overline{\nu}_e) = 0.177 \pm 0.002 \qquad BR(\tau \rightarrow \nu_\tau\ \mu\ \overline{\nu}_\mu) = 0.180 \pm 0.002 $$

Spiegare perché le probabilità di decadimento del leptone τ in elettrone e muone sono, entro gli errori di misura, uguali. Calcolare la vita media del leptone τ.

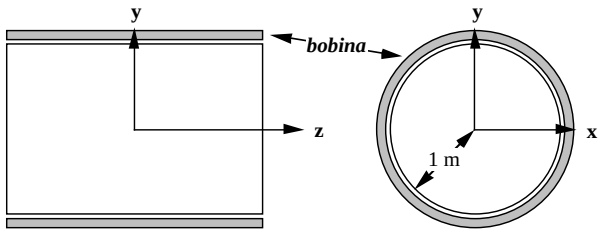
[$\tau_\mu = 2.2\ 10^{-6}\ s$; $\quad m_\mu = 0.106,\ m_\tau = 1.78\ GeV/c^2$; $\quad 192\pi^3 = 6.0\ 10^3$]

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 11 aprile 1996

1. Una particella neutra di massa $M = 0.5\ GeV/c^2$ decade in due particelle di carica opposta e di massa $m_1 = m_2 = 0.14\ GeV/c^2$. Calcolare l'impulso e la velocità delle particelle nel riferimento della particella M e la velocità di una rispetto all'altra.

2. Una sorgente della potenza di $10^{-4}\ W$ emette in modo isotropo raggi X di energia $10\ keV$. La sorgente è schermata da un involucro che ha un foro di raggio $r = 0.5\ cm$ a distanza $d = 10\ cm$ dalla sorgente. All'esterno vi è un rivelatore dello spessore di $2\ cm$ riempito con gas di densità $2\ 10^{-3}\ g\ cm^{-3}$. Il coefficiente di assorbimento dei raggi X nel gas è $\mu = 20\ g^{-1}cm^2$. Il materiale tra la sorgente e il rivelatore assorbe la metà dei raggi X. Calcolare il flusso di energia che investe il rivelatore, il flusso di raggi X e la frequenza di conteggio del rivelatore.

3. In un esperimento presso un anello di collisione le traiettorie delle particelle cariche sono ricostruite in un rivelatore cilindrico di raggio $r = 1\ m$ riempito con gas a pressione di 4 atmosfere e immerso nel campo magnetico uniforme di un solenoide $B_z = 0.4\ T$. Nel centro del rivelatore viene prodotta una particella di carica e con componente longitudinale e trasversa dell'impulso $p_z = 3$, $p_T = 4\ GeV/c$. La particella ha massa $m \ll p/c$. Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria, l'angolo di deflessione nel piano trasverso all'uscita del rivelatore, l'angolo r.m.s. di diffusione coulombiana nel piano trasverso all'uscita del rivelatore e l'energia perduta nel rivelatore. Verificare che $\langle\theta_{rms}\rangle \ll \theta_{curv}$, $\Delta E \ll E$.



[Per il gas, a condizioni NTP,
$\rho = 2\ 10^{-3}\ g\ cm^{-3}$; $\quad X_o = 40\ g\ cm^{-2}$; $\quad \langle dE/dx\rangle = 2\ MeV\ g^{-1}cm^2$]

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 16 maggio 1996

1. Il nucleo $^{226}_{88}Ra$ decade α con periodo di dimezzamento $t_{1/2} = 1602$ anni. L'unità di misura di attività ($1\ Curie \equiv 1\ Ci$) è definita come il numero

di disintegrazioni al secondo di un grammo di radio. Scrivere la reazione del decadimento. Calcolare il numero di nuclei presenti in un grammo di $^{226}_{88}Ra$ e il numero di disintegrazioni al secondo corrispondenti all'attività di 1 Ci.

[1 anno $\approx \pi\ 10^7$ secondi]

2. Il nucleo $^{3}_{1}H$ decade β nel nucleo $^{3}_{2}He$. Nel decadimento l'energia cinetica massima dell'elettrone è 19 keV. Indicare la configurazione di decadimento in cui l'energia cinetica dell'elettrone è massima. Calcolare la differenza di energia di legame tra i due nuclei. Nell'ipotesi che la differenza di energia di legame sia dovuta alla repulsione coulombiana dei due protoni nel nucleo $^{3}_{2}He$, calcolare la distanza media dei protoni.

3. Nell'esperimento *Measurement of the helicity of the neutrino* si sfrutta la fluorescenza di risonanza nucleare nel decadimento γ del nucleo $^{152}_{62}Sm^*$ che ha vita media $\tau = 3\ 10^{-14}\ s$. Il nucleo $^{152}_{63}Eu$, a seguito di cattura elettronica, decade nello stato eccitato $^{152}_{62}Sm^*$ e in un neutrino di energia $E_\nu = 0.84\ MeV$. La differenza di massa tra i nuclei $^{152}_{63}Eu$ e $^{152}_{62}Sm$ è 1.3 MeV/c^2. L'energia di legame dell'elettrone catturato è trascurabile. La massa del nucleo $^{152}_{62}Sm$ è 142 GeV/c^2. Calcolare:
- la larghezza di riga nel decadimento $^{152}_{62}Sm^* \rightarrow\ ^{152}_{62}Sm + \gamma$;
- la differenza di energia nella transizione;
- la differenza tra l'energia del fotone in assorbimento e l'energia del fotone in emissione.
Spiegare quale è il meccanismo per cui si ha nell'esperimento l'assorbimento di risonanza $\gamma +\ ^{152}_{62}Sm \rightarrow\ ^{152}_{62}Sm^*$.

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 12 giugno 1996

1. Un fascio di mesoni π^- è inviato su un bersaglio di idrogeno liquido per studiare la produzione di barioni Σ. Indicare gli stati finali a due particelle in cui vengono prodotti barioni Σ e la composizione in autostati di isospin. Calcolare l'energia di soglia dei mesoni π^-.

2. La reazione $e^+e^- \rightarrow \phi \rightarrow K^+K^-$ viene prodotta in un anello di collisione che ha luminosità $L = 10^{32}\ cm^{-2}s^{-1}$. La sezione d'urto è $\sigma(e^+e^- \rightarrow \phi) = 4\ 10^{-30}\ cm^2$. La frazione di decadimento è $BR(\phi \rightarrow K^+K^-) = 0.5$. La distribuzione angolare è

$$\frac{d^2n}{d\phi\ dcos\ \theta} = \frac{3}{8\pi}\ sin^2\theta$$

Calcolare l'impulso dei mesoni K e il numero di eventi al secondo in cui entrambe i mesoni decadono in un rivelatore che ha accettanza $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$, $10\ cm \leq r \leq 100\ cm$, dove r è la distanza dal punto di incrocio dei fasci.

[$m_\phi = 1.019$, $m_K = 0.494\ GeV/c^2$, $\tau_K = 1.24\ 10^{-8}\ s$]

3. Il barione Σ^+ decade $\Sigma^+ \to p\ \pi^o$ e $\Sigma^+ \to n\ \pi^+$ con vita media $\tau = 0.80\ 10^{-10}\ s$ e con frazioni di decadimento

   $BR(\Sigma^+ \to p\ \pi^o) = 0.516 \pm 0.003$ $\qquad$ $BR(\Sigma^+ \to n\ \pi^+) = 0.483 \pm 0.003$

   Verificare, sulla base della legge $\Delta I = 1/2$, che gli elementi di matrice dei decadimenti sono uguali e giustificare perché $BR(\Sigma^+ \to p\ \pi^o) > BR(\Sigma^+ \to n\ \pi^+)$. Indicare i decadimenti più probabili del barione Σ^- e dare una stima della vita media del barione Σ^-.

   masse in GeV/c^2

π^o	$\pi^\pm$	$K^\pm$	K^o	p	n	Λ^o	Σ^+	Σ^o	Σ^-
0.135	0.140	0.494	0.497	0.938	0.939	1.116	1.189	1.193	1.197

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 3 aprile 1997

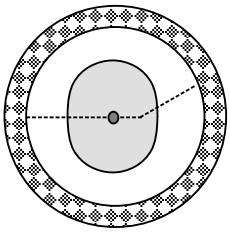
1. Il muone è una particella instabile di massa 105 MeV/c^2 e vita media $2.2\ 10^{-6}\ s$. Un fascio di muoni viene fatto circolare in un anello di raggio $R = 14\ m$ con un campo magnetico uniforme $B = 0.5\ T$ normale al piano dell'anello. Calcolare l'impulso dei muoni, il periodo di rivoluzione e la frazione di muoni che decadono in un periodo.

2. Una particella α ($m_\alpha = 3.7\ GeV/c^2$, $z = 2$) di energia cinetica $E_c = 7.4\ MeV$ viene inviata su un bersaglio costituito da un sottile foglio di rame dello spessore di $5\ 10^{-4}\ cm$. Calcolare la perdita di energia per ionizzazione nel foglio di rame, l'energia cinetica e l'angolo di diffusione coulombiana multipla all'uscita del foglio.

   Rame: Z = 29, A = 64, densità = 9.0 g/cm^3, $X_o = 1.4\ cm$
   $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{min} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\beta\gamma=3} = 1.4\ MeV/g\ cm^{-2}$

3. Nella *positron-emission tomography* (PET) si sfrutta il decadimento del positronio (stato legato e^+e^-) in due fotoni. Il positronio si forma fissando una sorgente radioattiva β^+ nel campione da analizzare, i positroni emessi dalla sorgente vengono catturati dagli elettroni del campione con probabilità inversamente proporzionale alla velocità relativa e si assume che il positronio decada a riposo. I fotoni emessi nel decadimento vengono diffusi per effetto Compton nel materiale che circonda il campione. Un rivelatore registra i fotoni se hanno energia maggiore di una soglia E_s pari a 80% dell'energia dei fotoni emessi.
   Calcolare il valore minimo e massimo dell'energia dei fotoni diffusi per effetto Compton, il coefficiente di assorbimento per fotoni diffusi con energia $E' < E_s$, e la probabilità che il rivelatore registri la coincidenza di due fotoni.
   Il materiale che circonda il campione è acqua e lo spessore è 10 cm. La sezione d'urto differenziale di diffusione Compton è

$$\frac{d\sigma}{dcos\theta} = \pi r_o^2 \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left[\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - sin^2\theta\right]$$



Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 15 maggio 1997

1. Si vuole misurare la distribuzione di carica elettrica del nucleo $^{40}_{20}Ca$ con diffusione elastica di elettroni di impulso 400 MeV/c. Si fa l'ipotesi che la distribuzione sia uniforme per $r < R$ e nulla per $r \geq R$ dove R è il raggio medio del nucleo: $R = 1.25\ 10^{-13}\ cm \cdot A^{1/3}$.
   Calcolare per quali valori dell'angolo di diffusione si hanno i primi due massimi della sezione d'urto differenziale e il valore della sezione d'urto differenziale in queste condizioni di misura.

2. Gli isotopi del Torio (Z = 90) decadono per emissione α in isotopi del Radio (Z = 88). Le catteristiche di alcuni isotopi sono:

Z	A	$BE\ (MeV)$	J^P	$\tau\ (s)$	Z	A	$BE\ (MeV)$	J^P
90	230	1755.22	0^+	$3.4\ 10^{12}$	88	226	1731.69	0^+
90	229	1748.43	$5/2^+$	$3.3\ 10^{11}$	88	225	1725.30	$3/2^+$
90	228	1743.19	0^+	$8.7\ 10^{7}$	88	224	1720.41	0^+

   Calcolare l'energia cinetica, l'impulso e lo stato di momento angolare delle particelle α emesse nei decadimenti del Torio. Riportare le energie e le vite medie nel grafico. Il decadimento $^{229}_{90}Th \rightarrow\ ^{225}_{88}Ra + \alpha$ ha vita media circa due ordini di grandezza maggiore rispetto all'estrapolazione degli altri dati. Spiegare qualitativamente perché.

   [$m_p = 938.27,\ m_n = 939.57,\ m_e = 0.51,\ m_\alpha = 3727.38\ MeV/c^2$]

3. Il nucleo $^{60}_{27}Co(5^+)$ decade β nello stato eccitato $^{60}_{28}Ni^*(4^+)$ del nucleo di Nichel. Questo decade γ nello stato eccitato $^{60}_{28}Ni^*(2^+)$ che, a sua volta, decade γ nello stato fondamentale $^{60}_{28}Ni(0^+)$. La differenza di massa è $M(^{60}_{27}Co) - M(^{60}_{28}Ni) = 3.33\ MeV$. L'energia dei fotoni emessi è 1.17 e 1.33 MeV. Indicare che tipo di transizione si ha nel decadimento β e calcolare il valore massimo dell'energia cinetica dell'elettrone. Indicare quali tipi di transizione si hanno nei decadimenti γ e dare una stima della vita media del decadimento $2^+ \rightarrow 0^+$ nel nucleo $^{60}_{28}Ni$.

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 6 giugno 1997

1. In un esperimento in cui si è misurata la massa del pione neutro, i mesoni π^o vengono prodotti con la reazione $\pi^-\ p \rightarrow \pi^o\ n$ in cui i mesoni π^- vengono

catturati a riposo in un bersaglio di idrogeno. Calcolare l'impulso dei mesoni π^o, i valori minimo e massimo dell'energia dei fotoni emessi nel decadimento $\pi^o \to \gamma\ \gamma$ e la distribuzione di energia dei fotoni, dn/dE_γ. Calcolare i valori minimo e massimo dell'angolo tra i fotoni.

2. Il mesone pseudoscalare η^o ha numeri quantici $J^{PC} = 0^{-+}$ e decade per interazione elettromagnetica con vita media $\tau = 5.6\ 10^{-19}\ s$. I modi di decadimento più probabili e le relative frazioni di decadimento sono elencati nelle prime due colonne. Calcolare le larghezze parziali dei decadimenti del mesone η^o. I decadimenti nella terza colonna non sono mai stati osservati. Spiegare perché questi decadimenti non si osservano indicando quali leggi di conservazione sono violate.

decadimento	BR	*decadimento ?*
$\eta^o \to \gamma\ \gamma$	0.392	$\eta^o \to \gamma\ \gamma\ \gamma$
$\eta^o \to \pi^o\ \pi^o\ \pi^o$	0.321	$\eta^o \to \pi^o\ \pi^o$
$\eta^o \to \pi^+\ \pi^o\ \pi^-$	0.232	$\eta^o \to \pi^o\ \gamma$

3. Descrivere nel modello a quark il decadimento semileptonico del pione carico, $\pi^- \to \pi^o\ e^-\ \overline{\nu}$, e il decadimento β del neutrone. Disegnare i diagrammi di Feynman. Calcolare la frazione di decadimento $BR(\pi^- \to \pi^o\ e^-\ \overline{\nu})$ dal valore della vita media del pione carico ($\tau_\pi = 2.60\ 10^{-8}\ s$) e del neutrone ($\tau_n = 887\ s$). Approssimare per l'elettrone: $p_{max} \approx E_{max} \gg m_e$ in entrambe i casi.

   [$m_{\pi^\pm} = 139.6,\ m_{\pi^o} = 135.0,\ m_p = 938.3,\ m_n = 939.6 \quad MeV/c^2$]

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 8 aprile 1998

1. Un acceleratore lineare LINAC-RF accelera elettroni da 10 MeV a 20 GeV con una differenza di potenziale alternata di ampiezza 100 kV a frequenza di 20 GHz. Calcolare il gradiente di energia, la lunghezza dell'acceleratore e la distanza percorsa da un elettrone misurata nel sistema di riferimento dell'elettrone.

2. La radiazione cosmica primaria è costituita prevalentemente di protoni che interagiscono negli strati esterni dell'atmosfera terrestre. Consideriamo un modello semplificato dell'atmosfera composta da azoto, di spessore 100 km e densità media pari a 1/10 della densità ρ_o sulla superficie terrestre. La sezione d'urto di assorbimento è pari alla sezione del nucleo di azoto di raggio $R = R_o A^{1/3}$. Calcolare il coefficiente di assorbimento dei protoni, la probabilità che un protone diretto lungo la verticale raggiunga la superficie terrestre e l'energia perduta per ionizzazione in una lunghezza di attenuazione considerando che la velocità è tale che $(dE/dx)_{ion} = costante = 2.5\ MeV/g\ cm^{-2}$.

   [$A = 14$; $R_o = 1.25\ 10^{-13}\ cm$; $\rho_o = 1.25\ 10^{-3}\ g\ cm^{-3}$]

3. Elettroni di energia 1 GeV vengono inviati su un bersaglio di idrogeno e si osserva la diffusione elastica ad angolo polare $\theta = 60^o$. Calcolare il valore del

4-impulso trasferito. I fattori di forma del protone sono parametrizzati con la funzione

$$F(q^2) = \frac{F(q^2 = 0)}{(1 + q^2/q_o^2)^2}$$

con $q_o^2 = 0.71\ GeV^2$. Calcolare il valore dei fattori di forma elettrico e magnetico e la sezione d'urto misurata con un rivelatore di accettanza $\Delta\phi = 2\pi$, $\Delta\theta = 20\ mrad$.

[$r_e = 2.82\ 10^{-13}\ cm$; $m_e = 0.51\ MeV/c^2$; $m_p = 0.938\ GeV/c^2$; $\mu_p = 2.79\ \mu_N$]

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 12 maggio 1998

1. Il nucleo $^{27}_{14}Si$ decade β^+ nel nucleo stabile $^{27}_{13}Al$ che ha energia di legame 224.95 MeV. L'energia cinetica massima del positrone è 3.79 MeV. Calcolare l'energia di legame del nucleo $^{27}_{14}Si$. Facciamo l'ipotesi che la differenza di energia di legame dei nuclei sia dovuta alla differenza di energia elettrostatica
   - giustificare questa ipotesi;
   - dimostrare che, nell'ipotesi che la densità di carica del nucleo sia rappresentata da una distribuzione uniforme in una sfera di raggio R, l'energia elettrostatica è $E = 3Z^2\alpha\hbar c/5R$;
   - calcolare, in questa ipotesi, il raggio dei nuclei con $A = 27$.

2. Irraggiando nuclei $^{9}_{4}Be$ con particelle α si formano nuclei $^{12}_{6}C$. Completare la reazione. Calcolare l'energia cinetica minima delle particelle α per superare la barriera di potenziale. Calcolare, sulla base del modello a strati a particelle indipendenti, lo spin e la parità dei nuclei coinvolti nella reazione. Nell'ipotesi che il momento angolare orbitale nello stato iniziale sia $L = 0$, calcolare il momento angolare orbitale nello stato finale.

3. Il carbonio naturale contiene 98.89% di $^{12}_{6}C$ e 1.11% di $^{13}_{6}C$ che hanno massa atomica $M(^{12}_{6}C) = 12.000$ **u**, $M(^{13}_{6}C) = 13.003$ **u**. Calcolare la massa atomica del carbonio naturale. Un organismo vivente contiene anche una piccola frazione, $1.3\ 10^{-12}$, di $^{14}_{6}C$ radioattivo che decade β^- con vita media $\tau = 8270\ anni$. Calcolare l'attività di un grammo di carbonio in un organismo vivente. Si misura l'attività di un fossile di massa $5 \pm 0.005\ g$ e si registrano 3600 decadimenti in 2 ore di misura. Calcolare l'età del fossile e l'errore di misura.

   [$m_p = 938.27,\ m_n = 939.56,\ m_e = 0.51\ MeV/c^2$; $\quad R_{nucleo} \approx 1.25\ fm \cdot A^{1/3}$]

   [1 anno $\approx \pi\ 10^7\ secondi$]

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 12 giugno 1998

1. Le frazioni di decadimento del barione Λ^o in stati pione-nucleone sono

$$BR(\Lambda^o \to \pi^-\ p) = 0.639 \qquad BR(\Lambda^o \to \pi^o\ n) = 0.358$$

Descrivere i decadimenti nel modello a quark. Spiegare quantitativamente il rapporto tra i valori misurati.

2. Il barione Ω^- (stranezza S = - 3) è prodotto in interazioni di mesoni K^- con bersaglio di idrogeno. Indicare lo stato finale (con il valore minimo di massa) della reazione e calcolare l'energia cinetica minima dei mesoni K^- per produrre lo stato finale. Ω^- è l'unico componente del decupletto di barioni di spin 3/2 che non decada per interazione nucleare. Spiegare il motivo.

   masse in MeV/c^2

π^o	$\pi^\pm$	$K^\pm$	K^o	p	n	Λ^o	Ξ^o	Ξ^-	Ω^-
135.0	139.6	493.7	497.7	938.3	939.6	1115.6	1314.9	1321.3	1672.5

3. La risonanza ψ è uno stato legato $\bar{c}c$ del quarto quark "c" e ha massa $m = 3.1\ GeV/c^2$ e spin 1. In anelli a fasci collidenti e^+e^- si osserva un grande aumento della sezione d'urto di annichilazione $e^+e^- \rightarrow adroni$ in corrispondenza della risonanza. Calcolare il valore della sezione d'urto $\sigma(e^+e^- \rightarrow adroni)$ per energia dei fasci minore della soglia di produzione del quark c ($2E \approx 3.0\ GeV$) e al picco della risonanza. Le frazioni di decadimento sono $BR(\psi \rightarrow e^+e^-) = 0.060 \quad BR(\psi \rightarrow adroni) = 0.878$.

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 12 aprile 1999

1. Un muone (carica e, massa $0.105\ GeV/c^2$) di impulso 10 GeV/c attraversa una lastra di spessore 70 cm di ferro magnetizzato, B = 2.0 T. La direzione del muone è perpendicolare alla lastra; la direzione del campo è perpendicolare all'impulso. Per $p \approx 10\ GeV/c$, la perdita media di energia per unità di percorso di un muone in ferro è $\langle dE/dx \rangle = 14$ MeV/cm. Il cammino di radiazione in ferro è 1.8 cm.
   Calcolare l'impulso all'uscita della lastra, l'angolo di deflessione e la dispersione in angolo per diffusione multipla. Calcolare la risoluzione in impulso, $\delta p/p$, se il rivelatore ha una risoluzione angolare $\delta\theta = 1$ mrad.

2. Il mesone π^o è stato scoperto studiando la fotoproduzione su protoni a riposo

$$\gamma\ p \rightarrow \pi^o\ p$$

   Calcolare la minima energia del fotone nel laboratorio per produrre la reazione. Calcolare in queste condizioni la velocità del centro di massa nel laboratorio e l'energia del fotone nel centro di massa.

   [$m_{\pi^o} = 0.135$, $m_p = 0.938\ GeV/c^2$]

3. Un fascio di elettroni di intensità $10^8\ s^{-1}$ e impulso 100 MeV/c viene inviato su un bersaglio di Berillio (Z = 4, A = 9) di densità $1.8\ g\ cm^{-3}$ e spessore 0.5 cm. Si osserva la diffusione elastica con angolo polare $\theta = 90^o$ con un rivelatore

di accettanza $\Delta\phi = 2\pi$, $\Delta\theta = 100\ mrad$. Se assumiamo una distribuzione di carica gaussiana, il fattore di forma elettrico si può parametrizzare

$$F(q^2) = e^{-q^2\ \langle r^2\rangle/6}$$

Il raggio medio della distribuzione di carica del nucleo è $\langle r^2\rangle^{1/2} = 2.8\ fm$. Calcolare il valore del 4-impulso trasferito, la sezione d'urto differenziale e il numero di elettroni registrati al secondo dal rivelatore.

[$r_e = 2.82\ 10^{-13}\ cm$, $m_e = 0.5\ MeV/c^2$, $m_{Be} = 8.4\ GeV/c^2$]

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 17 maggio 1999

1. Alcuni nuclei instabili sono formati in catene radioattive, ad esempio

$$^{234}_{92}U\ \rightarrow\ ^{230}_{90}Th\ \rightarrow\ ^{226}_{88}Ra\ \rightarrow \ldots$$

Le vite medie per decadimento α sono $\tau\,(^{234}_{92}U) = 3.5\ 10^5$, $\tau\,(^{230}_{90}Th) = 1.0\ 10^5\ anni$. Nell'ipotesi che inizialmente siano presenti solo nuclei $^{234}_{92}U$, verificare che per $t \rightarrow \infty$ le attività α sono in equilibrio e calcolare il valore asintotico del rapporto delle attività $A\,(^{234}_{92}U)\,/A\,(^{230}_{90}Th)$. Calcolare dopo quanto tempo è massima l'attività del $^{230}_{90}Th$ e il numero di nuclei $^{226}_{88}Ra$ prodotti nell'unità di tempo a partire da 1 $m$grammo di $^{234}_{92}U$.

2. Indicare, sulla base del modello a strati a particelle indipendenti, gli stati degli isotopi del carbonio $^{11}_{6}C$, $^{12}_{6}C$, $^{13}_{6}C$, $^{14}_{6}C$. Calcolare lo spin, la parità, il momento di dipolo magnetico e di quadrupolo elettrico dei nuclei.

[$\mu_p = +2.79, \quad \mu_n = -1.91 \quad \mu_N$]

3. La reazione iniziale del ciclo di combustione del sole è la fusione $p\ p \rightarrow d\ e^+\ \nu$. L'energia di legame del deutone è 2.22 MeV. Alla temperatura media del sole il picco di Gamow corrisponde a $T = 0.5\ 10^8\ K$. Calcolare in queste condizioni lo stato di momento angolare e parità in cui avviene la fusione protone-protone. Indicare se la transizione è di tipo Fermi o Gamow-Teller. Calcolare il valore massimo dell'impulso del neutrino e la forma della distribuzione di impulso del neutrino, dn/dp_ν.

[$k = 8.6\ 10^{-11}\ MeV/K; \quad m_p = 938.27,\ m_n = 939.56,\ m_e = 0.51 \quad MeV/c^2$]

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 4 giugno 1999

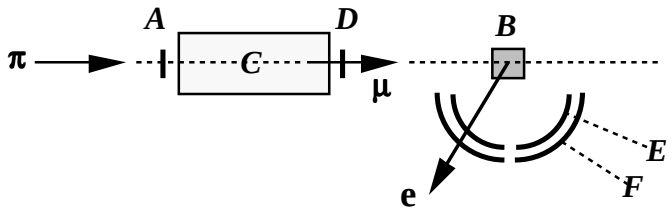
1. Il mesone ρ^o ha massa 770 MeV, larghezza 150 MeV e numeri quantici $I = 1$, $J^{PC} = 1^{--}$. Viene prodotto nell'annichilazione elettrone-positrone e le frazioni di decadimento in stati di due particelle sono

$\pi^+\pi^-$	$\pi^o\gamma$	$\eta^o\gamma$	e^+e^-	$\mu^+\mu^-$
1.00	$7\ 10^{-4}$	$2.4\ 10^{-4}$	$4.5\ 10^{-5}$	$4.5\ 10^{-5}$

Calcolare il valore della sezione d'urto di produzione $e^+e^- \to \rho^o$ al massimo della risonanza. Discutere che tipo di interazione si ha nei decadimenti. Non si osservano i decadimenti $\rho^o \to \pi^o\pi^o$, $\rho^o \to \eta^o\pi^o$; spiegare il motivo.

2. In un esperimento per dimostrare la violazione della parità nell'interazione debole si invia un fascio di mesoni π^+ di bassa energia su un assorbitore di carbonio C. I mesoni π^+ sono rivelati in A e si arrestano nell'assorbitore. I leptoni μ^+ emessi nel decadimento sono rivelati in D e si arrestano nel bersaglio B dove decadono. La coincidenza $E \times F$ segnala l'emissione di positroni con energia $E_e > 2E_e^{max}/3$. Calcolare l'energia massima E_e^{max} dei positroni, indicare in quale direzione vengono emessi con maggiore probabilità e spiegare perché. Indicare cosa cambia se si usa un fascio di mesoni π^-.

   [$m_\mu = 106$; $\quad m_e = 0.5 \quad MeV/c^2$]



3. I barioni Σ hanno vita media $\tau(\Sigma^+) = 0.80\ 10^{-10}\ s$, $\tau(\Sigma^-) = 1.48\ 10^{-10}\ s$ e decadono in modo semileptonico con frazioni di decadimento

$$\Sigma^+ \to n\ e^+\ \nu \quad \Sigma^+ \to \Lambda^o\ e^+\ \nu \quad \Sigma^- \to n\ e^-\ \bar{\nu} \quad \Sigma^- \to \Lambda^o\ e^-\ \bar{\nu}$$

$$\text{-} \qquad 2.0\ 10^{-5} \qquad 1.03\ 10^{-3} \qquad 0.57\ 10^{-4}$$

   Rappresentare i decadimenti con i grafici di Feynman nel modello a quark e spiegare perché non si osserva il decadimento $\Sigma^+ \to n\ e^+\ \nu$. Verificare la validità della legge di Sargent (valore dell'angolo di Cabibbo: $\theta_c = 0.22\ rad$).

   [$m_n = 0.940$; $m_{\Lambda^o} = 1.116$; $m_{\Sigma^+} = 1.189$; $m_{\Sigma^-} = 1.197\ GeV/c^2$]

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 3 aprile 2000

1. In un anello di collisione asimmetrico vengono fatti collidere fasci di elettroni e positroni di energia rispettivamente 9 e 3 GeV. Calcolare l'energia totale nel centro di massa e la velocità del centro di massa nel laboratorio. Nell'interazione viene prodotta una coppia particella-antiparticella, ciascuna di massa 5 GeV/c^2, a 90^o nel centro di massa. Calcolare l'impulso trasverso e longitudinale nel laboratorio.

2. La sezione d'urto di assorbimento di fotoni di energia $\approx 100\ keV$ in carbonio (A = 12) e in piombo (A = 207) è rispettivamente 2 b e 3 10^3 b (1 $b = 10^{-24}\ cm^2$). Calcolare la frazione di fotoni assorbita in uno spessore di 10 cm di materiale

organico a base di carbonio con densità 1 $g\ cm^{-3}$. Calcolare lo spessore di piombo (densità = 11.3 $g\ cm^{-3}$) per ridurre l'intensità della sorgente di un fattore 10^6.

3. Il nucleo di elio ha massa 3.7 GeV/c^2, spin zero e distribuzione di carica elettrica gaussiana con $\sigma = 1.1\ 10^{-13}\ cm$. Calcolare il raggio medio del nucleo di elio. Elettroni di impulso 0.1 GeV/c vengono inviati su un bersaglio di elio e si osserva la diffusione elastica ad angolo polare $\theta = 90^o$. Calcolare il valore del 4-impulso trasferito e della sezione d'urto differenziale.

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 15 maggio 2000

1. Verificare con la formula delle masse di Bethe-Weizsäcker che il nucleo $^{64}_{29}Cu$ può decadere sia β^+ che β^-. Indicare le reazioni di decadimento e calcolare il valore massimo dell'energia cinetica del positrone e dell'elettrone. Quale decadimento avviene con probabilità maggiore ?

2. L'energia di legame dei nuclei ^4_2He e ^7_3Li è rispettivamente 28.3 e 39.3 MeV. Verificare se la reazione $p\ ^7_3Li \rightarrow\ ^4_2He\ ^4_2He$ è esotermica o endotermica. Indicare lo stato di spin-parità nel nucleo ^7_3Li. Calcolare l'energia necessaria perché la distanza tra protone e litio sia pari al raggio del nucleo ^7_3Li e i possibili valori del momento angolare orbitale nello stato iniziale e finale.

3. L'energia irraggiata al secondo dal Sole è $3.8\ 10^{26}$ W. Nell'ipotesi che questa sia prodotta nelle reazioni del ciclo protone-protone, calcolare il numero di protoni consumati al secondo e il flusso di neutrini sulla Terra.

   [Distanza Terra-Sole = $1.5\ 10^{11}$ m]

   [$m_p = 938.27 \quad m_n = 939.56 \quad MeV/c^2$]

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 5 giugno 2000

1. Il fascio primario di un protosincrotrone viene inviato su un bersaglio e a valle del bersaglio si seleziona un fascio di mesoni π^+ di impulso 200 GeV/c. Calcolare il valore minimo e massimo dell'impulso dei leptoni μ prodotti nel decadimento e indicare i rispettivi stati di polarizzazione. Cosa cambia se si seleziona un fascio di mesoni π^- ?

2. Spiegare per quali interazioni avvengono i seguenti decadimenti

   $$\rho^o \rightarrow \pi^+\ \pi^- \qquad \rho^o \rightarrow \mu^+\ \mu^- \qquad K^o \rightarrow \pi^+\ \pi^-$$

   Indicare spin, parità e momento angolare orbitale dello stato finale.

3. Le frazioni di decadimento semileptonico del barione Σ^- sono

   $$BR(\Sigma^- \rightarrow n\ e^-\ \bar{\nu}) = 1.02\ 10^{-3} \qquad BR(\Sigma^- \rightarrow \Lambda^o\ e^-\ \bar{\nu}) = 0.57\ 10^{-4}$$

Rappresentare i decadimenti nel modello a quark e determinare il valore dell' angolo di Cabibbo.

$[m_\mu = 105.6 \quad m_\pi = 139.6 \quad m_\Sigma = 1197.4 \quad m_\Lambda = 1115.7 \quad m_n = 939.6 \quad MeV/c^2]$

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 2 aprile 2001

1. Nell'interazione di protoni in un bersaglio sottile vengono prodotte particelle che hanno massa 1.1 GeV/c^2 e vita media 2.6 10^{-10} s con valor medio dell'impulso $\langle p \rangle = 10$ GeV/c.

   Calcolare il percorso medio delle particelle nel laboratorio e la frazione di decadimenti in un rivelatore che inizia 10 cm a valle del bersaglio ed è lungo 100 cm.

2. Una sorgente emette raggi X di energia 100 keV in modo isotropo con potenza 10^{-3} W. La sorgente è schermata e i raggi X attraversano un foro di raggio 0.2 cm posto a 10 cm dalla sorgente e investono una lastra di Silicio posta dopo il foro (Z = 14, A = 28, densità 2.3 $g\ cm^{-3}$, spessore 1 cm).

   Calcolare il flusso di raggi X incidente sul bersaglio.

   Un rivelatore di accettanza $\Delta\phi = 2\pi$, $\Delta\theta = 0.05$ rad rivela i raggi X diffusi per effetto Compton dagli elettroni del bersaglio ad angolo polare $\theta = 60°$.

   Calcolare l'energia media dei raggi X diffusi e il numero medio di conteggi al secondo registrati dal rivelatore.

3. Facendo collidere un fascio di protoni con un bersaglio di idrogeno si misura un valore della sezione d'urto di assorbimento pari a 1.21 volte il valore asintotico ($p \to \infty$) calcolato assumendo che il protone sia un disco completamente assorbente di raggio $R = 1$ fm.

   Calcolare il valore dell'impulso nel riferimento del centro di massa, l'impulso e la velocità del fascio di protoni nel laboratorio.

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 14 maggio 2001

1. Calcolare l'impulso e l'energia di Fermi dei nucleoni nel nucleo $^{16}_{8}O$ assumendo una distribuzione a simmetria sferica con raggio $R = 1.25$ fm $A^{1/3}$. L'energia di legame del nucleo è 128 MeV. Calcolare la profondità della buca di potenziale nel modello a gas di Fermi. (Si trascuri la differenza di massa tra protone e neutrone: $m_p = m_n = 939$ MeV/c^2).

2. Il nucleo $^{60}_{27}Co$, $I^P = 5^+$, decade β con vita media $\tau = 7.5$ $anni$ nello stato eccitato del nucleo $^{60}_{28}Ni^*$, $I^P = 4^+$. Questo a sua volta decade nel nucleo $^{60}_{27}Ni^*$, $I^P = 2^+$, emettendo raggi γ di energia $E_\gamma = 1.2$ MeV.

   Scrivere la reazione del decadimento β e indicare il tipo di transizione. Indicare il tipo di transizione radiativa e stimare la vita media del decadimento γ. Calcolare le attività β e γ di una sorgente di 1 μg di $^{60}_{27}Co$.

$1\ anno = \pi\ 10^7\ s$

3. Nella fusione deuterio-deuterio si formano i nuclei ${}^3_1H$ e ${}^3_2He$. Scrivere le reazioni. Calcolare l'energia prodotta in ciascuna reazione e il rapporto tra le sezioni d'urto.

   Le energie di legame sono $BE({}^2_1H) = 2.22\ MeV$; $BE({}^3_1H) = 8.48\ MeV$; $BE({}^3_2He) = 7.72\ MeV$.

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 7 giugno 2001

1. I decadimenti più probabili dei barioni Σ carichi hanno larghezze approssimativamente uguali

$$\Gamma(\Sigma^+ \to p\pi^o) \approx \Gamma(\Sigma^+ \to n\pi^+) \approx \Gamma(\Sigma^- \to n\pi^-) \approx 4.2\ 10^{-6}\ eV$$

   Spiegare il perché sulla base del modello a quark.

   Il barione Σ neutro decade $\Sigma^o \to \Lambda^o\gamma$. Calcolare l'energia del fotone emesso nel decadimento, indicare il tipo di transizione e valutare la larghezza di decadimento. Indicare se sono possibili i decadimenti del barione Σ^o in stati nucleone-mesone π e spiegare perché è difficile osservarli.

   $[m_N = 939 \quad m_\Sigma = 1193 \quad m_\Lambda = 1116\ MeV/c^2]$

2. Il mesone ρ ha spin 1, esiste in tre stati di carica elettrica e decade per interazione adronica in stati di due mesoni π.

   Indicare la decomposizione in autostati di isospin, se sono simmetrici o antisimmetrici, quali sono i modi di decadimento e gli autovalori di parità e coniugazione di carica del mesone ρ.

3. In un esperimento per misurare la sezione d'urto di interazione inelastica di neutrini su nucleone, $\nu_\mu\ N \to \mu^-\ X$, si richiede $E_\mu > 4\ GeV$, $E_X > 6\ GeV$ (E_X è l'energia cinetica dei frammenti del nucleone).

   Definire, per neutrini di energia 100 GeV, i limiti di accettanza nell'energia ceduta, ν, e calcolare il valore della sezione d'urto che si misura assumendo che le funzioni di struttura relative a quark e antiquark siano

$$F_q(x) = 8\ x\ (1-x)^3 \qquad F_{\bar{q}}(x) = 0.8\ (1-x)^7$$

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 8 aprile 2002

1. Due osservatori partono dallo stesso punto nello stesso istante e viaggiano di moto rettilineo uniforme in direzioni diverse. Dopo 15 miliardi di anni (stima dell'età dell'Universo) quale è il valore del rapporto tra la velocità relativa dei due osservatori e la loro distanza (costante di Hubble) ? Se i due osservatori sono a distanza $10^{25}\ m$ e il primo invia un segnale luminoso di frequenza ν quale è la frequenza misurata dal secondo ?

2. Un rivelatore di raggi X è costituito da una giunzione di semiconduttore (Silicio, A = 28, densità = 2.2 $g\ cm^{-3}$) di spessore 0.05 cm. Per raggi X di 10 keV la sezione d'urto di assorbimento per effetto fotoelettrico in silicio è 6 $10^{-22}\ cm^2/atomo$. Gli elettroni prodotti sono assorbiti nel materiale e l'energia per produrre una coppia elettrone-ione in silicio è 4 eV. Calcolare la probabilità di assorbimento di raggi X di 10 keV nel rivelatore, il numero di elettroni prodotti per ionizzazione e la quantità di carica corrispondente.

3. Un fascio di protoni viene accelerato da una macchina elettrostatica con una differenza di potenziale $\Delta V = 20\ MV$ e inviato su un bersaglio di Carbonio (nuclei di spin zero - si assuma $m_C \gg m_p$). Osservando la diffusione elastica ad angolo polare $\theta = 0.2\ rad$ si misura una sezione d'urto pari al 90% di quella calcolata per nuclei puntiformi. Calcolare il valore dell'impulso trasferito e il raggio medio del nucleo nell'ipotesi che la distribuzione di carica sia gaussiana e a simmetria sferica.

   $c = 3.0\ 10^8\ m\ s^{-1}$ $\quad 1\ anno = \pi\ 10^7\ s$ $\quad \hbar = 0.66\ 10^{-21}\ MeV\ s$ $\quad m_p = 938\ MeV/c^2$

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 13 maggio 2002

1. L'idrogeno naturale è una miscela di due isotopi stabili, idrogeno e deuterio. Il nucleo di deuterio ha energia di legame 2.23 MeV. La massa atomica dell'idrogeno naturale è 940.19 MeV. Calcolare l'abbondanza relativa dei due isotopi nell'idrogeno naturale.

2. Nella reazione $n\ {}^{14}_{7}N \rightarrow {}^{14}_{6}C\ p$ vengono prodotti 0.63 MeV. Il nucleo ${}^{14}_{6}C$ decade β^-. Scrivere la reazione di decadimento e calcolare la massima energia cinetica dell'elettrone. Indicare lo stato di spin-parità dei nuclei e il tipo di transizione che si ha nel decadimento.

3. Una soluzione contenente 0.01 g di ${}^{11}_{5}B$ viene esposta per alcune ore ad un fascio di protoni di flusso costante $\Phi = 10^8\ cm^{-2}s^{-1}$. La sezione d'urto di produzione dell'isotopo ${}^{11}_{6}C$ è $\sigma = 2\ 10^{-25}\ cm^2$. Questo decade β^+ con vita media $\tau = 28\ minuti$. Alla fine dell'attivazione la soluzione viene iniettata nell'organo di un paziente che, dopo 14 minuti, viene sottoposto a tomografia al positronio. La tomografia dura 14 minuti.

   Indicare le reazioni di attivazione e decadimento. Calcolare il numero di nuclei ${}^{11}_{6}C$ formati alla fine dell'attivazione e il numero di reazioni $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ durante la tomografia.

   $m_p = 938.27$ $\quad m_n = 939.56$ $\quad m_e = 0.51$ $\quad MeV/c^2$

Prova di esonero dalla prova scritta di esame - 14 giugno 2002

1. Indicare le reazioni di mesoni π^+ su bersaglio di idrogeno in cui si producono mesoni K^o oppure $\bar{K^o}$ ($\pi^+p \rightarrow K^o \ldots$; $\pi^+p \rightarrow \bar{K^o} \ldots$) e gli stati finali hanno

il minimo valore della massa. Calcolare la minima energia cinetica dei mesoni π^+ per produrre le reazioni.

Masse in GeV/c^2:

π^o	$\pi^\pm$	$K^\pm$	K^o	p	n	Λ^o	Σ^+	Σ^o	Σ^-
0.135	0.140	0.494	0.497	0.938	0.939	1.116	1.189	1.193	1.197

2. In un anello di collisione elettrone-positrone si producono mesoni ϕ e si osservano i decadimenti $\phi \to \eta\gamma$. L'energia dei fasci è $m_\phi/2$, la luminosità è $3 \cdot 10^{31}\ cm^{-2}s^{-1}$. Calcolare il numero di decadimenti $\phi \to \eta\gamma$ prodotti al secondo. Indicare il tipo di transizione che si ha nel decadimento $\phi \to \eta\gamma$ e calcolare l'energia del fotone emesso.

   Numeri quantici $\phi : J^P = 1^-$, $\eta : J^P = 0^-$

   Masse: $m_\phi = 1.02, m_\eta = 0.55\ GeV/c^2$

   Frazioni di decadimento: $BR(\phi \to e^+e^-) = 2.9\ 10^{-4}, BR(\phi \to \eta\gamma) = 1.3\ 10^{-2}$

3. Studiando la produzione di coppie $\mu^+\mu^-$ in collisioni di mesoni π^+ e π^- su bersaglio di idrogeno si misura

$$\frac{\sigma(\pi^+ p \to \mu^+\mu^- X)}{\sigma(\pi^- p \to \mu^+\mu^- X)} = \frac{1}{8}$$

   al limite in cui si può trascurare il contributo di anti-quark nel protone. Interpretare questo risultato sulla base del modello a quark. Che rapporto si ottiene con un bersaglio di deuterio ?

4.26 Risposte

27 aprile 1995

1. campo magnetico: $B = 1\ T$; periodo di rivoluzione: $T = 2.1\ 10^{-5}\ s$; coefficiente di assorbimento: $\mu = 1.6\ 10^{-16}\ cm^{-1}$; vita media del fascio: $\tau = 58\ ore$

2. impulso massimo: $p_p^{max} = 95\ MeV/c$; energia cinetica: $K_p^{max} = 5\ MeV$; velocità: $v_p^{max} = 3\ 10^9\ cms^{-1}$

3. velocità: $\beta_\pi = 0.96$, $\beta_K = 0.71$; tempo do volo $T_\pi = 1.04\ 10^{-8}\ s$, $T_K = 1.41\ 10^{-8}\ s$; risoluzione temporale: $\sigma_t = 0.66\ 10^{-9}\ s$; perdita di energia: $\Delta E_\pi \simeq \Delta E_K = 4\ MeV$; angolo di diffusione coulombiana multipla: $\theta_\pi = 6.5\ mrad$; $\theta_K = 8.6\ mrad$

16 maggio 1995

1. Energia di legame: $BE_{Mg} = 227.2$, $BE_{Al} = 228.2$, $BE_{Si} = 221.8\ MeV$
   il nucleo ${}^{27}_{13}Al$ è il più stabile; il nucleo ${}^{27}_{12}Mg$ ha repulsione coulombiana minore ma la differenza neutroni-protoni è maggiore; il nucleo ${}^{27}_{14}Si$ è il meno stabile perché la repulsione coulombiana è maggiore

2. ${}^{6}_{3}Li$: un protone e un neutrone nello stato $1p_{3/2}$; il momento magnetico è $\approx \mu_p + \mu_n = 0.88\ \mu_N$: $I = 1$, $L = 0$, $P = +1$;
   ${}^{6}_{2}He$: due neutroni nello stato $1p_{3/2}$, spin $S = 0$, isospin $T = 1$, $L = pari$: $L = 0$, $I^P = 0^+$
   $m_{He} - m_{Li} = 4.9\ MeV$, decadimento β ${}^{6}_{2}He \rightarrow {}^{6}_{3}Li\, e^- \bar{\nu}$ possibile; transizione Gamow-Teller.

3. Energia: $E = 1.0\ MeV$; temperatura: $T = 1.2\ 10^{10}\ K$
   reazione: ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{1}H + {}^{1}_{1}H$; $Q = 4.02\ MeV$

19 giugno 1995

1. impulso trasverso $p_T = 0.56\ GeV$; impulso longitudinale $p_L = 1.1\ GeV$; angolo di produzione: $\theta = 0.47\ rad = 27°$; cammino medio di decadimento: $\lambda = 8.7\ cm$

2. se la simmetria CP fosse esatta i decadimenti $K^0_L \rightarrow \pi\pi$ sarebbero vietati; nei decadimenti deboli con $\Delta S = 1$ vale la regola di selezione $\Delta I = 1/2$; lo stato $\pi\pi$ è $|I = 0, I_3 = 0\rangle$ e $|\langle\pi^0\pi^0 \mid 0,0\rangle|^2/|\langle\pi^+\pi^- \mid 0,0\rangle|^2 = 1/2$

3. l'accoppiamento del campo debole con i leptoni è universale e le masse sono $m_e \ll m_\tau$, $m_\mu \ll m_\tau$; $\tau_\tau = 3.0\ 10^{-13}\ s$

11 aprile 1996

1. impulso: $p = 0.21\ GeV/c$; velocità: $\beta = 0.83$; $\beta_{rel} = 0.98$

2. flusso di energia: $\Phi_E = 5.0\ 10^{11}\ eV cm^{-2} s^{-1}$; flusso di raggi X: $\Phi_X = 5.0\ 10^7\ cm^{-2} s^{-1}$; frequenza di conteggio: $\dot{n}_X = 1.6\ MHz$

3. raggio di curvatura: $R = 33\ m$; angolo di deflessione: $\Delta\theta_{xy} = 0.03\ rad$
   angolo rms di diffusione coulombiana: $\theta_{rms} = 4.4\ 10^{-4}\ rad$; perdita di energia: $\Delta E = 2.0\ MeV$

16 maggio 1996

1. Decadimento: ${}^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{22}_{86}Rn + {}^{4}_{2}He$; numero di nuclei in un grammo: $N = 2.7\ 10^{21}$; attività di un grammo di Ra: $A = 3.7\ 10^{10}\ s^{-1}$

2. l'impulso dell'elettrone massimo quando $\vec{p}_\nu = 0$; $BE_H - BE_{He} = 0.76\ MeV$; $d = 1.9\ fm$

3. larghezza di riga: $\Gamma = 0.022\ eV$; differenza di energia: $\Delta E = 0.97\ MeV$; $E_\gamma^{ass} - E_\gamma^{em} = 6.6\ eV \ll \Gamma$; nell'esperimento si osserva l'assorbimento di risonanza quando il nucleo Sm^* è emesso nella direzione del diffusore e l'energia del fotone è aumentata per effetto Doppler

12 giugno 1996

1. le reazioni sono $\pi^- p \to \Sigma^- K^+$, $\pi^- p \to \Sigma^0 K^0$; gli stati di isospin sono

$$\begin{aligned} \Sigma^- K^+ &= \sqrt{1/3}\ |3/2, -1/2\rangle - \sqrt{2/3}\ |1/2, -1/2\rangle \\ \Sigma^0 K^0 &= \sqrt{2/3}\ |3/2, -1/2\rangle + \sqrt{1/3}\ |1/2, -1/2\rangle \end{aligned}$$

   energia cinetica: $K_\pi \geq 0.90\ GeV$

2. impulso dei mesoni K: $p = 0.125\ GeV/c$; numero di eventi al secondo: $\dot{n} = 53\ s^{-1}$

3. barione Σ^+: stato di isospin $|I, I_3\rangle = |1, +1\rangle$; possibili stati pione-nucleone

$$\begin{aligned} \pi^+ n &= \sqrt{1/3}\ |3/2, +1/2\rangle + \sqrt{2/3}\ |1/2, +1/2\rangle \\ \pi^0 p &= \sqrt{2/3}\ |3/2, +1/2\rangle - \sqrt{1/3}\ |1/2, +1/2\rangle \end{aligned}$$

   $|\langle \pi^+ n | H | \Sigma^+ \rangle|^2 = |\langle \pi^0 p | H | \Sigma^+ \rangle|^2 = 1$; energia nello stato finale: $\Delta m(\Sigma^+ \to \pi^0 p) > \Delta m(\Sigma^+ \to \pi^+ n)$
   decadimento: $\Sigma^- \to \pi^- n$; $\tau_{\Sigma^-} = 1.5\ 10^{-10}\ s$

3 aprile 1997

1. impulso: $p = 2.1\ GeV/c$; periodo di rivoluzione: $T = 2.9\ 10^{-7}\ s$; probabilità di decadimento in un periodo $= 6.7\ 10^{-3}$

2. perdita di energia per ionizzazione: $\Delta E = 1.7\ MeV$; energia cinetica: $K' = 5.7\ MeV$; angolo di diffusione coulombiana: $\theta_{rms} = 60\ mrad$

3. $E'_{min} = 0.17\ MeV$; $E'_{max} = 0.51\ MeV$; coefficiente di assorbimento: $\mu = 0.066\ cm^{-1}$; probabilità per i due fotoni $= 0.27$

15 maggio 1997

1. $|F(q)|^2$ ha i valori di massimo per $qR \simeq n\pi$; $\sin\theta/2 = n \times 0.18$;
   $d\sigma_1/d\Omega = 1.1\ 10^{-27}\ cm^2 \quad d\sigma_2/d\Omega = 3.7\ 10^{-30}\ cm^2$

2.

	K_α	p_α	ℓ
$^{230}Th \to^{226} Ra$	4.69	187	0
$^{229}Th \to^{225} Ra$	< 5.08	< 195	2, 4
$^{228}Th \to^{224} Ra$	5.42	201	0

nel caso di emissione α in stato di momento angolare $\ell \neq 0$ la differenza di massa si divide in energia cinetica di traslazione e di rotazione e il fattore di Gamow è più grande (la probabilità di decadimento è più piccola)

3. Decadimento β: elettrone e antineutrino sono emessi con spin paralleli, transizione Gamow-Teller; $K_e^{max} = 0.32\ MeV$;
transizioni radiative di quadrupolo elettrico; vita media: $\tau = 3.2\ 10^{-12}\ s$

6 giugno 1997

1. impulso: $p = 28\ MeV/c$; $E_\gamma^{min} = 55\ MeV$; $E_\gamma^{max} = 83\ MeV$; con distribuzione $dn/dE_\gamma = costante$; angolo tra i fotoni nel laboratorio: $\theta_{min} = 2.73 = 156°$; $\theta_{max} = \pi = 180°$

2. larghezza di decadimento parziale: $\Gamma_k = 1.2\ keV\ BR_k$
$\eta^0 \to \gamma\gamma\gamma$ non conserva C; $\eta^0 \to \pi^0\pi^0$ non conserva P; $\eta^0 \to \pi^0\gamma$ non conserva il momento angolare e non conserva C

3. $\pi^- = (\bar{u}d \to \bar{u}uW^-) + (\bar{u}d \to \bar{d}dW^-) = \pi^0 e^- \bar{\nu}_e$; $n = udd \to uduW^- = pe^-\bar{\nu}_e$
$BR(\pi^- \to \pi^0 e^- \bar{\nu}_e) = 1.6\ 10^{-8}$

4 aprile 1998

1. gradiente di energia: $\Delta E/\Delta\ell = 20/3\ MeV\ m^{-1}$; lunghezza dell'acceleratore: $L = 3\ km$; distanza percorsa dall'elettrone $= 0.57\ m$

2. coefficiente di assorbimento: $\mu = 1.5\ 10^{-4}\ m^{-1}$; probabilità $= 3\ 10^{-7}$; perdita di energia in una lunghezza di attenuazione: $\Delta E = 220\ MeV$

3. 4-impulso trasferito: $q^2 = 0.65\ GeV^2$; fattore di forma: $G_E = 0.27$; $G_M = 0.76$; sezione d'urto: $\sigma = 1.0\ 10^{-33}\ cm^2$

12 maggio 1998

1. energia di legame: $BE_{Si} = 219.36\ MeV$; per una coppia di nuclei isobari speculari l'unico termine diverso è quello relativo all'energia elettrostatica $\int_0^R V(r)\ \rho(r)\ d\vec{r}$; raggio dei nuclei: $R = 4.2\ fm$

2. reazione: ${}^4_2He + {}^9_4Be \to {}^{12}_6C + n$; energia cinetica minima: $K = 2.5\ MeV$

	${}^4_2He$	${}^9_4Be$	${}^{12}_6C$	n
I^P	0^+	$3/2^-$	0^+	$1/2^+$

momento angolare orbitale: $L_f = 1$

3. massa atomica: 12.011 **u**; attività misurata oggi $A_r = 0.25\ Hz\ g^{-1}$; età del fossile: $T = 7610 \pm 140\ anni$

12 giugno 1998

1. decadimento $\Lambda^0 \to \pi^0 n$, $\Lambda^0 \to \pi^- p$; transizioni $uds \to udd\,\bar{u}u$, $uds \to udu\,\bar{u}d$; quadrati degli elementi di matrice in rapporto $|\langle \pi^0 n|1/2, -1/2\rangle|^2/|\langle \pi^- p|1/2, -1/2\rangle|^2 = 1:2$; fattori di spazio delle fasi in rapporto $p_{\pi^0 n} : p_{\pi^- p} = 105 : 101$

2. reazione: $K^- p \to \Omega^- K^0 K^+$; energia cinetica: $K_K \geq 2.7\ GeV$; Ω^- è lo stato barionico di energia più bassa con stranezza $S = -3$, può decadere solo per interazione debole

3. sezione d'urto di annichilazione: $\sigma(e^+e^- \to adroni)_{3\ GeV} = 19\ 10^{-33}\ cm^2$
$\sigma(e^+e^- \to \psi \to adroni) = 8.0\ 10^{-29}\ cm^2$

12 aprile 1999

1. energia finale: $E_f = 9\ GeV$; angolo di deflessione: $\theta = 44\ mrad$; dispersione angolare: $\delta\theta_{ms} = 9.2\ mrad$; risoluzione nella misura dell'impulso $\delta p/p = 0.21$

2. energia di soglia: $E = 0.145\ GeV$; velocità del centro di massa: $\beta = 0.133$; energia del fotone nel centro di massa: $E^* = 0.127\ GeV$

3. 4-impulso trasferito: $Q = 0.14\ GeV$; sezione d'urto differenziale: $d\sigma/d\Omega = 4.3\ 10^{-30}\ cm^2$; numero di eventi al secondo: $\dot{n} = 16\ s^{-1}$

17 maggio 1999

1. attività del $^{230}_{90}Th$ massima per $t_{max} = 1.75\ 10^5\ anni$
attività a t_{max} di 1 $m$grammo: $1.4\ 10^5\ s^{-1}$

2.

	^{11}C	^{12}C	^{13}C	^{14}C
I^P	$3/2^-$	0^+	$1/2^-$	0^+
μ	-1.91	0	$+0.64$	0
$\mathcal{Q}$	0	0	0	0

3. reazione $pp \to de^+\nu$ avviene con $\ell = 0$, $S = 0$, $J^P = 0^+$: transizione nucleare $0^+ \to 1^+$ (Gamow-Teller); energia totale: $W = 0.94\ MeV$; impulso massimo del neutrino: $p_\nu^{max} = 0.43\ MeV$

$$\frac{dn}{dp_\nu} = costante\ \times\ [(W - p_\nu)^2 - m_e^2]^{1/2}\ (W - p_\nu)\ p_\nu^2$$

4 giugno 1999

1. sezione d'urto: $\sigma_{max} = 10^{-30}\ cm^2$; decadimento $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$: interazione adronica; decadimenti $\rho^0 \to \pi^0\gamma$, $\to \eta^0\gamma$, $\to e^+e^-$, $\to \mu^+\mu^-$: interazione elettromagnetica
decadimento $\rho^0 \to \pi^0\pi^0$ non conserva il momento angolare; decadimento $\rho^0 \to \eta^0\pi^0$ non conserva la coniugazione di carica

2. decadimento $\mu \to \nu_\mu e\bar{\nu}_e$: $p_e^{max} = 53\ MeV/c$
decadimento $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$: μ^+ ha spin opposto alla direzione di volo; decadimento $\mu^+ \to \bar{\nu}_\mu e^+\nu_e$: l'elettrone ha spin $s_e = s_\mu$ e tende ad essere emesso in direzione opposta alla direzione di volo del μ^+
decadimento $\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$: μ^- ha spin lungo la direzione di volo; decadimento $\mu^- \to \nu_\mu e^-\bar{\nu}_e$: l'elettrone ha spin $s_e = s_\mu$ e tende ad essere emesso in direzione opposta alla direzione di volo del μ^-

3. $\Sigma^+ \to \Lambda^0 e^+\nu$: transizione $suu \to sudW^-$; $\Sigma^- \to \Lambda^0 e^-\bar{\nu}$: transizione $sdd \to sduW^-$
$\Sigma^- \to ne^-\bar{\nu}$: transizione $dds \to dduW^-$; $\Sigma^+ \to ne^+\nu$: transizione $\Delta S \neq \Delta Q$

$$\Gamma(\Sigma \to Xe\bar{\nu}) = \frac{\hbar\ BR(\Sigma \to Xe\bar{\nu})}{\tau_\Sigma} = \frac{G^2}{60\pi^3} \begin{bmatrix} \cos^2\theta_c \\ \\ \sin^2\theta_c \end{bmatrix} (m_\Sigma - m_X)^5$$

3 aprile 2000

1. energia totale: $\sqrt{s} = 10.4\ GeV$; $\beta = 0.5$; impulso trasverso: $p_T = \sqrt{2}\ GeV$; impulso longitudinale: $p_L = 3\ GeV$

2. frazione di fotoni assorbiti = 0.63; spessore di piombo = 0.14 cm

3. raggio quadratico medio: $\langle r^2 \rangle = 1.9\ fm$; 4-impulso trasferito: $Q = 0.14\ GeV$; sezione d'urto: $d\sigma/d\Omega = 2.2\ 10^{-30}\ cm^2$

15 maggio 2000

1. decadimento β^+: ${}^{64}_{29}Cu \to {}^{64}_{28}Ni\ e^+\ \nu$; decadimento β^-: ${}^{64}_{29}Cu \to {}^{64}_{30}Zn\ e^-\ \bar{\nu}$
β^+: $K_e^{max} = 0.93\ MeV$; β^-: $K_e^{max} = 0.67\ MeV$; il decadimento β^+ è più probabile

2. reazione $p + {}^7_3Li \to {}^4_2He + {}^4_2He$: $Q = 17.3\ MeV > 0$; $E \geq 1.8\ MeV$; momento angolare orbitale: $\ell_i = dispari$ e $\ell_f = pari$

3. numero di protoni consumati: $3.7\ 10^{38}\ s^{-1}$
flusso di neutrini sulla Terra: $\Phi_\nu = 6.5\ 10^{14}\ m^{-2}s^{-1}$

5 giugno 2000

1. $p_L^{min} = 0.57\ p_\pi = 114\ GeV$; $p_L^{max} = p_\pi = 200\ GeV$
   decadimento $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$: per p_L^{max} polarizzazione negativa, per p_L^{min} positiva
   decadimento $\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$: per p_L^{max} polarizzazione positiva, per p_L^{min} negativa

2. decadimento $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$ interazione adronica; $S_{\pi\pi} = 0$, $L_{\pi\pi} = 1$, $J = 1$, $P_{\pi\pi} = -1$
   decadimento $\rho^0 \to \mu^+\mu^-$ interazione elettromagnetica; $S_{\mu\mu} = 1$, $L_{\mu\mu} = 0$, $J = 1$, $P_{\mu\mu} = -1$
   decadimento $K^0 \to \pi^+\pi^-$ interazione debole; $S_{\pi\pi} = 0$, $L_{\pi\pi} = 0$, $J = 0$, $P_{\pi\pi} = +1$

3. $\Sigma^- = dds \to dduW^- \to ddu\ e^-\bar{\nu}_e = ne^-\bar{\nu}_e$
   $\Sigma^- = dds \to uW^-ds \to uds\ e^-\bar{\nu}_e = \Lambda^0 e^-\bar{\nu}_e$ $\qquad \tan\theta_c = 0.24$

2 aprile 2001

1. percorso medio di decadimento: $\lambda = 71\ cm$; frazione di decadimenti nel rivelatore = 0.66

2. flusso di raggi X: $\Phi_X = 0.5\ 10^8\ cm^{-2}s^{-1}$; energia dei fotoni: $E' = 91\ keV$; numero di fotoni diffusi al secondo: $\dot{n} = 4.9\ 10^4\ s^{-1}$

3. impulso nel centro di massa: $p^* = 2.0\ GeV/c$; energia del fascio: $E = 9.45\ GeV$; velocità: $\beta = 0.995$; impulso: $p = 9.4\ GeV/c$

14 maggio 2001

1. impulso di Fermi: $p_F = 240\ MeV/c$; energia di Fermi: $K_F = 30\ MeV$; profondità della buca di potenziale: $U = 38\ MeV$

2. decadimento β: ${}^{60}_{27}Co \to {}^{60}_{28}Ni^*\ e^-\ \bar{\nu}$; transizione Gamow-Teller
   decadimento radiativo ${}^{60}_{28}Ni^* \to {}^{60}_{28}Ni\ \gamma$; transizione di quadrupolo elettrico
   vita media γ: $\tau_\gamma = 5.3\ 10^{-12}\ s$; vita media β: $\tau_\beta = 2.4\ 10^8\ s$
   attività della sorgente: $A_\beta = 4.2\ 10^7\ s^{-1}$; $A_\gamma = A_\beta$

3. a) ${}^2_1H + {}^2_1H \to {}^3_1H + p$; $Q_a = 4.04\ MeV$; b) ${}^2_1H + {}^2_1H \to {}^3_2He + n$; $Q_b = 3.28\ MeV$
   $\sigma_a/\sigma_b = (Q_a/Q_b)^{1/2} = 1.1$

7 giugno 2001

1. decadimento $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$: transizione di dipolo magnetico; $E_\gamma = 74\ MeV$; larghezza di decadimento: $\Gamma(\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma) = 2.4\ 10^4\ eV$
   decadimento $\Sigma^0 \to \pi N$ ha larghezza $\Gamma(\Sigma^0 \to \pi N) \simeq \Gamma(\Sigma^\pm \to \pi N) \ll \Gamma(\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma)$

2. tre stati di isospin ρ^+, ρ^0, ρ^-, antisimmetrici: $\rho^a = \left[(\pi^c\pi^b - \pi^b\pi^c)/\sqrt{2}\right]$
decadimenti adronici: $\rho^+ \to \pi^+\pi^0$, $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$, $\rho^- \to \pi^0\pi^-$
parità: $P_\rho = -1$; coniugazione di carica: $C\rho^+ = -\rho^-$, $C\rho^- = -\rho^+$, $C\rho^0 = -\rho^0$

3. $\nu = E_\nu - E_\mu$; $\nu_{min} = 6\ GeV$; $\nu_{max} = 96\ GeV$; $\sigma = 0.7\ 10^{-36}\ cm^2$

8 aprile 2002

1. H = velocità relativa/distanza = $2.1\ 10^{-18}\ s^{-1}$; $\nu' = 0.93\ \nu$

2. probabilità di assorbimento = 0.75; numero di elettroni: $N = 2500$; carica elettrica: $Q = 4.0\ 10^{-16}\ C$

3. impulso trasferito: $\Delta p = 39\ MeV/c$; raggio quadratico medio: $\sqrt{\langle r^2\rangle} = 2.8\ fm$

13 maggio 2002

1. abbondanza(^1_1H) = 0.9985; abbondanza(^2_1H) = 0.0015

2. decadimento: $^{14}_6C \to\ ^{14}_7N\ e^-\ \bar{\nu}$; energia cinetica: $K_e^{max} = 0.15\ MeV$
$^{14}_6C \equiv 0^+$, $^{14}_7N \equiv 1^+$, transizione Gamow-Teller.

3. reazione di attivazione: $p + {}^{11}_5B\ \to\ ^{11}_6C + n$; decadimento: $^{11}_6C\ \to\ ^{11}_5B\, e^+\, \nu$; numero di nuclei prodotti: $n_C = 1.8\ 10^7$; numero di reazioni $e^+e^- \to \gamma\gamma = 4.4\ 10^6$

14 giugno 2002

1. reazioni: $\pi^+p \to K^0\pi^+\Sigma^+$; $\pi^+p \to \bar{K}^0K^+p$
energia di soglia: $1.16\ GeV$; $1.37\ GeV$

2. decadimenti al secondo: $\dot{n} = 1.6\ s^{-1}$; energia del fotone $E_\gamma = 0.36\ GeV$; transizione di dipolo magnetico

3. bersaglio di idrogeno: $\sigma(\pi^+p)/\sigma(\pi^-p) \propto \sigma(\bar{d}u\ uud)/\sigma(\bar{u}d\ uud) \propto e_d^2/2e_u^2 = 1/8$
bersaglio di deuterio: $\sigma(\pi^+d)/\sigma(\pi^-d) = 1/4$

4.27 Tavole

1. PHYSICAL CONSTANTS

Table 1.1. Reviewed 2002 by P.J. Mohr and B.N. Taylor (NIST). Based mainly on the "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 1998" by P.J. Mohr and B.N. Taylor, J. Phys. Chem. Ref. Data **28**, 1713 (1999) and Rev. Mod. Phys. **72**, 351 (2000). The last group of constants (beginning with the Fermi coupling constant) comes from the Particle Data Group. The figures in parentheses after the values give the 1-standard-deviation uncertainties in the last digits; the corresponding fractional uncertainties in parts per 10^9 (ppb) are given in the last column. This set of constants (aside from the last group) is recommended for international use by CODATA (the Committee on Data for Science and Technology). The full 1998 CODATA set of constants may be found at `http://physics.nist.gov/constants`

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum	c	299 792 458 m s^{-1}	exact*
Planck constant	h	$6.626\ 068\ 76(52)\times10^{-34}$ J s	78
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv h/2\pi$	$1.054\ 571\ 596(82)\times10^{-34}$ J s	78
		$= 6.582\ 118\ 89(26)\times10^{-22}$ MeV s	39
electron charge magnitude	e	$1.602\ 176\ 462(63)\times10^{-19}$ C $= 4.803\ 204\ 20(19)\times10^{-10}$ esu	39, 39
conversion constant	$\hbar c$	197.326 960 2(77) MeV fm	39
conversion constant	$(\hbar c)^2$	0.389 379 292(30) GeV^2 mbarn	78
electron mass	m_e	0.510 998 902(21) MeV/c^2 $= 9.109\ 381\ 88(72)\times10^{-31}$ kg	40, 79
proton mass	m_p	938.271 998(38) MeV/c^2 $= 1.672\ 621\ 58(13)\times10^{-27}$ kg	40, 79
		$= 1.007\ 276\ 466\ 88(13)$ u $= 1836.152\ 667\ 5(39)\ m_e$	0.13, 2.1
deuteron mass	m_d	1875.612 762(75) MeV/c^2	40
unified atomic mass unit (u)	(mass ^{12}C atom)/12 = (1 g)/(N_A mol)	931.494 013(37) MeV/c^2 $= 1.660\ 538\ 73(13)\times10^{-27}$ kg	40, 79
permittivity of free space	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854\ 187\ 817\ldots\times10^{-12}$ F m^{-1}	exact
permeability of free space	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$ N A^{-2} $= 12.566\ 370\ 614\ldots\times10^{-7}$ N A^{-2}	exact
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	$7.297\ 352\ 533(27)\times10^{-3} = 1/137.035\ 999\ 76(50)$†	3.7, 3.7
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	$2.817\ 940\ 285(31)\times10^{-15}$ m	11
(e^- Compton wavelength)/2π	$\lambda\!\!\!^{-}_e = \hbar/m_e c = r_e\alpha^{-1}$	$3.861\ 592\ 642(28)\times10^{-13}$ m	7.3
Bohr radius ($m_{\rm nucleus} = \infty$)	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = r_e\alpha^{-2}$	$0.529\ 177\ 208\ 3(19)\times10^{-10}$ m	3.7
wavelength of 1 eV/c particle	$hc/(1\text{ eV})$	$1.239\ 841\ 857(49)\times10^{-6}$ m	39
Rydberg energy	$hcR_\infty = m_e e^4/2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 = m_e c^2\alpha^2/2$	13.605 691 72(53) eV	39
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	0.665 245 854(15) barn	22
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$5.788\ 381\ 749(43)\times10^{-11}$ MeV T^{-1}	7.3
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$3.152\ 451\ 238(24)\times10^{-14}$ MeV T^{-1}	7.6
electron cyclotron freq./field	$\omega^e_{\rm cycl}/B = e/m_e$	$1.758\ 820\ 174(71)\times10^{11}$ rad s^{-1} T^{-1}	40
proton cyclotron freq./field	$\omega^p_{\rm cycl}/B = e/m_p$	$9.578\ 834\ 08(38)\times10^{7}$ rad s^{-1} T^{-1}	40
gravitational constant‡	G_N	$6.673(10)\times10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	1.5×10^6
		$= 6.707(10)\times10^{-39}\ \hbar c\ (\text{GeV}/c^2)^{-2}$	1.5×10^6
standard gravitational accel.	g_n	9.806 65 m s^{-2}	exact
Avogadro constant	N_A	$6.022\ 141\ 99(47)\times10^{23}$ mol^{-1}	79
Boltzmann constant	k	$1.380\ 650\ 3(24)\times10^{-23}$ J K^{-1}	1700
		$= 8.617\ 342(15)\times10^{-5}$ eV K^{-1}	1700
molar volume, ideal gas at STP	$N_A k(273.15\text{ K})/(101\ 325\text{ Pa})$	$22.413\ 996(39)\times10^{-3}$ m^3 mol^{-1}	1700
Wien displacement law constant	$b = \lambda_{\rm max}T$	$2.897\ 768\ 6(51)\times10^{-3}$ m K	1700
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \pi^2 k^4/60\hbar^3 c^2$	$5.670\ 400(40)\times10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}	7000
Fermi coupling constant**	$G_F/(\hbar c)^3$	$1.166\ 39(1)\times10^{-5}$ GeV^{-2}	9000
weak-mixing angle	$\sin^2\widehat{\theta}(M_Z)$ ($\overline{\rm MS}$)	0.23113(15)††	6.5×10^5
$W^\pm$ boson mass	m_W	80.423(39) GeV/c^2	4.8×10^5
Z^0 boson mass	m_Z	91.1876(21) GeV/c^2	2.3×10^4
strong coupling constant	$\alpha_s(m_Z)$	0.1172(20)	1.7×10^7

$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238$	e $= 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235$	$\gamma = 0.577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 861$	
1 in $\equiv 0.0254$ m	1 G $\equiv 10^{-4}$ T	1 eV $= 1.602\ 176\ 462(63)\times10^{-19}$ J	kT at 300 K $= [38.681\ 686(67)]^{-1}$ eV
1 Å $\equiv 0.1$ nm	1 dyne $\equiv 10^{-5}$ N	1 eV/c^2 $= 1.782\ 661\ 731(70)\times10^{-36}$ kg	0 °C $\equiv 273.15$ K
1 barn $\equiv 10^{-28}$ m^2	1 erg $\equiv 10^{-7}$ J	$2.997\ 924\ 58\times10^9$ esu $= 1$ C	1 atmosphere $\equiv$ 760 Torr $\equiv$ 101 325 Pa

* The meter is the length of the path traveled by light in vacuum during a time interval of 1/299 792 458 of a second.
† At $Q^2 = 0$. At $Q^2 \approx m_W^2$ the value is $\sim 1/128$.
‡ Absolute lab measurements of G_N have been made only on scales of about 1 cm to 1 m.
** See the discussion in Sec. 10, "Electroweak model and constraints on new physics."
†† The corresponding $\sin^2\theta$ for the effective angle is 0.23143(15).

Figure 4.41: da S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004

4. PERIODIC TABLE OF THE ELEMENTS

Table 4.1. Revised 2004 by C.G. Wohl (LBNL). Adapted from the Commission of Atomic Weights and Isotopic Abundances, "Atomic Weights of the Elements 1995," Pure and Applied Chemistry **68**, 2339 (1996), and G. Audi and A.H. Wapstra, "The 1993 Mass Evaluation," Nucl. Phys. **A565**, 1 (1993). The atomic number (top left) is the number of protons in the nucleus. The atomic mass (bottom) is weighted by isotopic abundances in the Earth's surface. For a new determination of atomic masses, not weighted by abundances, see G. Audi, A.H. Wapstra, and C. Thibault, Nucl. Phys. **A729**, 337 (2003). Atomic masses are relative to the mass of the carbon-12 isotope, defined to be exactly 12 unified atomic mass units (u). Errors range from 1 to 9 in the last digit quoted. Relative isotopic abundances often vary considerably, both in natural and commercial samples. A number in parentheses is the mass of the longest-lived isotope of that element—no stable isotope exists. However, although Th, Pa, and U have no stable isotopes, they do have characteristic terrestrial compositions, and meaningful weighted masses can be given. For elements 110 and 111, the numbers of nucleons A of confirmed isotopes are given.

PERIODIC TABLE OF THE ELEMENTS

1 IA												13 IIIA	14 IVA	15 VA	16 VIA	17 VIIA	18 VIIIA
1 H Hydrogen 1.00794	2 IIA											5 B Boron 10.811	6 C Carbon 12.0107	7 N Nitrogen 14.00674	8 O Oxygen 15.9994	9 F Fluorine 18.9984032	2 He Helium 4.002602
3 Li Lithium 6.941	4 Be Beryllium 9.012182											13 Al Aluminum 26.981538	14 Si Silicon 28.0855	15 P Phosph. 30.973761	16 S Sulfur 32.066	17 Cl Chlorine 35.4527	10 Ne Neon 20.1797
11 Na Sodium 22.989770	12 Mg Magnesium 24.3050	3 IIIB	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB	8	9 VIII	10	11 IB	12 IIB	13 Al Aluminum 26.981538	14 Si Silicon 28.0855	15 P Phosph. 30.973761	16 S Sulfur 32.066	17 Cl Chlorine 35.4527	18 Ar Argon 39.948
19 K Potassium 39.0983	20 Ca Calcium 40.078	21 Sc Scandium 44.955910	22 Ti Titanium 47.867	23 V Vanadium 50.9415	24 Cr Chromium 51.9961	25 Mn Manganese 54.938049	26 Fe Iron 55.845	27 Co Cobalt 58.933200	28 Ni Nickel 58.6934	29 Cu Copper 63.546	30 Zn Zinc 65.39	31 Ga Gallium 69.723	32 Ge German. 72.61	33 As Arsenic 74.92160	34 Se Selenium 78.96	35 Br Bromine 79.904	36 Kr Krypton 83.80
37 Rb Rubidium 85.4678	38 Sr Strontium 87.62	39 Y Yttrium 88.90585	40 Zr Zirconium 91.224	41 Nb Niobium 92.90638	42 Mo Molybd. 95.94	43 Tc Technet. (97.907215)	44 Ru Ruthen. 101.07	45 Rh Rhodium 102.90550	46 Pd Palladium 106.42	47 Ag Silver 107.8682	48 Cd Cadmium 112.411	49 In Indium 114.818	50 Sn Tin 118.710	51 Sb Antimony 121.760	52 Te Tellurium 127.60	53 I Iodine 126.90447	54 Xe Xenon 131.29
55 Cs Cesium 132.90545	56 Ba Barium 137.327	57–71 Lantha-nides	72 Hf Hafnium 178.49	73 Ta Tantalum 180.9479	74 W Tungsten 183.84	75 Re Rhenium 186.207	76 Os Osmium 190.23	77 Ir Iridium 192.217	78 Pt Platinum 195.078	79 Au Gold 196.96655	80 Hg Mercury 200.59	81 Tl Thallium 204.3833	82 Pb Lead 207.2	83 Bi Bismuth 208.98038	84 Po Polonium (208.982415)	85 At Astatine (209.987131)	86 Rn Radon (222.017570)
87 Fr Francium (223.019731)	88 Ra Radium (226.025402)	89–103 Actinides	104 Rf Rutherford. (261.1089)	105 Db Dubnium (262.1144)	106 Sg Seaborg. (263.1186)	107 Bh Bohrium (262.1231)	108 Hs Hassium (265.1306)	109 Mt Meitner. (266.1378)	110 Ds Darmstadt. [269.2411]	111 [272]							

Lanthanide series	57 La Lanthan. 138.9055	58 Ce Cerium 140.116	59 Pr Praseodym. 140.90765	60 Nd Neodym. 144.24	61 Pm Prometh. (144.912745)	62 Sm Samarium 150.36	63 Eu Europium 151.964	64 Gd Gadolin. 157.25	65 Tb Terbium 158.92534	66 Dy Dyspros. 162.50	67 Ho Holmium 164.93032	68 Er Erbium 167.26	69 Tm Thulium 168.93421	70 Yb Ytterbium 173.04	71 Lu Lutetium 174.967
Actinide series	89 Ac Actinium (227.027747)	90 Th Thorium 232.0381	91 Pa Protactin. 231.03588	92 U Uranium 238.0289	93 Np Neptunium (237.048166)	94 Pu Plutonium (244.064197)	95 Am Americ. (243.061372)	96 Cm Curium (247.070346)	97 Bk Berkelium (247.070298)	98 Cf Californ. (251.079579)	99 Es Einstein. (252.08297)	100 Fm Fermium (257.095096)	101 Md Mendelev. (258.098427)	102 No Nobelium (259.1011)	103 Lr Lawrenc. (262.1098)

Figure 4.42: da S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND *d* FUNCTIONS

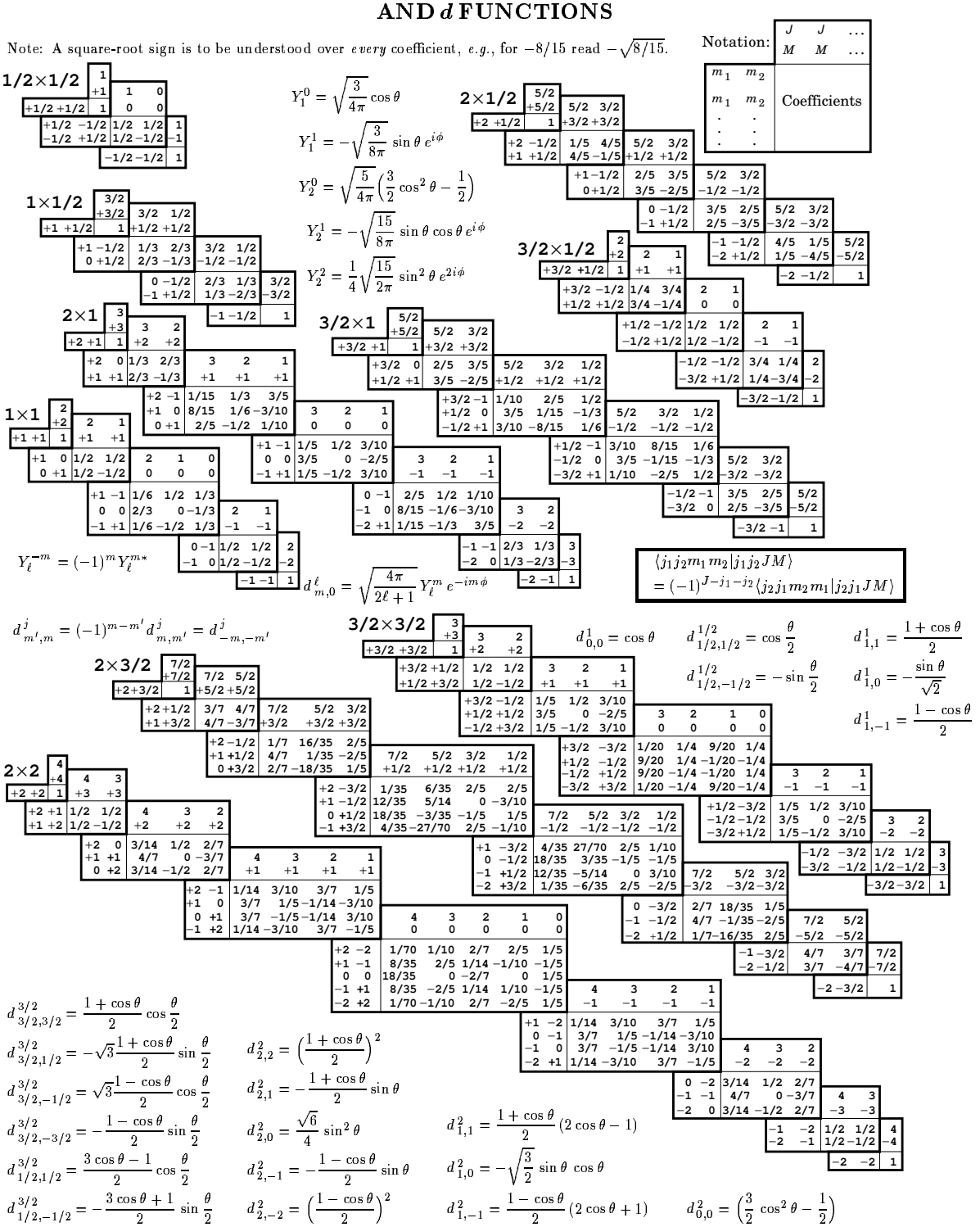


Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Figure 4.43: da S.Eidelman *et al.*, Physics Letters B592, 1, 2004