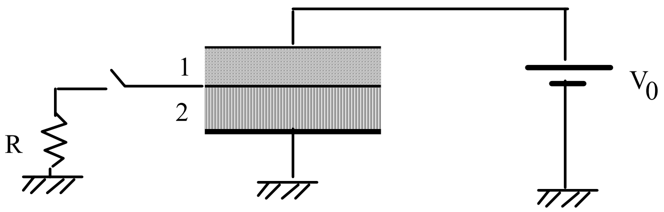
UNIVERSITA' DEGLI STUDI ROMA TRE

PROVA SCRITTA DI ELETTROMAGNETISMO II
07/01/2003

1) Un condensatore piano, con armature di superficie S=100 cm^2, è riempito da due lastre di dielettrico, di spessore d_1 =2 mm e d_2 = 3mm, e di costante dielettrica relativa ε_{r1}= 1.5 e ε_{r2} = 2.



Tra i due dielettrici è inserito un strato metallico di spessore trascurabile. Uno dei capi del condensatore è (da t=-∞) collegato ad un generatore di tensione V_0= 200 V, l' altro è collegato a terra. Al tempo t = 0, lo strato metallico viene collegato a terra tramite una resistenza R= 200 Ω

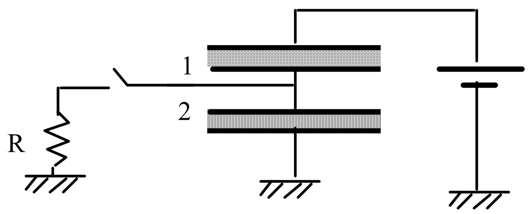
Si determini:

a) Il potenziale V^* dello strato metallico al tempo t_1=2.0 x lO^{-8} s.

b) L'energia E dissipata nella resistenza fino all' istante t_2= 1.5 x 10^{-8} s.

c) I1 lavoro L compiuto dal generatore nell'intervallo di tempo $0 \le t \le \infty$.

<u>Soluzione</u>:



a) Il condensatore può essere considerato come una serie di due condensatori C_1 e C_2:

$$C_1 = \varepsilon_0\varepsilon_{r1}\frac{S}{d} = 66.4 \text{ pF}$$

$$C_2 = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}\frac{S}{d} = 59 \text{ pF}$$

1) La capacità totale dei due condensatori in serie è: $C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ Indicando con q_1 la carica sull' armatura superiore del primo condensatore, si ha, per t = 0, $q_1=V_0C$. D' altra parte, indicando con $V^*(t)$ il potenziale dello strato metallico, si ha $V^*(t) = V_0 - \frac{q_1}{C_1}$.

Da queste 3 relazioni segue $V^*(0) = V_0(1-\frac{C}{C_1}) = V_0\frac{C_1}{C_1+C_2}$ =105.6 V

$V^*(t=0)\frac{q_1}{C_1}$

Indicando con q_2 la carica sull' armatura superiore del secondo condensatore, la carica totale sullo strato metallico sarà $Q=q_2-q_1=C_2V^*(t)-C_1(V0-V^*(t))=(C_1+C_2)V^*(t)-C_1V_0$.

Per $t \ge 0$ si ha $-dQ = (C_1+C_2)\, dV^* = i\, dt$ con $i = \frac{V^*}{R}$

$$\frac{dV^*}{V^*} = -\frac{dt}{R(C_1+C_2)} \Longrightarrow V^*(t) = V^*(0)e^{-t/\tau} \qquad \tau = R(C_1+C_2) = 2.5\ 10^{-8}\ \text{s}$$

$$\frac{dq_1}{dt} = -C_1\frac{dV(t)}{dt} \qquad V'(t_1) = V(0)\frac{C_1}{C_1+C_2}e^{-t_1/\tau} = 47.5\text{V}$$

b) $dE = V^*\, i\, dt = \frac{V^{*2}}{R}dt = \frac{V^{*2}(0)}{R}e^{-2t/\tau}dt$

$$E = \int_0^{t_2}\frac{V'^2(0)}{R}e^{-2t/\tau}dt = \frac{\tilde{V}^2(0)}{R}\frac{\tau}{2}(1-e^{-2t_2/\tau}) = 1.41\times 10^{-6}\ \text{J}$$

c) Il lavoro compiuto dal generatore per $t \geq 0$ può essere calcolato con il prodotto $V_0[q_1(\infty)-q_1(0)]$

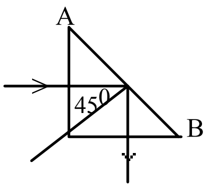
$q_1(\infty)=C_1[V_0-\tilde{V}(\infty)]=C_1V_0$

$q_1(0)=C_1[V_0-\tilde{V}(0)]=C_1V_0[1-(1-C/C_1)]= \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}V(0)$

$$L = V_0[C_1V_0 - \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}V_0] = 1.23\times 10^{-6}\ \text{J}$$

Questo risultato può anche essere trovato come:

$$L = \underbrace{\frac{V_0^2}{2}\frac{C_1^2}{C_1+C_2}}_{\text{effetto Joule } t\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2}C_1V_0^2}_{\text{energia finale cond}} - \underbrace{\frac{1}{2}C_0V_0^2}_{\text{energiaa } t=0 \text{ delsist}}$$



2°. Un raggio di luce viene riflesso totalmente dalla superficie AB di un prisma triangolare su cui esso incide con un angolo di 45°.

a) quale è il minimo valore dell' indice di rifrazione del vetro per cui ciò accade se il prisma è nel vuoto?

b) se invece il prisma è nell' acqua (n_{acqua} = 1.33) ed il valore dell' indice di rifrazione del vetro è n_v = 1.50 quale è l' intervallo dei valori dell' angolo di incidenza per i quali si ha rifrazione totale?

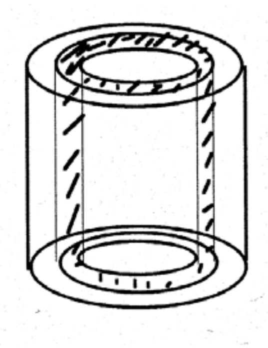
<u>Soluzione</u>:

a) l' indice di rifrazione del vetro deve essere tale che: $n \geq \frac{1}{\text{sen}\, i} = \frac{1}{\text{sen}45^0} = 1.41$

b) la condizione perchè si abbia riflessione totale sulla superficie AB è ora che l' angolo di incidenza sia maggiore dell' angolo limite i_l, tale che $\frac{n_{acqua}}{n_v} = \text{sen}\, i_l$

$i_l = \text{arcsen}\frac{n_{acqua}}{n_v} = 62^0$ Quindi l' intervallo richiesto è:62°< i <90°

PROVA SCRITTA DI ELETTROMAGNETISMO II
10/09/2002



1) Un condensatore cilindrico di raggio interno R_1 = 3 cm ed esterno R_2 = 10 cm è riempito di una sostanza di costante dielettrica relativa ε_r fino a metà larghezza (da R_1 a $R_m = R_1 + (R_2 - R_1)/2$).

Calcolare quanto deve valere ε_r affinchè l' energia elettrostatica nel dielettrico sia uguale a quella contenuta nello spazio vuoto rimanente entro il condensatore.

Calcolare inoltre la densità superficiale di polarizzazione che appare sulla superficie di separazione dielettrico-vuoto quando alle armature del condensatore viene applicata una differenza di potenziale di V= 700 V.

Si indichi con l la lunghezza del condensatore. Si considerino trascurabili gli effetti di bordo.

Soluzione:

a) Detta W_1 l'energia elettrostatica del dielettrico e W_2 quella dello spazio vuoto si ha:

$$W_1 = W_2 \rightarrow \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{Q^2}{2C_2} = C_1 = C_2$$

$$\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\ln\frac{R_1+R_2}{2R_1}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{2R_2}{R_1+R_2}} \text{ da cui: } \varepsilon_r = \frac{\ln\frac{R_1+R_2}{2R_1}}{\ln\frac{2R_2}{R_1+R_2}} = 1.79$$

Oppure:

$$E_1 = \frac{Q}{2\pi r\varepsilon_0 l} \quad \text{e} \quad E_2 = \frac{Q}{2\pi r\varepsilon_0\varepsilon_r l} \quad \text{con lo stesso risultato per Er.}$$

b) $$\sigma_p = P_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_1 = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{2R_2}{R_1+R_2}}$$

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{1}{2}C_2 = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{2R_2}{R_1+R_2}}$$

$$\sigma_p = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \frac{V}{2R_M \ln \frac{2R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \frac{V}{(R_1 + R_2) \ln \frac{2R_2}{R_1 + R_2}} = 5\ 10^{-8}$$

C/m^2.

2. In un dispositivo di interferenza alla Young realizzato con due fasci monocromatici di lunghezza d'onda λ_o = 0.40 μm, l'inserzione di una sottile lamina di indice di rifrazione n = 1.4 perpendicolarmente ad uno, dei due fasci provoca lo spostamento di due frange della figura di interferenza.

Se si fa incidere perpendicolarmente alla lamina un fascio di luce bianca, si osserva che la luce trasmessa presenta una notevole attenuazione in corrispondenza di alcune lunghezze d'onda.

Determinare i valori di queste lunghezze d'onda. Si prendano come limiti per lo

spettro di luce bianca i valori λ_{min} = 0.40 μm, λ_{max} = 0.70 μm.

Soluzione:

Dallo spessore delle frange si risale allo spessore della lamina δ: $(n - 1)\ \delta = 2\lambda_o$

==> $\delta = 2$ μm

Le frequenze ottenute in trasmissione sono quelle in cui si ha un massimo di intensità in riflessione, che si ottengono da:

$$(2k+1)\frac{\lambda}{2} = 2n\delta \qquad \lambda = \frac{4n\delta}{(2k+1)}$$

Dal fascio di luce bianca (0.4 μm≤λ≤ 0.7 μm) si ha

k(O.4 μm) = 13.5

k(O.7 μm) = 7.5

Le lunghezze d' onda attenuate sono dunque quelle ottenute dalla

$$\lambda = \frac{4n\delta}{(2k+1)}$$

per $8 \leq k \leq 13$

λ_8= 0.659 λ_9= 0.589 λ_{10}= 0.533 λ_{11}= 0.486 λ_{12}= 0.448 λ_{13}= 0.415 (in μm)

ELETTROMAGNETISMO II 19-3-2002

1) Per aumentare la capacità di un condensatore piano in aria (ε_r=1) viene inserita (parallelamente alle armature) una lastra metallica di spessore δ_m = 2 mm.
Volendo ottenere il medesimpo aumento di capacità usando, al posto della lastra metallica, un lastra di materiale dielettrico avente ε_r=4, quale dovrà essere lo spessore della lastra?

<u>Soluzione</u>:
Detta S la superficie delle armature e d la loro distanza il condensatore in aria ha la capacità:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

Introducendo, per esempio nel mezzo, la lastra metallica si ha una capacità C' corrispondente a quella di due condensatori uguali in serie aventi ciascuno armature a distanza $\frac{1}{2}(d-\delta_m)$ e cioè:

$$\frac{1}{C'} = \frac{2\frac{1}{2}(d-\delta_m)}{\varepsilon_0 S} = \frac{(d-\delta_m)}{\varepsilon_0 S}$$

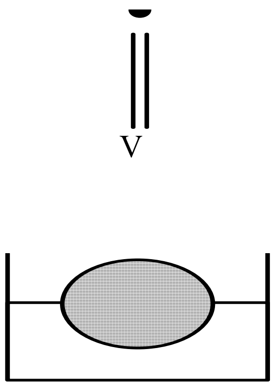
Introducendo invece la lastra dielettrica di spessore δ_d si avranno tre condensatori in serie: due in aria e il centrale con il dielettrico. La capacità C'' del sistema sarà data da:

$$\frac{1}{C''} = \frac{d-\delta_d}{2\varepsilon_0 S} + \frac{\delta_d}{\varepsilon_0\varepsilon_r S} + \frac{d-\delta_d}{2\varepsilon_0 S} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\left[d - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\delta_d\right]$$

dovendo essere: $\frac{1}{C'} = \frac{1}{C''}$ dovremmo avere $d - \delta_m = d - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\delta_d$

da cui:

$$\delta_d = \frac{\varepsilon_r \delta_m}{\varepsilon_r - 1} = 2.66\,\text{mm}$$



2) Una sfera di materiale trasparente (plexiglass) di raggio R = 5 cm. galleggia nell'acqua contenuta in un recipiente (cfr. fig.). Al di sopra dell'acqua c'é aria (n=1). Si supponga che l' indice di rifrazione dei due mezzi (acqua e plexiglass) segua la legge $n(\lambda) = A + B/\lambda^2$.
Una sorgente luminosa a distanza infinita dalla sfera emette radiazioni costituite da due lunghezze d' onda, λ_1= 0.4 μm e λ_2= 0.6 μm.
Calcolare la posizione delle immagini della sorgente (rispetto al centro della sfera) generate dall' intero sistema.

Si assuma $A_{H2O} = 0.33$ e $B_{H2O} = 0.36\ \mu m^2$ per l' acqua e
$A_{Pl} = 0.5$ e $B_{Pl} = 0.36\ \mu m^2$ per il Plexiglass

<u>Soluzione</u>

Rispetto al primo diottro la sorgente (all' infinito) ha una immagine data da:

$\frac{1}{\infty} + \frac{n_{Pl}}{x_1} = \frac{n_{Pl} - 1}{R}$ da cui $x_1 = \frac{n_{Pl} R}{n_{Pl} - 1}$ Ove x1 è riferito al vertice del primo diottro.

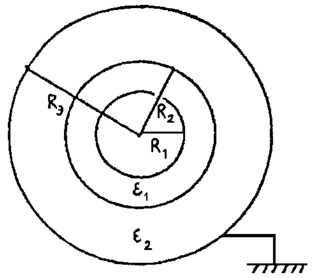
Rispetto al secondo diottro si ha invece: $\frac{n_{Pl}}{-x_1 + 2R} + \frac{n_{H_2O}}{x_{fin}} = \frac{n_{H_2O} - n_{Pl}}{R}$ da cui

$\frac{n_{H_2O}}{x_{fin}} = \frac{n_{H_2O} - n_{Pl}}{R} - \frac{n_{Pl}}{-x_1 + 2R}$ e quindi: $x_{fin} = \frac{n_{H_2O}}{\frac{n_{H_2O} - n_{Pl}}{R} - \frac{n_{Pl}}{-x_1 + 2R}}$

n_{Pl}		n_{H2O}	
2.75	0.4μ	2.58	0.4μ
1.5	0.6μ	1.33	0.6μ

x_{fin}= -2.07 e rispetto al centro della sfera ==> 2.93
x_{fin}= 3.98 e rispetto al centro della sfera ==> 8.98

FISICA GENERALE II - 16.2.2001



1) Il condensatore cilindrico, avente raggio interno R_1 = 2cm e raggio esterno R_3 = 10 cm, ha lo spazio tra le armature riempito da due gusci cilindrici adiacenti, di cui il primo di raggio interno R_1, raggio esterno R_2= 6 cm, costante dielettrica ε_{r1} = 1.7 e rigidità dielettrica (massimo campo elettrico sopportabile dal dielettrico) E_{R1} =70 KV/cm ed il secondo di raggio interno R_2, raggio esterno R_3, costante dielettrica ε_{r2} = 1.3 e rigidità dielettrica E_{R2} =25 KV/cm.
Ricavare l' espressione della massima ddp che si può applicare al condensatore senza comprometterne le qualità di isolamento.

Soluzione:

$E = \lambda / 2\pi\varepsilon r \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

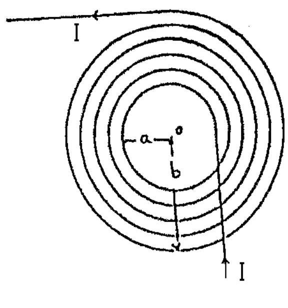
$$E_{1MAX} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 R_1} \le E_{R1} \to \lambda \le 2\pi\varepsilon_1 R_1 E_{R1}$$

$$E_{2MAX} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 R_2} \le E_{R2} \to \lambda \le 2\pi\varepsilon_2 R_2 E_{R2}$$

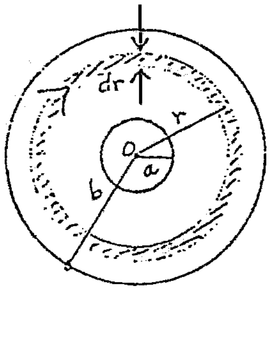
$$\to \lambda_{MAX} = \text{al minore tra } 2\pi\varepsilon_1 R_1 E_{R1} \text{ e } 2\pi\varepsilon_1 R_2 E_{R2}$$

$$V_{MAX} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_{MAX}}{2\pi\varepsilon_1 r} dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\lambda_{MAX}}{2\pi\varepsilon_2 r} dr =$$

$$= R_1 E_{R1} \left[\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) \right]$$



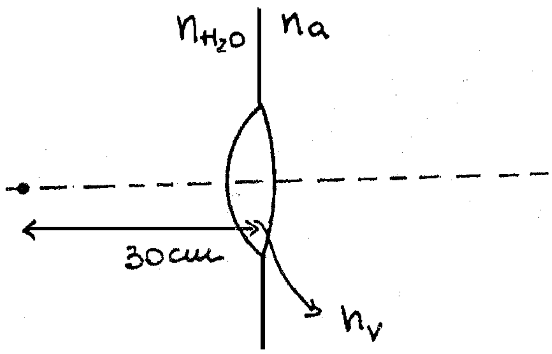
2) Una bobina piatta in aria è costituita da un N=10^4 spire adiacenti di filo sottile avvolte in modo da riempire completamente con una spirale piana e compatta la corona circolare di raggio interno a = 5 cm ed esterno b = 15 cm indicata in figura. Se la bobina è percorsa da una corrente I = 2 A, ricavare calcolare il valore del vettore induzione magnetica B nel centro 0 della bobina stessa.



Soluzione: densità radiale di spire: N/(b-a). La corona elementare di raggio r contiene
(N/(b-a).dr) spire percorse da corrente I che producono i n O:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2r} \frac{N}{(b-a)} dr$$

$$B = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2r} \frac{N}{(b-a)} dr = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{N}{(b-a)} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



3) Una lente sottile di vetro (n_{vetro}=1.5) è formata da due diottri aventi raggi R_1=2 cm (a sinistra) e R_2 = 20 cm (a destra) e separa una vasca piena d' acqua (n_{H2O}=1.33) dall' aria esterna. Un oggetto si trova nell' acqua a 30 cm dal piano della lente. Calcolare a quale distanza dal piano della lente si forma l' immagine. Dove si forma l' immagine se l' indice di rifrazione dell' acqua sale al valore di quello del vetro? In entrambi i casi dire se l' immagine è reale o virtuale.

Soluzione:

$$\frac{n_{H_2O}}{q}+\frac{n_a}{p}=\frac{n_v-n_{H_2O}}{R_1}+\frac{n_a-n_v}{R_2}$$

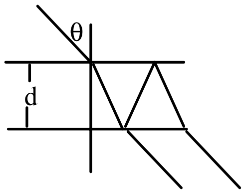
q=30 cm ==> p = 64 cm immagine reale rovesciata a ds dalla lente.

N_{H2O} =n_v ==> <u>diottro sferico</u>

$$\frac{n_{H_2O}}{q}+\frac{n_a}{p}=\frac{n_a-n_v}{R_2}$$

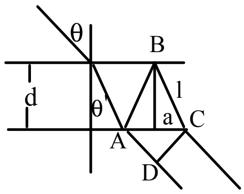
q= 30 cm ==> p = -13 cm immagine virtuale dritta a ds dalla lente

III prova di esonero di
FISICA GENERALE II - 24.1.2001



1°. Una onda piana di luce monocromatica (λ = 0.5 μm) incide su una pellicola trasparente a facce piane e parallele di spessore d = 0.2 μm ed indice di rifrazione n = 1.733.=>>1.3
L' onda viene parzialmente trasmessa subendo riflessioni multiple all' interno della pellicola.
Determinare i valori dell' angolo di incidenza θ per cui si ha il massimo di intensità del fascio trasmesso.

Soluzione:



Il primo massimo di intensità si ha quando la differenza di cammino ottico fra l' onda che ha subito una riflessione all' interno della pellicola (tratto AB + BC) e l' onda che percorre il tratto AD è pari a λ.
l_1 (cammino ottico nella pellicola) = 2ln e poichè d = lcosθ'

$$l_1 = \frac{2nd}{\cos\theta'}$$

l_2 (cammino ottico nella pellicola) = 2asenθ e poichè a = d tangθ' e senθ = n senθ'

$l_2 = 2dn\,\mathrm{sen}\theta'\,\mathrm{tang}\theta' = 2nd\frac{\mathrm{sen}^2\theta'}{\cos\theta'}$. La differenza $\Delta l = l_1 - l_2$ risulta essere:

$$(1) \qquad \Delta l = \frac{2nd}{\cos\theta'} - 2nd\frac{\mathrm{sen}^2\theta'}{\cos\theta'} = 2nd\cos\theta' = \lambda$$

Per cui $\theta' = \mathrm{ar}\cos\frac{\lambda}{2nd} = 30^0$ ==> sen θ = 1.733 sen30° e θ = 60°
In realtà il massimo è anche unico come si può vedere dalla soluzione grafica della (1).

2° Un fascio di luce parallelo di lunghezza d' onda $\lambda = 1\mu$m investe due tubetti identici A_1 e A_2 (di lunghezza l = 1) cm chiusi alle estremità con superfici piane e parallele identiche. I due tubetti sono riempiti con lo stesso fluido trasparente avente un indice di rifrazione che varia con la temperatura secondo la legge $n(T) = n_0 - 10^{-5}(T-T_0)$ (con n_0=.1.3 alla temperatura di T_0=20 ^{0}C.
All' uscita di ognuno dei tubetti la luce che li ha attraversati incide su due sottili fenditure. Su uno schermo, posto a distanza molto grande rispetto alla distanza tra i tubi, si formano quindi delle frangie di interferenza, (ovviamente in particolare per θ = 0° si ha un massimo).
Inizialmente T= T_0 per ambedue i tubetti; ad un certo istante la temperatura di A_1 viene fatta aumentare leggermente.
Determinare la minima variazione della temperatura per cui si ha la massima variazione di intensità luminosa in direzione θ = 0°?

Soluzione:

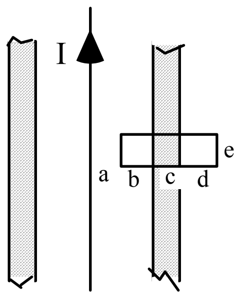
Se l' indice di rifrazione del fluido in A_1 diminuisce di una quantità Δn, il cammino ottico del fascio che passa in A_1 è più corto di quello del fascio che passa in T_2.
La differenza di cammino ottico δ che prima era nulla al centro dello schermo, sarà ora:

δ = nl -(n- Δn)l =Δn l

Poichè si abbia buio al centro dello schermo (massima variazione di intensità luminosa in direzione $\theta = 0°$) si deve avere che δ passi dal valore 0 al valore $\lambda/2$; quindi:

$\Delta n\, l = 10^{-5}(T-T_0)l = \lambda/2$

II prova di esonero di
FISICA GENERALE II - 16.12.2000



1) Come indicato in fig. un filo rettilineo percorso da una corrente elettrica continua di intensità I sta sull'asse di un lungo tubo di ferro, di permeabilità magnetica costante μ_r. Dare le espressioni del flusso induzione magnetica B e del vettore intensità del campo magnetico H per il rettangolo indicato e calcolarne i valori per I=20 A, μ_r=200, a=b=c=d=e = 1 cm.

Soluzione:

Circuitazione di H: $H(x) = \frac{I}{2\pi}\frac{1}{x}$ ovunque!!

$$\Phi(H) = \int_a^{a+b+c+d} \left(\frac{1}{2\pi} I \frac{e}{x}\right) dx = \frac{eI}{2\pi} \ln \frac{a+b+c+d}{a}$$

$$B(x) = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} I \frac{1}{x}$$

$$\Phi(B) = \int_a^{a+b} \left(\frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{e}{x}\right) dx + \int_{a+b}^{a+b+c} \left(\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} I \frac{e}{x}\right) dx + \int_{a+b+c}^{a+b+c+d} \left(\frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{e}{x}\right) dx$$

FISICA GENERALE II (FISICI)
I esonero (9/11/2000)

1. Un condensatore sferico ha raggio a = 10 cm e b = 11 cm ed è collegato a un generatore di f.e.m. il quale stabilisce tra gli elettrodi una d.d.p. V_0 = 500 V. L'intercapedine tra i due elettrodi (inizialmente in aria ε_r = 1) è successivamente riempita con un liquido isolante. Si verifica che la carica elettrica subisce un incremento Δq = 0,5 μC. Si determini:
a) la costante dielettrica del liquido isolante;
b) il lavoro del generatore per tenere costante la d.d.p. V_0 tra gli elettrodi.

Soluzione:
a)

$$C_0 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} = 1.22 \cdot 10^{-12}\,F \qquad Q_0 = 1.22 \cdot 10^{-12} \bullet 500 = 6.12 \bullet 10^{-8}\,C$$

$$C_{fin} = \varepsilon_r C_0 = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0 + \Delta q}{V} \qquad \varepsilon_r = \frac{Q_0 + \Delta q}{Q_0} = 9.17$$

b)

Le energie iniziali e finali del sistema sono:

$$E_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2{}_0}{C_0} = \frac{1}{2} V Q_0 \qquad E_{fin} = \frac{1}{2} V (Q_0 + \Delta q)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} V \Delta Q = 1.25 \bullet 10^{-4}\,J$$

PROVA SCRITTA DI FISICA GENERALE II (FISICI)
11/9/2000

3} Un fascio sottile di raggi paralleli e sezione circolare di raggio a=2 mm viaggia inizialmente in aria ed incide su una superficie sferica convessa di raggio r = 20 cm. La luce percorre un tratto in vetro (n = 1,5) prima di incontrare una seconda superficie sferica di raggio R che separa vetro da aria. I centri delle due superfici giacciono sulla retta che individua la direzione del fascio incidente a distanza l = 36 cm uno dall' altro. Le due superfici delimitano una porzione di vetro.
Calcolare il valore R tale che il fascio uscente del vetro sia ancora formato da raggi paralleli.
Determinare il rapporto tra le dimensioni trasversali dei fasci uscente ed entrante nel vetro (cioè l'ingrandimento lineare del sistema).